Kapitola 6.

Spojitost

Definice 6.1. (spojitost v bodě)

Funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ (spojitost definujeme v bodě definičního oboru), když existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Je-li x_0 izolovaný bod definičního oboru funkce f, považujeme funkci f v tomto bodě za spojitou.

Podmínku spojitosti píšeme také takto:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0, \quad \text{nebo} \quad \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0,$$

kde $h = x - x_0$.

Je-li $f(x_0-) = f(x_0)$, říkáme, že f je spojitá zleva v bodě x_0. Je-li $f(x_0+) = f(x_0)$, říkáme, že f je spojitá zprava v bodě x_0.

Věta 6.2. (kritéria spojitosti)

1. Cauchy: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D(f) : \qquad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. Heine: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k $f(x_0)$.

3. topologické: Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když

$$\forall U(f(x_0), \varepsilon) \;\; \exists U(x_0, \delta) \;\; \forall x \in D(f) : \qquad x \in U(x_0, \delta) \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon).$$

4. Funkce f je spojitá ve vnitřním bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy, když existují konečné limity $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ a platí $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$.

Definice 6.3. (body nespojitosti)

Nechť f je definována v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$ hromadného bodu x_0 definičního oboru (připouštíme $x_0 \notin D(f)$, avšak $P(x_0) \subset D(f)$).

Bod x_0 se nazývá bodem nespojitosti funkce f, jestliže buď f není v x_0 definována, nebo je v něm definována, ale není v něm spojitá.

Specálně, bod x_0 je

1. bod odstranitelné nespojitosti, když
$$f(x_0+) = f(x_0-) \neq f(x_0);$$
2. bod nespojitosti 1. druhu, když
$$f(x_0+) \neq f(x_0-);$$
číslo $f(x_0+) - f(x_0-)$ se nazývá skok funkce f v bodě x_0;
3. bod nespojitosti 2. druhu, když alespoň jedna z limit $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ neexistuje (včetně případu $f(x_0\pm) = \pm\infty$).

Věta 6.4. (algebraické operace se spojitými funkcemi)

Nechť funkce f a g mají stejný definiční obor D a jsou spojité v bodě $x_0 \in D$. Potom jsou v bodě x_0 spojité také funkce
$$f \pm g, \quad fg, \quad |f|.$$
Pokud navíc $\forall x \in D$ platí $g(x) \neq 0$, je v bodě x_0 spojitá i funkce $\dfrac{f}{g}$.

Věta 6.5. (spojitost složené funkce)

Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť g je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$. Potom superpozice $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0.

Věta 6.6. (lokální omezenost spojité funkce)

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, potom existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0, v němž je funkce f omezená.

Věta 6.7. (o zachování znaménka)

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu x_0 takové, že
$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$$
pro všechna x z tohoto okolí.

Definice 6.8. (spojitost v uzavřeném intervalu)

Funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v každém vnitřním bodě $x_0 \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta 6.9. (Cauchyova věta o nulové hodnotě)

Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$ (tj. $f(a)$, $f(b)$ mají opačná znaménka). Potom existuje takové $\xi \in (a, b)$, že $f(\xi) = 0$.

Věta 6.10. (Weierstrassova věta o nabývání minima a maxima)

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu zde nabývá svého globálního minima a maxima.

Věta 6.11. ( )

1. Je-li funkce f ostře monotónní v intervalu I a je-li $f(I)$ (obraz intervalu I) interval, potom f je spojitá v I. (Postačující podmínka spojitosti.)
2. Je-li f spojitá v intervalu I (nemusí být uzavřený), potom množina $f(I)$ je jednobodová nebo interval. Obrácené tvrzení ale neplatí!
3. Je-li f spojitá a prostá v uzavřeném intervalu I, potom inverzní funkce f^{-1} je také spojitá a ostře monotónní v $f(I)$.
4. Monotónní funkce má v otevřeném intervalu I nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti a jsou to body nespojitosti 1. druhu. (Monotónní funkce nemůže mít body nespojitosti 2. druhu.)

Definice 6.12. (spojitost na množině)

Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je <u>spojitá na množině</u> $I \subset \mathbb{R}$, je-li spojitá v každém bodě $x \in I$ (v případných hraničních bodech jednostranně), tj.

$$\forall x \in I \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 \ \ \forall x' \in I : \quad |x' - x| < \delta(x, \varepsilon) \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Definice 6.13. (stejnoměrná spojitost)

Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je <u>stejnoměrně spojitá na množině</u> $I \subset \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x \in I \ \ \forall x' \in I : \quad |x' - x| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Lemma 6.14. ( )

Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na množině I, pak je na množině I spojitá.

Věta 6.15. (Cantorova)

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $I \subset D(f)$, potom je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.