Kapitola 5.

Limity

Definice 4.13. (hromadný a izolovaný bod množiny)

Bod x_0 se nazývá hromadný bod množiny A, jestliže v každém jeho okolí

$$U(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta\}$$

leží alespoň jeden bod množiny A různý od x_0.
Bod $x_0 \in A$, který není hromadným bodem množiny A, se nazývá izolovaným bodem množiny A.

Definice 5.1. (částečná limita)

Číslo c se nazývá částečnou limitou funkce f pro $x \to x_0$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, taková, že pro $x_n \to x_0$ je $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = c$.

Definice 5.2. (horní a dolní limita)

Největší (nejmenší) částečná limita funkce f v bodě x_0 se nazývá horní (dolní) limita funkce f a značí se

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \limsup_{x \to x_0} f(x),$$

respektive

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Definice 5.3. (Heineho definice limity)

Mějme funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a nechť x_0 je hromadný bod definičního oboru $D(f)$.

1. Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, konvergující k číslu x_0 posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu b a píšeme
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b.$$
2. Když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$ konvergující k číslu x_0, $x_n \neq x_0$, posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$
3. Když existuje $b \in \mathbb{R}$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$ divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$) posloupnost $\{f(x_n)\}$ konverguje k číslu b, říkáme, že funkce f má v $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu b a píšeme
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$
4. Když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$ divergující k $+\infty$ (resp. $-\infty$) posloupnost $\{f(x_n)\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$), píšeme
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \text{resp.} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Věta 5.4. (jednoznačnost limity)

Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$, potom je jediná.

Věta 5.5. (algebra limit)

Nechť funkce f a g mají společný definiční obor D a nechť existují limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}$$

(včetně případu $\pm\infty$ místo x_0). Potom existují i limity pro $x \to x_0$ funkcí $f \pm g$ a fg a platí:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \pm c$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = bc$.

Je-li navíc $c \neq 0$, pak existuje i limita podílu $\frac{f}{g}$ a platí

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Věta 5.6. (o nerovnosti limit)

Nechť funkce f, g, h mají společný definiční obor D.

1. Když $\forall x \in D : f(x) \leq g(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, potom platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

   Nerovnosti nelze zaměnit za ostré!

2. Když $\forall x \in D : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ a jsou si rovny, potom existuje také $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ a platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Věta 5.7. (omezenost a limita)

Když existuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, potom existuje prstencové okolí $P(x_0, \delta)$ takové, že restrikce funkce f na $P(x_0, \delta)$ je omezená.

Definice 5.8. (jednostranné limity)

Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu zprava $b \in \mathbb{R}$, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$, je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Píšeme

$$b = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+).$$

Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu zleva $b \in \mathbb{R}$, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$, $x_n \to x_0$, je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Píšeme

$$b = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-).$$

Věta 5.9. (nutná a postačující podmínka existence limity)

Funkce f definovaná v okolí bodu x_0 má v tomto bodě limitu právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a tyto limity jsou si rovny, tj. když platí

$$f(x_0-) = f(x_0+).$$

Věta 5.10. (limita složené funkce)

Mějme funkci $h(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$, kde
$f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $H(f) \subset \mathcal{H}$,
a nechť existují

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = b.$$

Je-li splněna alespoň jedna z podmínek:

1. existuje prstencové okolí $P(x_0, \delta)$ bodu x_0 tak, že $f(x) \neq y_0$ pro všechna $x \in P(x_0, \delta) \cap D(f)$,

2. $b = g(y_0)$,

potom existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$.

Definice 5.11. (funkce omezená ve srovnání)

Funkce f se nazývá omezená ve srovnání s funkcí g (g-omezená) pro $x \to x_0$, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a konstanta C taková, že platí

$$|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad x \in I,\ x \neq x_0.$$

Stručně píšeme

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Je-li $g(x) = 1$, pak zápis $f(x) = O(1)$ znamená obyčejnou omezenost funkce f na okolí bodu x_0.

Existuje-li konečná limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, pak $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Je-li $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$, říkáme, že funkce f a g jsou stejného řádu pro $x \to x_0$.

Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, říkáme, že funkce f a g jsou si asymptoticky rovny v bodě x_0 a píšeme

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

5.100. NÁHLEDY ...

Definice 5.101. (Cauchyova definice limity)

Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu $b \in \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x \in D(f): \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Definice 5.102. (Topologická definice limity)

Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ limitu $b \in \mathbb{R}$, když

$$\forall U(b, \varepsilon) \;\; \exists P(x_0, \delta) \;\; \forall x \in D(f): \qquad x \in P(x_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U(b, \varepsilon),$$

kde

$$\begin{aligned} U(b, \varepsilon) &= \{y \in \mathbb{R}: \; |y - b| < \varepsilon\}, \\ P(x_0, \delta) &= \{x \in \mathbb{R}: \; 0 < |x - x_0| < \delta\}. \end{aligned}$$