Kapitola 4.

Funkce

Definice 4.1. (funkce reálné proměnné)

Zobrazení f, které zobrazí množinu $D \subset \mathbb{R}$ na množinu $H \subset \mathbb{R}$ nazveme **funkcí jedné reálné proměnné**.

$$\Big(zapisujeme: \qquad f:\ D \to \mathbb{R}, \quad nebo \quad f:\ D \to H, \quad nebo \quad y = f(x),\ x \in D \qquad \Big)$$

Množinu $D = D(f)$ nazýváme **definičním oborem** a $x \in D(f)$ je **argumentem** resp. **nezávislou proměnnou**.

Množinu $H = H(f)$ nazýváme **oborem hodnot** a $y \in H(f)$ je **obrazem** resp. **funkční hodnotou**.

Definice 4.2. (tabulka základních funkcí)

1. lineární funkce:
$$y = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$
2. kvadratická funkce:
$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$
3. racionální lomená funkce:
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$
4. exponenciální funkce:
$$y = e^x, \qquad \big(\textit{obecně: } y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1\big).$$
5. logaritmická funkce:
$$y = \ln x, \qquad \big(\textit{obecně: } y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1\big).$$
6. funkce goniometrické
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x.$$
7. funkce cyklometrické
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x.$$
8. funkce hyperbolické
$$y = \sinh x, \quad y = \cosh x, \quad y = \operatorname{tgh} x, \quad y = \operatorname{cotgh} x.$$
9. funkce hyperbolometrické
$$y = \operatorname{argsinh} x, \quad y = \operatorname{argcosh} x, \quad y = \operatorname{argtgh} x, \quad y = \operatorname{argcotgh} x.$$
10. funkce celé části argumentu
$$y = [x] = \max\{z \in Z, z \leq x\}.$$
11. funkce absolutní hodnoty
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -x & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$
12. funkce signum
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -1 & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$
13. Dirichletova funkce
$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Definice 4.3. (restrikce funkce)

Funkci g nazveme **restrikcí** funkce f (resp. f nazveme **rozšířením** funkce g) pokud

1. $D(g) \subsetneq D(f)$,
2. $\forall x \in D(g): \quad g(x) = f(x)$.

Definice 4.4. (rovnost funkcí)

Funkce f a g jsou si rovny jestliže

1. $D(f) = D(g)$,
2. $\forall x \in D(f): \ f(x) = g(x)$.

$\Big(\textit{píšeme } f = g \Big)$

Definice 4.5. (algebraické operace s funkcemi)

Nechť funkce f a g mají stejný definiční obor D. Potom definujeme:

1. součet: $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in D$;
2. rozdíl: $(f-g)(x) := f(x) - g(x), \quad x \in D$;
3. součin: $(f \cdot g)(x) := f(x)\, g(x), \quad x \in D$;
4. násobení číslem: $(\alpha\, f)(x) := \alpha\, f(x), \quad x \in D, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Pokud navíc $\forall x \in D$ platí $g(x) \neq 0$, definujeme

5. podíl: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D$.

Definice 4.6. (vlastnosti funkcí)

Nechť je dána funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$, kde $D(f)$ obsahuje alespoň dva body. Funkce f se nazývá

1. rostoucí na $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

2. klesající na $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

3. monotónní na $I \subseteq D(f)$, když je rostoucí nebo klesající na I;

4. ostře rostoucí na $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

5. ostře klesající na $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

6. ostře monotónní na $I \subseteq D(f)$, když je ostře rostoucí nebo ostře klesající na I;

7. konvexní na intervalu $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle :$
   $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$;

8. konkávní na intervalu $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I,\ \forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle :$
   $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$;

9. ostře konvexní na intervalu $I \subseteq D(f)$, když
   $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2,\ \forall \alpha \in (0, 1) :$
   $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$;

10. ostře konkávní na intervalu $I \subseteq D(f)$, když
    $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2,\ \forall \alpha \in (0, 1) :$
    $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$;

11. sudá na symetrické množině $I \subseteq D(f)$, když
    $\forall x \in I :\ f(-x) = f(x)$;

12. lichá na symetrické množině $I \subseteq D(f)$, když
    $\forall x \in I :\ f(-x) = -f(x)$;

13. periodická na $I \subseteq D(f)$, když existuje $T > 0$ takové, že

    (a) $\forall x \in I : x + T \in I,\ x - T \in I$,

    (b) $\forall x \in I : f(x + T) = f(x)$;

14. omezená na $I \subseteq D(f)$, když existuje $K > 0$ takové, že
    $\forall x \in I : |f(x)| \leq K$;
    (shora omezená, když $f(x) \leq K$);
    (zdola omezená, když $f(x) \geq -K$);

15. prostá na $D(f)$, když
    $\forall x_1, x_2 \in D(f) :\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Věta 4.7. (monotónní $\Longrightarrow$ prostá)

Je-li funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ ostře monotónní na $D(f)$, potom je prostá.

Definice 4.8. (rovnice o jedné neznámé)

Mějme funkci f a reálné číslo b.

Úloha najít $x_0 \in D(f)$ takové, že $f(x_0) = b$, se nazývá **rovnice o jedné neznámé** a zapisuje se

$$f(x) = b.$$

Číslo x_0 je **řešení**, nebo také **kořen** rovnice.

Věta 4.9. (řešitelnost rovnic)

Mějme rovnici $f(x) = b$.

(i) Pokud je $b \in H(f)$, má rovnice **alespoň jedno řešení**.

(ii) Pokud je funkce f prostá na $D(f)$, má rovnice **nejvýše jedno řešení**.

(iii) Pokud je splněno (i) a (ii), má rovnice **právě jedno řešení**.

Definice 4.10. (inverzní funkce)

Mějme prostou funkci $f : D(f) \to H(f)$.

Funkci, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje to jediné $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$,
nazýváme **inverzní funkcí** k funkci f a značíme

$$f^{-1} : H(f) \to D(f).$$

$$\left(\textit{píšeme} \quad y = f(x) \ \ a \ \ x = f^{-1}(y) \ \right)$$

Věta 4.11. (existence inverzní funkce)

Je-li funkce $f : D(f) \to H(f)$ ostře rostoucí (resp. ostře klesající),
potom existuje inverzní funkce $f^{-1} : H(f) \to D(f)$.

Definice 4.12. (složená funkce)

Mějme funkce $f(x)$ a $g(x)$ takové, že: $\begin{array}{lccl} f: & D(f) & \to & H(f), \\ g: & D(g) & \to & H(g), \end{array}$ kde $H(g) \subset D(f)$.

Funkce $h(x)$ definovaná předpisem

$$h(x) = f(\, g(x)\,)$$

je **složená funkce** funkcí f a g a platí:

$$h : D(g) \to H(f).$$

Definice 4.13. (lokální extrémy)

Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum** (resp. **lokální maximum**),
když existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) \geq f(x) \ )$$

Funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální minimum** (resp. **ostré lokální maximum**),
když pro všechna $x \neq x_0$ z $U(x_0)$ je

$$f(x_0) < f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) > f(x) \ )$$

Lokální minima a maxima se souhrnně nazývají **lokální extrémy**.

Definice 4.14. (globální extrémy)

Funkce f má v bodě x_0 **globální minimum** (resp. **globální maximum**),
když pro všechna $x \in D(f)$ je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) \geq f(x) \ )$$

Funkce f má v bodě x_0 **ostré globální minimum** (resp. **ostré globální maximum**),
když pro všechna $x \neq x_0$ z $D(f)$ je

$$f(x_0) < f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) > f(x) \ )$$

Globální minima a maxima se souhrnně nazývají **globální extrémy**.