Kapitola 2.
Posloupnosti

Definice 2.1. (posloupnost reálných čísel)

Posloupnost reálných čísel (= reálná posloupnost) je zobrazení, jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot je podmnožina H množiny všech reálných čísel $\mathbb{R}$ ($H \subset \mathbb{R}$):

$$\mathbb{N} \to H : n \mapsto a_n.$$

Budeme zapisovat: $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.
Číslo a_n se nazývá n-tý člen posloupnosti.

Definice 2.2. (operace s posloupnostmi)

Nechť jsou dány posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.
Součtem, rozdílem a součinem daných posloupností nazýváme posloupnosti

$$\{a_n + b_n\}\,, \quad \{a_n - b_n\}\,, \quad \{a_n b_n\}\,.$$

Pokud $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$, podílem posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

Číselný násobek: $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Nulová posloupnost: $\{0, 0, 0, \ldots\}$.

Definice 2.3. (omezená posloupnost)

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá omezená, existuje-li číslo $K > 0$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq K.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá shora (zdola) omezená, existuje-li číslo M (m) takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ b_n \leq M \qquad (\forall n \in \mathbb{N} : \ b_n \geq m).$$

Definice 2.4. (monotónní posloupnost)

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{\text{klesající}}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \geq a_{n+1}, \\ \underline{\text{rostoucí}}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n \leq a_{n+1}, \end{array}\right\} \underline{\text{monotónní}},$$

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{\text{ostře klesající}}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n > a_{n+1}, \\ \underline{\text{ostře rostoucí}}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n < a_{n+1}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{ostře}} \\ \underline{\text{monotónní}}. \end{array}$$

Definice 2.5. (maximum a minimum posloupnosti)

Maximem (minimem, supremem, infimem) posloupnosti $\{a_n\}$ se rozumí maximum (minimum, supremum, infimum) oboru hodnot H této posloupnosti a značí se $\max\{a_n\}$ ($\min\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$).

Definice 2.6. (podposloupnosti)

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $\{k_1, k_2, k_3, \ldots\}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $\{a_{k_n}\}$ se nazývá posloupnost vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ nebo také podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.7. (monotónní podposloupnost)

Z každé posloupnosti v $\mathbb{R}$ lze vybrat monotónní podposloupnost (tj. rostoucí nebo klesající podposloupnost).

Definice 2.8. (limita posloupnosti)

1. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je konvergentní v $\mathbb{R}$, má-li tuto vlastnost:

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

   Číslo a se nazývá limita posloupnosti $\{a_n\}$. Píšeme

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a; \qquad \text{stručně: } a_n \to a,$$

   a říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu (limitě) a.

2. Posloupnost se nazývá divergentní, jestliže není konvergentní.
   Speciálně: Posloupnost $\{a_n\}$ diverguje k $+\infty$ (resp. k $-\infty$), jestliže:

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \Rightarrow a_n > K \qquad (\text{resp. } a_n < K).$$

   Označujeme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), nebo $a_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

Věta 2.9. (jednoznačnost limity)

Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu.

Věta 2.10. (konvergence a omezenost)

1. Každá konvergentní posloupnost je omezená.
2. Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.
   (tzv. Bolzanova-Weierstrassova věta)

Lemma 2.11. (o nerovnosti limit I.)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a nechť pro skoro všechna n je $a_n \leq b_n$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Věta 2.12. (o dvou policajtech)

Mějme posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ a předpokládejme:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro skoro všechna n,
2. $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ konvergují ke stejné limitě a.

Potom *sevřená* posloupnost $\{b_n\}$ také konverguje a platí:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = a.$$

Lemma 2.13. (o nerovnosti limit II.)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n > \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Potom

$$a_n > b_n \quad \text{pro s.v. } n.$$

Věta 2.14. (algebra limit)

Nechť reálné posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní.
Označme

$$a := \lim_{n\to+\infty} a_n, \qquad b := \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Potom i posloupnosti $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ jsou konvergentní a platí:

$$1. \lim_{n\to+\infty} \alpha a_n = \alpha a, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$2. \lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$$

$$3. \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab.$$

Jestliže navíc $b \neq 0$ a $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$, pak $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je také konvergentní a platí:

$$4. \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Věta 2.15. (o divegrentních posloupnostech)

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou reálné posloupnosti.

1. $a_n \to +\infty,\ b_n \to +\infty \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty,\ a_n b_n \to +\infty.$
2. $a_n \to +\infty,\ b_n \to -\infty \Rightarrow a_n - b_n \to +\infty, a_n b_n \to -\infty.$
3. $a_n \to +\infty,\ b_n \to b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a_n + b_n \to +\infty, & \\ a_n b_n \to +\infty, & \text{pokud } b > 0, \\ a_n b_n \to -\infty, & \text{pokud } b < 0. \end{cases}$
4. $a_n \to +\infty,\ \{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$. Pokud navíc

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, c > 0 : 0 < c \leq b_n \\ \exists\, c < 0 : b_n \leq c < 0 \end{array}\right\} \text{ pro s.v. } n \in \mathbb{N}, \text{ potom } a_n b_n \to \left\{\begin{array}{l} +\infty, \\ -\infty. \end{array}\right.$$

5. $a_n \to a \in \mathbb{R},\ |b_n| \to +\infty \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to 0.$
6. $a_n \to a \neq 0,\ b_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty, & \text{pokud } \dfrac{a_n}{b_n} > 0 \text{ pro s.v. } n \in \mathbb{N}, \\ -\infty, & \text{pokud } \dfrac{a_n}{b_n} < 0 \text{ pro s.v. } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Věta 2.16. (konvergence monotónní posloupnosti)

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená a monotónní, potom je konvergentní a konverguje k číslu:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n\} & \text{pro rostoucí posloupnost,} \\ \inf\{a_n\} & \text{pro klesající posloupnost.} \end{cases}$$

Definice 2.17. (Eulerovo číslo)

Eulerovo číslo e je definováno

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Definice 2.18. (horní a dolní limita)

Buď $\{a_n\}$ omezená posloupnost. Označme

$$\alpha_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \quad \beta_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Limitu posloupnosti $\{\alpha_n\}$ (resp. $\{\beta_n\}$) nazýváme <u>dolní</u> (resp. <u>horní</u>) <u>limitou</u> posloupnosti $\{a_n\}$ a píšeme:

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \underline{a},$$

tzv. dolní limita (limes inferior),

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \overline{a},$$

tzv. horní limita (limes superior).

Věta 2.19. (nutná a postačující podmínka konvergence)

Omezená posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a právě tehdy, když její horní limita je rovna její dolní limitě, tj. když $\underline{a} = \overline{a} = a$.

2.100. NÁHLEDY ...

Definice 2.101. (cauchyovská posloupnost)

Reálná posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá cauchyovská v $\mathbb{R}$ (fundamentální v $\mathbb{R}$), jestliže:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n, m \in \mathbb{N}:$
$$n > n_0 \; \wedge \; m > n_0 \; \Rightarrow \; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Lemma 2.102. (cauchyovskost a omezenost)

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, potom je omezená.

Věta 2.103. (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence)

Reálná posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když je cauchyovská v $\mathbb{R}$.