Kapitola 1.

Množiny

1.1. / co je to množina:

Množina M je soubor libovolných navzájem různých objektů m, o kterých lze jednoznačně rozhodnout, zda do množiny patří, či nikoli. Každý z objektů m, který patří do množiny M, se nazývá prvek množiny M (píšeme $m \in M$).
Prázdná množina neobsahuje žádný prvek a značí se $\emptyset$.

1.2. / množinové operace:

Vztahy mezi dvěma množinami A, B:

$A \subset B$	$\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$	„A je podmnožina B“,
$A \not\subset B$	$\Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$	„A není podmnožina B“,
$A = B$	$\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$	„A je rovno B“,
	$\Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$,	
$A \subsetneqq B$	$\Leftrightarrow (A \subset B \wedge A \neq B)$,	„A je vlastní podmnožina B“.

Množinové operace pro množiny A, B:

$A \cap B$	$:= \{\forall x : x \in A \wedge x \in B\}$	„A průnik B“,
	pokud $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že	„A a B jsou disjunktní“,
$A \cup B$	$:= \{\forall x : x \in A \vee x \in B\}$	„A sjednoceno s B“,
A'	$:= \{\forall x : x \notin A\}$	„doplněk množiny A“ (také A^C),
$A - B$	$:= \{\forall x : x \in A \wedge x \notin B\}$	„A mínus B“ (také $A \backslash B$).

1.3. / číselné množiny:

Číselné množiny označujeme:

$\mathbb{N}$	obor (množina všech) přirozených čísel, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel a nuly, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$,
$\mathbb{Z}$	obor celých čísel, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$	obor racionálních čísel, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$,
$\mathbb{R}$	obor reálných čísel, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
$\mathbb{Q}'$	obor iracionálních čísel, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$,
$\mathbb{C}$	obor komplexních čísel, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{a + \mathrm{i}\, b; a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Definice 1.4. (mohutnost množiny)

Množiny A a B se nazývají <u>ekvivalentní</u> (značíme $A \sim B$), jestliže existuje bijektivní (vzájemně jednoznačné) zobrazení $f : A \to B$ takové, že $A = D(f),\ B = H(f)$.
Říkáme také, že množiny A a B mají <u>stejnou mohutnost</u> (též <u>kardinalitu</u>) a píšeme

$$m(A) = m(B) \quad \text{nebo} \quad |A| = |B|.$$

Definice 1.5 (spočetná a nespočetná množina)

Množina A se nazývá

- <u>konečná</u>, je-li $A \sim \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, tj. $m(A) = n$,
  - speciálně definujeme $m(\emptyset) := 0$,
- <u>nekonečná</u>, není-li konečná a dále pak
  - <u>spočetná</u>, je-li $A \sim \mathbb{N}$, tj. $m(A) = m(\mathbb{N})$,
  - <u>nespočetná</u>, není-li ani konečná ani spočetná, tj. $A \not\sim \mathbb{N}$ a $m(A) > m(\mathbb{N})$.

Definice 1.6. (operace v $\mathbb{R}$)

Algebraické operace v $\mathbb{R}$:

sčítání:	$a + b$,
odčítání:	$a - b$,
násobení:	$a \cdot b$,
dělení:	$a : b = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

Vlastnosti operací sčítání a násobení:

komutativnost:	$a + b = b + a$,	$a \cdot b = b \cdot a$,
asociativnost:	$a + (b + c) = (a + b) + c$,	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
neutralita:	$a + 0 = a$,	$a \cdot 1 = a$,
distributivnost:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.	

Uspořádání:

vždy platí právě jedna z relací: $a < b, \quad a = b, \quad a > b$

a dále pak:

$$a < b \wedge b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$
$$a > 0 \wedge b > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b > 0$$
$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c.$$

Definice 1.7. (intervaly)

Intervaly - speciální podmnožiny $\mathbb{R}$:

$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ - uzavřený interval,

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ - otevřený interval,

$(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ - polouzavřený interval,

$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ - polouzavřený interval,

$\langle a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,

$(-\infty, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,

$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

Definice 1.8 (definice absolutní hodnoty)

<u>Absolutní hodnota</u> reálného čísla $x \in \mathbb{R}$ je větší z čísel x a $-x$, tj.

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Lemma 1.9 (vlastnosti absolutní hodnoty)

1. $\forall a \in \mathbb{R}: \, |a| \geq a, \, |-a| = |a|,$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \, |a+b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníková nerovnost),
3. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \, ||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$ (číslo $|a-b|$ se nazývá vzdálenost a a b),
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}: \, |ab| = |a| \cdot |b|,$
5. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \, b \neq 0: \, \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},$
6. $\forall a \in \mathbb{R}: \, |a|^2 = a^2,$
7. $\forall a \in \mathbb{R}: \, \sqrt{a^2} = |a|.$

Definice 1.10. (omezená množina)

Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená zdola, jestliže $\exists\, d \in \mathbb{R}\, \forall x \in A: x \geq d.$

Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená shora, jestliže $\exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall x \in A: x \leq c.$

Množina $A \subset \mathbb{R}$ je omezená, je-li omezená zdola i shora.

Definice 1.11. (minimum a maximum množiny)

Číslo $a \in A$ se nazývá minimem množiny $A \subset \mathbb{R}$, platí-li $\forall x \in A: a \leq x.$

Číslo $b \in A$ se nazývá maximem množiny $A \subset \mathbb{R}$, platí-li $\forall x \in A: x \leq b.$

Značíme $a = \min A$, $b = \max A$.

Definice 1.12. (infimum a supremum množiny)

Nechť A je neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{R}$.

1. Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá supremem množiny A, jestliže
   (a) $\forall x \in A: \; x \leq a$,
   (b) $\forall x_1 \in \mathbb{R}: \; x_1 < a \;\Rightarrow\; \exists x_2 \in A: \; x_2 > x_1$.

   Píšeme $a = \sup A$. Jestliže A není shora omezená, nemá (v $\mathbb{R}$) supremum a píšeme $\sup A = +\infty$.

2. Číslo $b \in \mathbb{R}$ se nazývá infimem množiny A, jestliže
   (a) $\forall x \in A: \; x \geq b$,
   (b) $\forall x_1 \in \mathbb{R}: \; x_1 > b \;\Rightarrow\; \exists x_2 \in A: \; x_2 < x_1$.

   Píšeme $b = \inf A$. Jestliže A není zdola omezená, nemá (v $\mathbb{R}$) infimum a píšeme $\inf A = -\infty$.

Pro prázdnou množinu $\emptyset$ definujeme $\sup \emptyset := -\infty$ a $\inf \emptyset := +\infty$.

Lemma 1.13. (postačující podmínka existence infima a suprema)

Nechť existuje $\max A$ (resp. $\min A$) množiny $A \subset \mathbb{R}$.
Potom $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$).

Věta 1.14. (věta o existenci a jednoznačnosti infima a suprema)

1. Každá neprázdná shora omezená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má právě jedno supremum.
2. Každá neprázdná zdola omezená podmnožina množiny $\mathbb{R}$ má právě jedno infimum.

1.15. / dodefinování suprema a infima:

Množina $A \subset \mathbb{R}$, která není shora omezená, nemá (v $\mathbb{R}$) supremum, píšeme

$$\sup A = +\infty.$$

Množina $A \subset \mathbb{R}$, která není zdola omezená, nemá (v $\mathbb{R}$) infimum, píšeme

$$\inf A = -\infty.$$

Pro prázdnou množinu $\emptyset$ definujeme

$$\sup \emptyset := -\infty, \qquad \inf \emptyset := +\infty.$$

Lemma 1.16. (vlastnosti suprema a infima)

1. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A$ omezená $\Rightarrow \sup A \geq \inf A$.
2. $A \subset B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B$ omezená $\Rightarrow \begin{cases} \sup A \leq \sup B, \\ \inf A \geq \inf B. \end{cases}$

Definice 1.17. (hromadný a izolovaný bod množiny)

Bod x_0 se nazývá hromadný bod množiny A, jestliže v každém jeho okolí

$$U(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta\}$$

leží alespoň jeden bod množiny A různý od x_0.
Bod $x_0 \in A$, který není hromadným bodem množiny A, se nazývá izolovaným bodem množiny A.