

• **integrací per-partes:**

▶  $\int x^n e^{kx} dx, \int x^n \cos \omega x dx, \int x^n \sin \omega x dx,$   $n \in \mathbb{N}, \omega, k \in \mathbb{R},$

▶  $\int x^n \arcsin x dx, \int x^n \arccos x dx, \int x^n \ln x dx,$   
 $\int x^n \operatorname{arctg} x dx, \int x^n \operatorname{arccot} x dx,$   $n \in \mathbb{N}_0,$

▶  $\int e^{\alpha x} \cos \omega x dx, \int e^{\alpha x} \sin \omega x dx,$   $\omega, \alpha \in \mathbb{R},$

▶  $\int \cos^n x dx, \int \sin^n x dx, \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx,$   $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$

▶  $\int \cos ax \cos bx dx, \int \sin ax \cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx,$   $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq \pm b).$

- **integrace racionálních funkcí**  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ :  $P$  a  $Q$  jsou polynomy,  
 $(A, B, D, E, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - 4q < 0),$   
kořeny polynomu  $x^2 + px + q$  jsou komplexní (sdružené),

▶  $\int \frac{A}{x-a} dx,$  substituce  $y = x - a,$

▶  $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$  substituce  $y = x - a,$

▶  $\int \frac{B}{x^2 + px + q} dx,$   $x^2 + px + q$  na úplný čtverec  
a substitucí převod na  $\int \frac{D}{y^2+1} dy,$

▶  $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx,$  převod na  $D \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int \frac{E}{x^2+px+q} dx,$

▶  $\int \frac{B}{(x^2 + px + q)^n} dx, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$   $x^2 + px + q$  na úplný čtverec  
a substitucí převod na  $\int \frac{D}{(y^2+1)^n} dy,$

▶  $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$  převod na  $D \int \frac{f'(x)}{(f(x))^n} dx + \int \frac{E}{(x^2+px+q)^n} dx,$

▶  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_1(x) dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx,$   $\operatorname{st}[P] \geq \operatorname{st}[Q], \operatorname{st}[P_2] < \operatorname{st}[Q],$   
rozklad  $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$  na parciální zlomky.

• **integrály typu**  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ :

- ▶ univerzální substituce  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$   $\left( \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, dx = \frac{2}{1+y^2} dy \right)$ ,
- ▶  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  substituce  $y = \cos x$ ,
- ▶  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  substituce  $y = \sin x$ ,
- ▶  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  substituce  $y = \operatorname{tg} x$ .

• **integrály typu**  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ :  $(m, n \in \mathbb{N}_0)$

- ▶  $m$  je liché  $\vee$   $n$  je liché substituce  $y = \cos x$  pro  $m$  liché,  $y = \sin x$  pro  $n$  liché,
- ▶  $m$  je sudé  $\wedge$   $n$  je sudé užití vzorců  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ,  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

• **integrály typu**  $\int \cos ax \cos bx dx$ ,  $\int \sin ax \cos bx dx$ ,  $\int \sin ax \sin bx dx$ :

$$(a, b \in \mathbb{R}, a \neq \pm b)$$

- ▶ užití vzorců
 
$$\begin{aligned} \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x], \\ \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x], \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [-\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]. \end{aligned}$$

• **integrály typu**  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ :  $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0)$

$(n \in \mathbb{N}$  je nejmenší společný násobek všech odmocnitelů ve vyskytujících se odmocninách)

- ▶ substituce  $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .

• **integrály typu**  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ :  
( $a > 0$ )

- ▶  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$  substituce  $x = a \sin y$  nebo  $x = a \cos y$ ,  
( $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ,  $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ ,  $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ ),
- ▶  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$  substituce  $x = a \sinh y$ ,  
( $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ,  $\sinh^2 y + \cosh^2 y = \cosh 2y$ ),
- ▶  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$  substituce  $x = a \cosh y$ ,  
( $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ,  $\sinh^2 y + \cosh^2 y = \cosh 2y$ ).

• **některé rekurentní formule:**  $(n \in \mathbb{N})$

- ▶  $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ ,  $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$ ,
- ▶  $I_n = \int \cos^n x dx$ ,  $I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x + \frac{n+1}{n+2} I_n$ ,
- ▶  $I_n = \int \sin^n x dx$ ,  $I_{n+2} = -\frac{1}{n+2} \sin^{n+1} x \cos x + \frac{n+1}{n+2} I_n$ .