Kapitola 9. Taylorův polynom

Karta 9.0.' (karta - Taylorův polynom)

1.	e^x	$=$	$1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty < x < +\infty$
2.	e^{-x}	$=$	$1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty < x < +\infty$
3.	$\sin x$	$=$	$x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dfrac{x^9}{9!}+\dots$	$-\infty < x < +\infty$
4.	$\cos x$	$=$	$1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}+\dots$	$-\infty < x < +\infty$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
100.	$\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$	$=$	$x-\dfrac{x^3}{3\cdot 1!}+\dfrac{x^5}{5\cdot 2!}-\dfrac{x^7}{7\cdot 3!}+\dfrac{x^9}{9\cdot 4!}+\dots$	$-\infty < x < \infty$
101.	$\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$	$=$	$x-\dfrac{x^3}{3\cdot 3!}+\dfrac{x^5}{5\cdot 5!}-\dfrac{x^7}{7\cdot 7!}+\dfrac{x^9}{9\cdot 9!}+\dots$	$-\infty < x < \infty$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Definice 9.1. (Taylorův polynom)

Pro funkci f a bod c se polynom

$$f(c)+f'(c)\,(x-c)\;+\;\frac{1}{2}f''(c)\,(x-c)^2\;+\;\frac{1}{6}f'''(c)\,(x-c)^3\;+\cdots+\;\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

nazývá **Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě c** a značí se $T_n(x)$.

Pro dané $n\in\mathbb{N}$ se funkce $f(x)-T_n(x)$ se nazývá **zbytek** a značí $R_n(x)$.

Věta 9.2. (Taylorova věta)

Nechť $f \in C^{n+1}\langle c, x\rangle$. Potom existuje $\xi \in (c, x)$ takové, že

$$R_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)\ (x-c)^{n+1} & \dots\ \textbf{Lagrangeův tvar zbytku}\text{, nebo} \\ \dfrac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)\ (x-\xi)^{n}\ (x-c) & \dots\ \textbf{Cauchyův tvar zbytku}\text{, nebo} \\ \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_c^x f^{(n+1)}(t)\ (x-t)^n \, \mathrm{d}t & \dots\ \textbf{integrální tvar zbytku}. \end{cases}$$

Věta 9.3. (konvergence zbytků)

Nechť $f \in C^{\infty}\langle c, x\rangle$ a existuje $M > 0$ takové, že

$$|f^{(n)}(t)| \leq M \qquad \text{pro všechna } n \geq 0 \text{ a všechna } t \in \langle c, x\rangle.$$

Potom $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(t) = 0$ pro všechna $t \in \langle c, x\rangle$.

9.100. NÁHLEDY ...