Kapitola 8. Integrály - určité

Karta 8.0.' (karta - určité integrály)

...

Definice 8.1. (dělení intervalu)

Dělením intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme konečnou posloupnost bodů z tohoto intervalu, které splňují podmínku:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tuto posloupnost značíme symbolem $D_n = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definice 8.2. (integrální součty)

Nechť D_n je dělení intervalu $I = \langle a,b\rangle$ a nechť f je funkce omezená na tomto intervalu.
Označme $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ a $I_k = \langle x_{k-1}, x_k\rangle$.

Dolním integrálním součtem nazveme číslo: $$s(f,D_n) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in I_k}\{f(x)\} \cdot \Delta x_k$$

Horním integrálním součtem nazveme číslo: $$S(f,D_n) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in I_k}\{f(x)\} \cdot \Delta x_k$$

Definice 8.3. (RIEMANNŮV INTEGRÁL)

Nechť f je funkce definovaná a omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$.
Uvažujme všechna dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a s jejich pomocí sestrojme

- množinu hodnot všech dolních integrálních součtů.
- množinu hodnot všech horních integrálních součtů.

Jestliže se supremum množiny dolních integrálních součtů rovná infimu množiny horních integrálních součtů, říkáme jejich společné hodnotě **Riemannův integrál** funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ a píšeme

$$\sup_{D_n} s(f,D_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{D_n} S(f,D_n).$$

Funkci f nazveme **Riemannovsky integrovatelnou** (integrovatelnou) na $\langle a,b\rangle$ a píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.
Číslo a nazveme **dolní mez** integrálu.
Číslo b nazveme **horní mez** integrálu.

Chceme-li zdůraznit, že uvažujeme integrál ve smylu Riemannovy definice, píšeme: $(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice 8.3". (doplnění definice)

Pro integrovatelnou funkci f na intervalu $\langle a,b\rangle$, kde $a<b$, definujeme:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{a} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.4. (integrál a obsah plochy)

Nechť $f(x) \geq 0$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Potom je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

číselně roven obsahu plochy obrazce, jehož obvod tvoří: osa x,
graf funkce $y = f(x)$,
rovnoběžky s osou y o rovnicích $x = a$ a $x = b$.

Věta 8.5. (podmínky integrovatelnosti)

Nechť f a g jsou funkce definované na intervalu $\langle a, b\rangle$.

1. Jestliže f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom je zde integrovatelná.
2. Jestliže f je omezená na $\langle a, b\rangle$ a obsahuje nejvýše konečný počet bodů nespojitosti, potom je na $\langle a, b\rangle$ integrovatelná.

$$\Big(\textit{v obou případech pak píšeme } f \in \mathcal{R}\,(\,\langle a, b\rangle\,) \Big)$$

3. Jestliže f a g jsou integrovatelné, potom jsou integrovatelné také funkce

$$\alpha f, \quad |f|, \quad f+g, \quad fg, \qquad \textit{kde } \alpha \textit{ je reálná konstanta,}$$

$$\frac{f}{g}, \qquad \begin{array}{rl} \textit{pokud} & 0 < m \leq g(x), \textit{kde } m \textit{ je kladná konstanta,} \\ \textit{nebo} & 0 > m \geq g(x), \textit{kde } m \textit{ je záporná konstanta.} \end{array}$$

Věta 8.6. (NEWTONOVA-LEIBNIZOVA VĚTA)

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a nechť jsou obě funkce spojité na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\Big(\textit{výpočet nezávisí na výběru primitivní funkce} \Big)$$

Věta 8.7. (linearita a aditivita)

Pro integrovatelné funkce f a g na $\langle a, b\rangle$ platí:

i) $\displaystyle\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{kde } \alpha \textit{ je reálná konstanta,}$

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{kde } a < c < b.$

Věta 8.8. (per partes v určitém integrálu)

Pro funkce u a v, které mají na $\langle a,b\rangle$ spojité první derivace u' a v', platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Věta 8.9. (substituce v určitém integrálu)

Nechť a) funkce $\varphi(t)$ má spojitou první derivaci $\varphi'(t)$ na intervalu (α,β)

b) funkce $f(x)$ je spojitá na $H(\varphi)$

c) $a=\varphi(\alpha)$ a $b=\varphi(\beta)$.

Potom pro $x\in(a,b)$ a $t\in(\alpha,\beta)$ platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} x \;=\; \varphi(t) \\ \mathrm{d}x \;=\; \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta) \end{array}\right| = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

8.10. věta o střední hodnotě a její důsledky

Věta 8.10. (věta o střední hodnotě)

Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$.
Potom existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že platí

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{resp.} \qquad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Věta 8.10.A. (pozitivnost integrálu)

Nechť $f(x)\ge 0$ je spojitá funkce na $\langle a,b\rangle$.
Potom

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$$

Jestliže navíc existuje $x\in\langle a,b\rangle$ takové, že $f(x)>0$, platí pro výše uvedený integrál ostrá nerovnost.

Věta 8.10.B. (porovnání integrálů)

Nechť $f(x)\ge g(x)$ jsou spojité funkce na $\langle a,b\rangle$.
Potom

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže navíc existuje $x\in\langle a,b\rangle$ takové, že $f(x)>g(x)$, platí pro výše uvedené integrály ostrá nerovnost.

Věta 8.10.C. (integrál z absolutní hodnoty)

Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže navíc funkce $f(x)$ mění na $\langle a, b\rangle$ znaménko, platí pro výše uvedený integrál ostrá nerovnost.

Věta 8.10.D. (sevření integrálu)

Nechť $m \leq f(x) \leq M$, kde $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Potom

$$m\,(b-a) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; M\,(b-a).$$

Věta 8.11. (Integrál s proměnnou horní mezí)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na $\langle a, b\rangle$.
Potom je funkce definovaná předpisem:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

spojitou funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Navíc v každém bodě x, ve kterém je funkce $f(x)$ spojitá, je $G(x)$ diferencovatelná a platí:

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

$$\left(\textit{Analogicky pro } H(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t, \textit{ platí:} \quad H'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x). \right)$$

8.3. Nevlastní integrály

Definice 8.24. (nevlastní integrál vlivem funkce I.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, c\rangle$, kde $a < c < b$ a nechť $f(x)$ není omezená na $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní interál vlivem funkce je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže existuje limita

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{a píšeme: } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže neexistuje limita

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Pokud je příslušná limita $+\infty$ (resp. $-\infty$) a píšeme: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Definice 8.25. (nevlastní integrál vlivem funkce II.)

Nechť $f(x)$ není omezená v okolí bodu c, kde $a < c < b$.

Nevlastní interál vlivem funkce je integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže konvergují oba integrály

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže diverguje alespoň jeden z výše uvedených integrálů.

Definice 8.26. (nevlastní integrál vlivem meze I.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní interál vlivem meze je integrál

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže existuje limita

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{a píšeme: } \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže neexistuje limita

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Pokud je příslušná limita $+\infty$ (resp. $-\infty$) a píšeme: $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Definice 8.27. (nevlastní integrál vlivem meze II.)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nevlastní interál vlivem meze je integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o kterém řekneme, že:

1. **konverguje** (je konvergentní), jestliže pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **diverguje** (je divergentní), jestliže diverguje alespoň jeden z výše uvedených integrálů.

Definice 8.28. (valeur principale)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle -a, a\rangle$.

Hlavní hodnotou (**valeur principale**) nevlastního integrálu je integrál:
(pokud limita existuje)

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.100. NÁHLEDY ...

Věta 8.101. (srovnávací kritérium)

Nechť $0 \le f(x) \le g(x)$ na intervalu (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$. Potom platí:

1. Konverguje-li $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, konverguje také $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Diverguje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, diverguje také $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 8.102. (integrální kritérium pro řady)

Nechť $f(x) \ge 0$ je klesající funkce definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$.
A nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $a_n = f(n)$.

Potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a integrál $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ buď současně konvergují nebo současně divergují.

Věta 8.103. (kritérium divergence)

Nechť $f(x)$ je integrovatelná v každém intervalu $\langle 0, b\rangle$. Jestliže

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{a nebo} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existuje, ale je různá od nuly,}$$

potom nevlastní integrál $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.