Kapitola 6. Derivace

Karta 6.0.' (karta - derivace)

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
k (konst.)	0	$k \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in (0, +\infty)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha . x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{cotgh} x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Věta 6.5. (Fermatova nutná podmínka)

Jestliže f nabývá lokálního extrému v bodě, ve kterém existuje derivace, potom musí být derivace rovna nule.

$$\exists\, f'(c) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) \neq \min f(x) \qquad \left(f(c) = \min f(x) \quad \cancel{\Longrightarrow} \quad \exists f'(c) \right)$$

Věta 6.6 . (Rolleova věta)

Nechť

i) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,

ii) $f'(x)$ existuje v každém bodě $x \in (a, b)$,

iii) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 6.7. (Lagrangeova věta)

Nechť

i) f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,

ii) $f'(x)$ existuje v každém bodě $x \in (a, b)$.

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Věta 6.8. (Cauchyova věta o střední hodnotě)

Nechť

1. f a g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$,
2. v každém bodě $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$ a $g'(x)$ je vlastní a nenulová.

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Věta 6.9. (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť pro f a g platí, že

i) existuje $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: L$,

ii) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ je typu „$\dfrac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$".

Potom $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

$$\exists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \left(\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \not\Rightarrow \nexists \lim \frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

Definice 6.10. (derivace vyššího řádu)

Funkce f **má v bodě c druhou derivaci**, jestliže existuje

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

Tuto limitu značíme:

$$f''(c), \quad f''(x)|_{x=c}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c), \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x)|_{x=c}.$$

Zobrazení, které bodu x přiřazuje vlastní druhou derivaci $f''(x)$, se nazývá **druhá derivace funkce f** a značí se f'' nebo $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Věta 6.11. (o druhé derivaci)

i) Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, potom má f v bodě c ostré lokální minimum,

ii) Jestliže $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, potom má f v bodě c ostré lokální maximum,

iii) Funkce f je konvexní na (a, b) právě tehdy, když $f''(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$,

iv) Funkce f je konkávní na (a, b) právě tehdy, když $f''(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$,

v) Jestliže $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je ostře konvexní na (a, b),

vi) Jestliže $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, potom funkce f je ostře konkávní na (a, b).

Definice 6.12. (různé množiny funkcí)

$C(a,b)$	je množina všech funkcí, které jsou spojité na intervalu (a,b),
$C^1(a,b)$	je množina všech funkcí, jejichž derivace je spojitá na (a,b),
$C^n(a,b)$	je množina všech funkcí, jejichž n-tá derivace je spojitá na (a,b),
$C^\infty(a,b)$	je množina všech funkcí, jejichž derivace libovolného řádu je spojitá na (a,b).

Uvažujeme-li v krajích bodech spojitost i derivace jednostranně, píšeme $C\langle a,b\rangle$, $C^n\langle a,b\rangle$, apod.

6.100. NÁHLEDY …