Kapitola 2. Řady

Karta 2.0.' (karta - řady)

▷ některé **konvergentní řady**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

▷ některé **divergentní řady**:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n,$$

▷ **geometrická řada**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots \begin{cases} = \dfrac{1}{1-q} & \text{pro} \quad |q| < 1, \\ = +\infty & \text{pro} \quad q \geq 1, \\ \text{diverguje} & \text{pro} \quad q \leq -1, \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \begin{cases} n & \text{pro } q = 1, \\ \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } q \neq 1. \end{cases}$$

▷ a další...

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konverguje pro} & \alpha > 1, \\ \text{diverguje pro} & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Definice 2.1. (číselná řada)

Mějme posloupnost reálných čísel (a_n).

Nekonečná řada je symbol $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kterým označujeme výraz: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Posloupnost částečných součtů řady je posloupnost (s_n), kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Čísla a_n jsou **členy řady**, čísla s_n jsou **částečné součty řady**.

(*nemůže-li dojít k záměně, připouštíme zápis* $\sum a_n$)

Definice 2.2. (konvergentní a divergentní řada)

Řadu $\sum a_n$ nazveme **konvergentní**, je-li konvergentní její posloupnost částečných součtů (s_n).

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = S, \quad \textit{kde } S \textit{ nazýváme součet řady} \right)$$

Řadu $\sum a_n$ nazveme **divergentní**, je-li divergentní její posloupnost částečných součtů (s_n).

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \textit{diverguje}, \quad \textit{případně} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty \right)$$

Věta 2.3. (operace s řadami)

Je-li $\sum a_n = a, \quad \sum b_n = b, \quad a, b \in \mathbb{R}^*, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ potom

$$\sum \left(\alpha\, a_n + \beta\, b_n\right) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n = \alpha\, a + \beta\, b,$$

pokud výraz $\alpha\, a + \beta\, b$ není neurčitým výrazem.

Věta 2.4. (nutná podmínka konvergence)

Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Věta 2.5. (srovnávací kritérium)

Mějme dvě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 \le a_n \le b_n$.

Potom

i) když konverguje $\sum b_n$, konverguje také $\sum a_n$,

ii) když diverguje $\sum a_n$, diverguje také $\sum b_n$.

Řadě $\sum b_n$ říkáme **majoranta** řady $\sum a_n$, řadě $\sum a_n$ říkáme **minoranta** řady $\sum b_n$.

Věta 2.6. (limitní srovnávací kritérium)

Mějme dvě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \ge 0$ a $b_n > 0$.

Pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$, potom

$$\sum a_n \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \sum b_n \text{ konverguje},$$

$$\sum a_n \text{ diverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \sum b_n \text{ diverguje}.$$

Věta 2.7. (limitní d'Alembertovo kritérium)

Mějme řadu $\sum a_n$ s kladnými členy a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Potom

i) je-li $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje,

ii) je-li $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada $\sum a_n$ diverguje.

Věta 2.8. (limitní Cauchyovo kritérium)

Mějme řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Potom

i) je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje,

ii) je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada $\sum a_n$ diverguje.

2.100. NÁHLEDY ...