Ukázkové příklady ke zkoušce z LA

1. Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 14x_5 &= -12 \\ -x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 10x_5 &= -7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 8x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 16x_5 &= 2. \end{aligned}$$

2. Určete všechna řešení soustavy rovnic v závislosti na parametru p.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 10x_4 - 4x_5 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + (2p+1)x_4 + px_5 &= p - 4. \end{aligned}$$

3. Určete matici X tak, aby platila rovnost

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Určete, pro které hodnoty p platí rovnost

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & p & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & p & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = -97.$$

5. Určete vlastní čísla, vlastní vektory a Jordanův kanonický tvar matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Podprostor V prostoru $\mathcal{P}_4$ je generován prvky $p_1 = 2x^3 + x + 2$, $p_2 = 2x^4 - x^3 + 2x$, $p_3 = 4x^4 + 4x^3 + 7x + 6$, $p_4 = x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$. Určete dimenzi a bázi V. Ukažte, že prvek $u = 5x^4 + 3x^2 + 13x + 7 \in V$ a určete $\widehat{u}$ souřadnice prvku u v bázi V.

7. Lineární zobrazení $L\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dáno předpisem

$$L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a + 2b + c, d - c, a + 2b + d]^T.$$

Určete dimenzi a bázi jádra $\mathrm{Ker}L$ a obrazu $\mathrm{Im}L$.

8. Lineární zobrazení $L\colon \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dáno předpisem

$$L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a + 2b + c, d - c, a + 2b + d]^T.$$

Určete matici A tohoto lineárního zobrazení v bázích
$p_1(x) = x^3,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1$ prostoru $\mathcal{P}_3$,
$v_1 = [1,1,1]^T,\ v_2 = [2,3,1]^T,\ v_3 = [1,2,1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_3$.

9. V prostoru $\mathcal{P}_2$ jsou dány báze $f_1 = x^2 + 2x,\ f_2 = x + 2,\ f_3 = 2x^2 + 1$ a báze $g_1 = 3x^2 + 2x - 1,\ g_2 = -x^2 + 3x + 2,\ g_3 = 2x^2 - x + 3$.
Určete matici přechodu od báze f_1, f_2, f_3 k bázi g_1, g_2, g_3. Pro prvek $p = 11x^2 - 7x + 4$ určete $\widehat{p}$ souřadnice prvku p v bázi f_1, f_2, f_3 a $\tilde{p}$ souřadnice prvku p v bázi g_1, g_2, g_3. Napište vztah, který platí pro souřadnice $\widehat{p}$ a $\tilde{p}$. Tento vztah ověřte.

10. Určete dimenzi a ortogonální bázi vektorového prostoru V generovaného prvky $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x^3 + x,\ f_3(x) = 2x - 3,\ f_4(x) = x^3 + 3x - 2$ při skalárním násobení $(g, h) = \displaystyle\int_1^2 g(x)h(x)\ \mathrm{d}x$.

11. Ukažte, že množina $V = \{\ [a + b, a - 2b, b + c, a + c]^T\ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ je podprostor prostoru $\mathbb{R}_4$. Určete dimenzi podprostoru V a ortogonální bázi V při skalárním násobení $(u, v) = u^T v$.

12. Určete ortogonální průmět vektoru $b = [-3, 4, -2, 1, 6]^T$ do podprostoru V generovaného prvky $v_1 = [2, 1, -1, 3, -2]^T$, $v_2 = [-1, 2, 3, 1, 1]^T$, $v_3 = [1, 0, -1, 1, 1]^T$, $v_4 = [0, 2, 2, 2, 2]^T$ při skalárním násobení $(x, y) = x^T y$.

13. Určete ortogonální průmět prvku $f(x) = \ln x$ do podprostoru $\mathcal{P}_1$ (to jsou polynomy do stupně 1) při skalárním násobení $(h, g) = \displaystyle\int_1^2 h(x)g(x)\mathrm{d}x$.

14. Metodou nejmenších čtverců určete polynom stupně 2, který nejlépe aproximuje naměřené hodnoty

x	-1	0	0	1	2
y(x)	-4,5	0,5	-1	-1,5	-0,5

15. Vektory $u_1 = [1, 2, -1, 3, 4, 1, -1]^T$, $u_2 = [-2, 1, 1, -1, 2, 1, 0]^T$, $u_3 = [0, 1, 2, -1, -3, 2, 1]^T$, $u_4 = [-1, 4, 2, 1, 3, 4, 0]^T$, $u_5 = [-1, 3, 0, 2, 6, 2, -1]^T$ generují podprostor $\mathcal{U}$ prostoru $\mathbb{R}_7$. Určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{U}$ a ortogonálního doplňku $\mathcal{U}^\perp$ podprostoru $\mathcal{U}$ v prostoru $\mathbb{R}_7$ při skalárním násobení $(u, v) = u^T v$.

16. Určete inercii a definitnost kvadratické formy

$$\kappa(x) = 20x_1^2 + 14x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 - 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

Kvadratickou formu κ napište ve tvaru lineární kombinace čtverců souřadnic $\tilde{x}$ a napište vztah mezi souřadnicemi $\tilde{x}$ a x.