# Lineární algebra

11.týden zápočet (12b. z 20b.)

## Polynomy

$\sqrt{x+3} = 3-x$ ZK: $\sqrt{1+3} = 3-1$ - je řešení

$x+3 = 9-6x+x^2$ $\sqrt{6+3} = 3-6$ - není řešení

$7x-x^2-6=0$

$x^2-7x+6=0$

$\underline{x_1=1}$ $x_2=6$

### Nerovnice

Př $\frac{2x-1}{x+3} \leq 1$

$\frac{2x-1}{x+3} - 1 \leq 0$

$\frac{2x-1-x-3}{x+3} \leq 0$

$\frac{x-4}{x+3} \leq 0$

| | -3 | 4 | |
|---|---|---|---|
| - | - | + | ~~2x-1~~ x-4 |
| - | + | + | x+3 |
| ⊕ | ⊖ | ⊕ | |

Př $\frac{(2x-1)(x+3)}{(2-x)(x+1)} \geq 0$

| nb: | -3 | -1 | $\frac{1}{2}$ | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x-1 | - | - | - | + | + |
| x+3 | - | + | + | + | + |
| 2-x | + | + | + | + | - |
| x+1 | - | - | + | + | + |
| | ⊖ | ⊕ | ⊖ | ⊕ | ⊖ |

$R \in \langle -3; -1) \cup \langle \frac{1}{2}; 2)$

Př $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0 \quad /:x^2$

$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$

$6x^2+\frac{6}{x^2}+5x+\frac{5}{x}-38=0$

$6(x^2+\frac{1}{x^2})+5(x+\frac{1}{x})-38=0$ $y=(x+\frac{1}{x})$

$6(y^2-2)+5y-38=0$

$6y^2-12+5y-38=0$ $(x+\frac{1}{x})^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow y^2-2$

$6y^2+5y-50=0$

$D=25-4.6.(-50)$

$D=25+1200$

$D=1225 = \sqrt{D}=35$

$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 35}{12} = \begin{cases} y_1 = \frac{30}{12} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ y_2 = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3} \end{cases}$

$y = x+\frac{1}{x}$

$\frac{5}{2} = x+\frac{1}{x}$

$5x = 2x^2+1$

$2x^2-5x+2=0$

$D=25-4.2.2$

$D=25-16$

$D=9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Literatura: Lineární Algebra, Tosková

# Polynomy (mnohočlen)

- Definice: Nechť $C$ je těleso (komplexních) čísel $a_0, a_1 \dots a_n \in C$, $a_n \neq 0$.
Funkce $p: C \to C$ definovaná předpisem:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

se nazyzá polynom, číslo $\underline{n}$ jeho stupeň, čísla $a_n, a_{n-1}, \dots a_0$ koeficienty, číslo $a_n$ vedoucí koeficient a $a_0$ absolutní člen.

Polynom $p(x) = 0$ se nazývá nulový polynom, jeho stupeň se nedefinuje.

- Definice: Číslo $c \in C$ se nazývá kořen polynomu $p(x)$, jestliže $p(c) = 0$

- Věta: Základní věta ~~polyno~~ algebry
Každý polynom ~~se~~ stupně alespoň 1 má v $C$ alespoň jeden kořen.

**Operace s polynomy** (sčítání, násobení, dělení)

- sčítání: $st(p+q) \leq \max\{st(p); st(q)\}$
$st(p \cdot q) = st(p) + st(q)$

- věta: O dělení polynomů, o dělení se zbytkem

$27 : 7 = 3\ (6)$
$p(x) : q(x) = t(x)\ (r(x))$

$p(x)$ - dělenec
$q(x)$ - dělitel
$t(x)$ - (částečný) podíl
$r(x)$ - zbytek

Jestliže $r(x) = 0$, říkám, že polynom $p(x)$ je dělitelný polynomem $q(x)$

- Věta: $c \in C$ je kořen polynomní $p(x)$ právě když $p(x)$ je dělitelný polynomen $(x-c)$

$$p(x) = (x-c)\,q(x); \quad st(q) = st(p) - 1$$

$$p(x) = p_1(x)(x-c_1) \qquad p_1(x) = p_2(x)(x-c_2)$$
$$= p_2(x)(x-c_1)(x-c_2)$$
$$= p_3(x)(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$$

$$5x^5 - x^4 + 3x^3 - x + 4$$
$$p_5 \to 5(x-c_1) \quad (x-c_5)$$

- Věta: Každý polynom lze v $C$ vyjádřit ve tvaru $p(x) = a_n(x-c_1)(x-c_2)(x-c_n)$, kde $c_1, c_2 \dots c_n$ jsou (ne nutně různé) kořeny $p(x)$

- Definice: Násobnost kořene $c$ je číslo $\underline{k}$ takové, že $p(x)$ je dělitelný $(x-c)^k$ a není dělitelný $(x-c)^{k+1}$

$$3(x-1)^3(x+2)^2(x-4) = 0$$

- Důsledek: Rozklad polynomu na kořenové činitele
Nechť $c_1 \dots c_s$ jsou <u>různé</u> kořeny polynomu $p(x)$, nechť $k_1 \dots k_s$ jsou jejich násobnosti, pokm

$$p(x) = a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}(x-c_s)^{k_s}$$

- Tvrzeni: Nechť $p(x)$ je polynom s reálnými koeficienty, nechť $z \in \mathbb{C}$ je jeho kořen. Potom $\overline{z}$ je také jeho kořen

$$z = (2+3i) \quad \overline{z} = (2+3i) \quad \text{- čísla komplexně sdružené}$$

$$p(z) = 0$$
$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots a_1 z + a_0 = 0$$

$$p(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = \overline{a_n z_n} + \overline{a_{n-1} z_{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$$
$$= \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

$$z = a+bi$$
$$\overline{z} = a-bi$$
$$z + \overline{z} = 2a$$
$$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$

$$p(x) = q(x)(x-c_1)\dots(x-c_n)$$

$$q(x) = (x-z_1)(x-\overline{z}_1)\, q_1(x) = (x^2 + ax + b_1)\, q_1(x)$$

- Důsledky: ① Reálný polynom lze rozložit na součin reálných polynomů stupně nejvýše 2
  ② $(x-z)(x-\overline{z})$ je polynom s reálnými koeficienty

- Racionální: $x^2 - 2 = 0 \quad (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

---

PRAXE

$$p(x) = q(x)(x-c) + p(c)$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \dots + q_2 x^2 + q_1 x\ q_0$$
$$\cdot (x-c) + p(c)$$

$x^n$: $a_n = q_{n-1}$

$x^{n-1}$: $a_{n-1} = q_{n-2} - c q_{n-1}$

$x^{n-2}$: $a_{n-2} = q_{n-3} - c q_{n-2}$

$x^2$: $a_2 = q_1 - c q_2$

$x$: $a_1 = q_0 - c q_1$

$x^0$: $a_0 = p(c) - c q_0$

Horneho schema

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | | $a_1$ | $a_0$ |
| | | $cq_{n-1}$ | $cq_{n-2}$ | | $cq_1$ | $cq_0$ |
| $c$ | $q_{n-1}$ | $q_{n-2}$ | $q_{n-3}$ | | $q_0$ | $\boxed{p(c)}$ |

**Př.:** $x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 5x + 7 \qquad c = 2$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | 0 | 3 | -5 | 7 |
| | | 2 | -8 | -8 | -10 | -30 |
| 2 | 1 | -2 | -4 | -5 | -15 | $\boxed{-23}$ |

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_1, x_2$$
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \qquad x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 . x_2 = q$$

- pro kvadratickou rovnici

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$a_0 = (-1)^n x_1 . x_2 \dots x_n$$ - absolutní člen součin kořenů

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$(-1)^n x_1 x_2 \dots x_n = \frac{a_0}{a_n}$$

když existuje

$$a_{n-2} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

## TEORIE

- Věta: Nechť $a(x)$ je polynomem s celočíselnými koeficienty, nechť $a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, nechť $c = p/q$ je jeho racionální kořen. Potom $p / a_0$ ; $q / a_n$
- Důsledek: Nechť navíc $a_n = 1$ potem jedinými racionálními koeficienty mohou být celá čísla.

$$2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 7x - 12$$

$$p = \pm 1, 2, 3, 4, 6, 12 \qquad \frac{p}{q} = \pm 1, 2, 3, 4, 6, 12, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \dots$$
$$q = 1, 2$$

## PRAXE

Př: $$x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 15x + 18$$
$$p = \pm 1, 2, 3, 6, 9, 18$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -6 & 11 & 15 & 18 \\ & & 2 & -2 & -16 & -10 & 10 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -8 & -5 & 5 & 28 \end{array}$$
↖ není kořen

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -6 & 11 & 15 & 18 \\ & & 3 & 0 & -18 & -21 & -18 \\ \hline 3 & 1 & 0 & -6 & -7 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$
↖ kořen

↓ doplním kořen, vydělím původní a zredukuje kořeny ... ↑

$$= (x-3)(x^4 - 6x^2 - 7x - 6)$$
$$p = \pm 1, 2, 3, 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -6 & -7 & -6 \\ & & 3 & 9 & 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= (x-3)(x-3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$$
$$p = -1, -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & -2 & -2 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$= (x-3)(x-3)(x-2)(x^2 + x + 1)$$ ← reálný rozklad

# Vektorový Prostor

-Definice: Neprázdná množina L se nazývá (lineární) vektorový prostor nad tělesem T, jestliže:

-D1: Ke každým dvěma prvkům $\vec{a}, \vec{b} \in L$ je přiřazen jednoznačně prvek $\vec{a} + \vec{b} \in L$ zvaný součet

-D2: Každému prvku $\vec{a} \in L$ a $\lambda \in T$ je jednoznačně přiřazen prvek $\lambda\vec{a} \in L$

-S1: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

-S2: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

-S3: existuje $\vec{o} \in L$, $\forall \vec{a} \in L: \vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$ (nulový)

-S4: $\forall \vec{a} \in L$ existuje prvek $-\vec{a} \in L$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$, Prvek $-\vec{a}$ se nazývá opačný

-N1: $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$

-N2: $\lambda(\vec{a_1} + \vec{a_2}) = \lambda\vec{a}_1 + \lambda\vec{a_2}$

-N3: $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2 a)$

-N4: $1 . \vec{a} = \vec{a}$

-Pozn: Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory, vektor $\vec{o}$ nulový

-Pozn: Množina s operací splňující vlastnosti S2, S3, S4 se nazývá grupa, pokud navíc platí S1, pak komutativní (Abelova) grupa.

$R^n: \vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_n)$

## PŘÍKLADY

$P_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

**P** - prostor všech polynomů

**Π** - prostor všech množin

**C**(<a,b>) - prostor všech funkcí (spojitá fce + spojitá fce = spojitá fce)

## TEORIE

- **Věta**: Ve vektorovém prostoru platí:

① existuje právě 1 nulový vektor
② je-li $\vec{u}+\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$, pak $\vec{v}=\vec{w}$
③ ke každému vektoru existuje právě 1 opačný vektor
④ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w} \Rightarrow \vec{u}=\vec{w}+(-\vec{v})$
⑤ $0.\vec{v}=\vec{o}$ $\lambda\vec{o}=\vec{o}$
⑥ $-\vec{v}=(-1)\vec{v}$
⑦ je-li $\lambda\vec{v}=\vec{o}$ potom $\lambda=0$ nebo $\vec{v}=\vec{o}$

- Máme rovinu určenou:

$\vec{s_1}=(1;3-2)$
$\vec{s_2}=(-2,1,4)$ } součet i násobek vektorů stále leží v rovině (množině) $\downarrow$ DEF

- **Definice**: Nechť $V$ je vektorový prostor. Množina $\emptyset \neq V' \subset V$ se nazývá <u>podprostor</u> prostoru $V$, jestliže:

Ⓘ $\vec{v},\vec{w}\in V' \Rightarrow \vec{v}+\vec{w}\in V'$

Ⓘⓘ $\forall\vec{v}\in V'\ \forall\lambda\in T;\ \lambda\vec{v}\in V'$

= Pozorování: V každém podprostoru musí existovat 0 vektor.

- **Definice**: Nechť $\vec{v_1},\vec{v_2}\ldots\vec{v_n}\in V$; $\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_n\in T$. Vektor $\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\ldots+\lambda_n\vec{v_n}$ se nazývá <u>lineární kombinace</u> vektorů $\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots\vec{v_n}$.

Jestliže pro alespoň jedno <u>i</u> je $\lambda_i\neq 0$ potom se lineární kombinace nazývá <u>netriviální</u>, v opačném případě <u>triviální</u>

Vektory $\vec{v_1},\vec{v_2}\ldots\vec{v_n}$ se nazývají <u>lineárně závislé</u>, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace taková, že:

$$\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\ldots+\lambda_n\vec{v_n}=\vec{o}.$$

Vektory, které nejsou lineárně závislé se nazývají <u>l. nezávislé</u>

## PŘÍKLADY

(2a)

$a(2;1;-3;-1)+b(2;-1;-1;1)+c(-2;3;-1;-3)=(0;0;0;0)$
$(2a;a;-3a;-1a)+(2b;-b;-b;b)+(-2c;3c;-c;-3c)=(0;0;0;0)$

$2a+2b-2c=0$ ①
$a-b+3c=0$ ②
$-3a-b-c=0$ ③
$-a+b-3c=0$ ④
} homogení soustava rovnic, vždy má řešení.

①$+2$④ $=4b-8c=0$ $b=2;\ c=1;\ a=-1$
②$+$④ $=0=0$
③$-3$④ $=-4b+8c=0$

Př: $a(x^3-3x+1)$
$b(x^2+4x-2)$
$c(x^3+x^2-x-4)$

↓ roznásobení a vytknutí x

$$x^3(a-c)+x^2(b-c)+x(3a+4b-c)+(a-2b-4c)$$

$$0=a+c \Rightarrow -c=-a$$
$$0=b+c \Rightarrow b=-c$$

## TEORIE

- Věta: Vektory jsou lineárně závislé právě, když lze alespoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

- Důsledek: Každá podmnožina lineárně nezávislých vektorů je lineárně nezávislá.

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}&=\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\ldots+\lambda_n\vec{v_n}\\ \vec{o}&=(-1)\vec{v}+\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\ldots+\lambda_n\vec{v_n}\end{aligned}\right\}\text{lineárně závislé}$$

- Definice: Nechť $M=\{\vec{v_1},\vec{v_2}\ldots\vec{v_n}\}$. Množina $\langle M\rangle$ všech lineárních kombinací vektorů $\vec{v_1},\vec{v_2}\ldots\vec{v_n}$ se nazývá lineární obal množiny M.

- Věta: Lineární obal každé neprázdné množiny je podprostorem vektorového prostoru.

Př:
$$\left.\begin{array}{l}(1;0;0;0)\\(0;1;0;0)\\(0;0;1;0)\\(0;0;0;1)\end{array}\right\}(a;b;c;d)=(1;1;1;1)\text{ - vektorový obal}$$

- Definice: Konečná množina $M\subset V$ se nazývá množina generátorů vektorového prostoru, jestliže $\langle M\rangle=V$. Jestliže V obsahuje množinu generátorů, říkáme, že prostor je konečně generovaný

Př: $P_3=ax^3+bx^2+cx+d$
$x^3, x^2, x, 1$

- Definice: Lineárně nezávislá množina generátorů prostoru V se nazývá báze prostoru V. Počet prvků báze se nazývá dimenze prostoru V dim V

- Věta: Každý konečně generovaný prostor obsahuje alespoň jednu bázi

- Věta: Z každé množiny generátorů lze vybrat bázi.

- **Věta:** Steimitzova o výměně
  Nechť $M = \{\vec{g_1}; \vec{g_2} \dots g_m\}$ je množina generátorů prostoru $V$, $N = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots \vec{b_n}\}$ LNV. Potom $n \leq m$ a některých $\underline{n}$ prvků množiny $M$ lze nahradit prvky množiny $N$, tak že vzniklá množina je opět množinou generátorů prostoru $V$.

- **Důsledky:** ① Jestliže množina $\{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \dots \vec{g_n}\}$ generuje $V$ pak každá LN množina má maximálně $\underline{m}$ prvků.
  ② Každou LN množinu lze doplnit na bázi
  ③ Každé dvě báze mají stejný počet prvků
  ④ Nechť $\dim V = n$, $M$ je $\underline{n}$ prvková LN množina potom $M$ je báze.

- **Věta:** Každý ~~prostor~~ vektor prostoru $V$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze

- **Definice:** Nechť $\vec{b_1} \dots \vec{b_n}$ je báze $V$, nechť $\vec{v} \in V$, nechť $\vec{v} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$. Potom koeficienty $\alpha_1 \dots \alpha_n$ se nazývají <u>souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\vec{b_1} \dots \vec{b_n}$</u>. $\vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)^T$

  Př: báze: $\xcancel{\begin{matrix}(1;0;0)\\(0;1;0)\\(0;0;1)\end{matrix}}$ $\vec{v} = (3;4;1)$ $\vec{f_1} = (1;1;0)$
  $\vec{f_2} = (1;0;1)$
  $\vec{f_3} = (0;1;1)$

  Najděte souřadnice $\vec{v}$ v dané bázi:

  $$\vec{v} = \alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \gamma \vec{f_3}$$

  $$\left.\begin{aligned} 3 &= \alpha + \beta \\ 4 &= \alpha + \gamma \\ 1 &= \beta + \gamma \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} -1 &= \beta - \gamma \\ 1 &= \beta + \gamma \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \beta &= 0 \\ \gamma &= 1 \end{aligned} \qquad \alpha = 3$$

  $$\vec{v} = \underline{\underline{(3;0;1)}}$$

- **Tvrzení:** ① Souřadnice součtu se rovnají ~~sněhu~~ součtu souřadnic.
  ② Souřadnice $\lambda$-násobku se rovnají $\lambda$-násobku souřadnic.

$U \cap V = \{\vec{o}\}$
$U + V = W = \langle f_1 \dots f_n; g_1 \dots g_n \rangle$ , obal
$U \oplus V =$ Direktní

# Matice

- **Definice:** Označme $N_k = \{1; 2.\ k\}$. Neuspořádanou dvojici $(i,j) \in N_m \times N_n$ nazveme místem. Řekneme, že je dána matice typu $m \times n$, jestliže každému místu je přiřazeno (reálné) číslo $\alpha_{i,j}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Nechť $\alpha_{i,j}$ je prvek na místě $(i,j)$. Potom $i$ je jeho řádkový a $j$ sloupcový index. Vektor $(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots \alpha_{i,n})$ nazýváme i-tý řádek. Vektor $(\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j} \dots \alpha_{m,j})$ j-tý sloupec matice.

Je-li $m=n$, hovoříme čtvercové matici řádu n, je-li $m \neq n$, nazývá se obdélníková.

Vektor $(\alpha_{1,1}; \alpha_{2,2}; \dots \alpha_{m,n})$ nebo $(\alpha_{1,1}; \alpha_{2,2}; \dots \alpha_{m,m})$ se nazývá hlavní diagonála matice, pro čtvercovou matici se vektor $(\alpha_{1,n}; \alpha_{2,n-1}; \dots \alpha_{m,1})$ nazývá vedlejší diagonála matice.

- **Definice:** Matice se nazývá:

① nulová jestliže $\forall i,j\ \alpha_{i,j} = 0$
② diagonální jestliže $\forall i \neq j\ \alpha_{i,j} = 0$ : $A = \mathrm{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{mn})$

③ jednotková $I_{m,n}$; $I_n$ jestliže je diagonální a navíc $\alpha_{i,i} = 1$

④ horní trojúhelníková jestliže $\alpha_{ij} = 0\ \forall i > j$
⑤ dolní trojúhelníková jestliže $\alpha_{ij} = 0\ \forall i < j$

⑥ symetrická jestliže $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$
⑦ hermitovská jestliže $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+i & 2-i \\ 1-i & -1 & -2i \\ 2+i & 2i & 4 \end{pmatrix}$$ hermitovská (souměrná podle hl. diag.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$ symetrická (souměrná podle hl. diag.)

- **Definice:** Řekněme, že matice A, B jsou si rovny $A = B$, jestliže $\forall i,j\ \alpha_{ij} = \beta_{ij}$

- **Definice:** Řekněme, že $A^T$ je matice transponovaná (řádky → sloupců a opačně) k matici A jestliže $\alpha^T_{ij} = \alpha_{ij}$

- **Tvrzení:** ① $(A^T)^T = A$
② $A^T = A$, právě když A je symetrické

# Operace s maticemi

- **Definice:** Nechť $A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$ jsou matice stejného typu m,n. Potom součet A+B je matice $C=(\gamma_{ij})$ typu m,n, taková, že $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

- **Vlastnosti:**
  ① $A+B = B+A$
  ② $(A+B)+C = A+(B+C)$
  ③ $A+0 = 0+A = A$
  ④ $(A+B)^T = A^T + B^T$

- **Definice:** Nechť $\lambda \in T$, $A=(\alpha_{ij})$ matice typu m/n. Potom $\lambda A = (\varepsilon_{ij})$ je matice typu m/n; $\varepsilon_{ij} = \lambda \alpha_{ij}$.
  Matice $(-1)A = -A$ se nazývá **opačná** k matici A.

- **Vlastnosti:**
  ① $0.A = 0$
  ② $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
  ③ $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 \cancel{B} A$
  ④ $(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$
  ⑤ $1.A = A$
  ⑥ $(\lambda A)^T = \lambda . A^T$

- **Tvrzení:** Množina matic typu m/n s operacemi sčítání matic a násobení matic číslem tvoří vektorový prostor dimence m.n.

**Př:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

- **Definice:** Nechť A je matice typu m/n, B matice typu n/p. Potom **součin** matic $C = A.B$ je matice typu m/p, pro kterou platí:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj}$$ - skalární součin

- **Vlastnosti:**
  ① $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$ (1 - jednotková matice)
  ② $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
  ③ $A(BC) = (AB)C$
  ④ $(A+B)C = AC + BC$
  ⑤ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
  ⑥ $(AB)^T = (A)^T . (B)^T$

**Pozn:** Obecně $AB \neq BA$
**Defin:** Řekněme, že A,B spolu **komutují**, jestliže $AB = BA$

- **Definice:**

# Determinanty

- **Definice:** Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$. Potom determinant matice $A$ $\det A$, $|A|$ je číslo

$$\det A = \sum_{\pi} \sigma(\pi)\, \alpha_{1\pi(1)}\, \alpha_{2\pi(2)} \dots \alpha_{n\pi(n)}$$

$$\begin{pmatrix} x & x & \textcircled{x} & x & x \\ \textcircled{x} & x & x & x & x \\ x & x & x & x & \textcircled{x} \\ x & x & x & \textcircled{x} & x \\ x & \textcircled{x} & x & x & x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

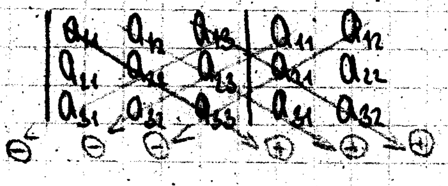
- vyberu právě jeden z každé řádky

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

⊖ ⊕

$$\underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{+}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$



- **Věta** $\det A = \det A^T$

- **Tvrzení:** Saurusova pravidlo:
  Pro matice řádu 3 platí:

$$\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \\ - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

- Prohodím-li 2 řádky, determinant změní znaménko

$$\left|\begin{array}{c|cc} a_{11} & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{2m} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nm} \end{array}\right| \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ 1 & \end{pmatrix}$$

- **Definice:** Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$, $\alpha_{ij}$ její prvek. Potom algebraický doplněk prvku $\alpha_{ij}$ je číslo

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A[i|j]$$

kde $A[i|j]$ vznikne z matice $A$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0(1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0.(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Pokud se $\det A = -\det A$ (má 2 stejné řádky, při změně - prohození řádku či sloupce se mění znaménko) je též roven 0.

- Pokud jeden řádek nebo sloupec je nulový $\det A = 0$.

- <u>Věta</u>: Zaplaceův rozvoj
  Nechť A je čtvercová matice řádu n. Potom:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}$$

- Vytýkání z determinantu: (vždy pouze z jednoho řádku!)

$$\rightarrow\begin{vmatrix} \boxed{3 \;\; 6 \;\; -9} \\ 12 \;\; 6 \;\; -3 \\ 1 \;\; 4 \;\; 1 \end{vmatrix} = 3\rightarrow\begin{vmatrix} 1 \;\; 2 \;\; -3 \\ \boxed{12 \;\; 6 \;\; -3} \\ 1 \;\; 4 \;\; 1 \end{vmatrix} = 3.3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} \rightarrow \boxed{1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1} \\ 3 \;\; 1 \;\; 2 \;\; -1 \\ \rightarrow \boxed{1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 1} \\ 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \end{vmatrix} \Big\}\text{stejné řádky} = 4.0 = 0$$

## <u>Gaussova eliminace</u> $\boxed{\text{ALT+F4}}$

- <u>Věta</u>: Nechť matice B vznikne z matice A prohozením dvou řádků.
  Potom $\det A = -\det B$.

- <u>Důsledek</u>: Má-li matice dva řádky stejné, potom $\det A = 0$

- <u>Věta</u>: Nechť matice B vznikne z matice A vynásobením jednoho řádku číslem <u>c</u>. Potom $\det B = c \det A$

- <u>Důsledek</u>: Má-li matice nulový řádek, potom $\det A = 0$

- <u>Věta</u>: Nechť matice B vznikne z matice A přičtením c-násobku řádku k jinému řádku. Potom $\det B = \det A$

- <u>Věta</u>: $\det AB = \det A \det B$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \leftrightarrows = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +2\mathrm{I} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 9 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ +3\mathrm{I} \end{matrix} = -\begin{vmatrix} \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & -3 & 5 & 9 & 0 \\ \cancel{0} & 7 & -2 & -7 & -3 \\ \cancel{0} & 2 & 3 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & -1 & 4 & 15 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 15 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ +3\mathrm{IV} \\ \\ \\ \end{matrix} = \overset{-\mathrm{III}\ -\mathrm{III}}{\begin{vmatrix} -3 & 5 & 9 & \cancel{0} \\ 25 & 4 & 17 & \cancel{0} \\ 2 & 3 & 3 & \cancel{0} \\ \cancel{6} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{1} \end{vmatrix}} = \overset{+3\mathrm{I}}{\begin{vmatrix} -12 & -4 & 9 \\ 8 & -13 & 17 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -12 & -4 & -27 \\ 8 & -13 & 41 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & -27 \\ 13 & 41 \end{vmatrix}^{\cdot(-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 27 \\ 13 & 41 \end{vmatrix} = 4.41 + 27.13 = \underline{\underline{515}}$$

$$\begin{vmatrix} \textcircled{x} & x & x & x & x \\ 0 & \textcircled{x} & x & x & x \\ 0 & 0 & \textcircled{x} & x & x \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{x} & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{x} \end{vmatrix} = \text{součin prvků na hl. diagonále} = \det A$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 0 & x \\ x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 & x \\ x & x & x & x & x \end{vmatrix} =$$ pokud se mi podaří pokrýt všechny nenulové prvky menším počtem prvků než je řád matice $(4<5)$ $\det A = \underline{0}$

$\det A \neq 0$ - pokud existuje posloupnost elementárních úprav, tak aby vznikla matice diagonální s nenulovou diagonálou.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & e & f \\ ka & kb & kc \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+kg & e+kh & f+hi \\ g & e & i \end{pmatrix}$$

- **Definice:** Elementární matici nazýváme matici, která vznikne z jednotkové matice provedením jedné elementární úpravy.

Provést řádkovou elementární úpravu matice, znamená totéž, jako vynásobit matici odpovídající elementární maticí zleva.

Pro sloupcovou zprava

$\det TA = \det T \det A$

$T_k T_{k-1} \ldots T_1 A = I$

$A = T_k^{-1} T_{k-1}^{-1} \ldots T_1^{-1}$

# Hodnost matice

- **Definice:** Nechť $A$ je matice typu $m/n$. Lineární obal všech řádkových (sloupcových) vektorů matice $A$ se nazývá *řádkový (sloupcový) prostor matice*. Dimenze řádkového prostoru se nazývá *hodnost* matice $r(A)$.

- **Věta:** Dimenze řádkového i sloupcového prostoru je stejná.

- **Důsledek:** $r(A) = r(A^T)$

- **Definice:** Elementární úpravou matice je:

  ① přehození řádků
  ② vynásobením řádku nenulovým číslem
  ③ přičtení násobku řádku k jinému řádku

- **Věta:** Elementární úpravou nezměníme hodnost matice

- **Věta:** Každou matici lze elementárními úpravami převést na matici ve *stupňovitém* tvaru.

- **Definice:** Řekněme, že matice $A$ je ve *stupňovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí

- **Věta:** Hodnost matice ve stupňovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků.

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\text{I} \\ +2\text{I} \\ -3\text{I} \\ -4\text{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & \text{[illegible]} & 5 \\ 0 & -8 & -8 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\text{III} \\ \\ +2\text{III} \\ +2\text{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad r(A) = 4$$

7 4

- **Definice:** Determinant libovolné čtvercové ~~matice~~ podmatice řádu $m$ matice $A$ se nazývá *minor řádu $m$* matice $A$

- **Věta:** $r(A) = m$ právě když v $A$ existuje nenulový minor řádu $m$ a neexistuje nenulový minor většího řádu.

- **Důsledek:** Čtvercová matice řádu $n$ má hodnost $n$ právě když $\det A \neq 0$

- **Definice:** Matice $A^{-1}$ se nazývá *inverzní* k matici $A$ jestliže $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$. Čtvercová matice, ke které existuje matice inverzní, se nazývá *regulární*, jinak *singulární*.

- **Věta:** Matice je *regulární*, právě když $\det A \neq 0$

- **Pozn:** Inverzní matice je určena jednoznačně $\quad B, C \quad B = BI = BAC = CI = C$

  $AA^{-1} = I$

- **Věta:** Každou matici hodnosti $n$ lze elementárními úpravami převést na jednotkovou matici. Stejnou posloupností el. úprav provedeme na jednotkovou matici a získáme $A^{-1}$.

- **Pozn:** Uvedený postup se nazývá *Jordanova eliminační metoda*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2I \\ \cdot 3I \end{array} \sim \xcancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 1 & +2 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 0 & +3 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & 7 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 11 \\ \cdot(-7) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -77 & 33 & 11 & 22 & 0 \\ 0 & +77 & -49 & 0 & -21 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +II \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -77 & 33 & 11 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 11 & 1 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 8 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -32 & 16 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -77 & 33 & 11 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 11 & 1 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} +III \\ /11 \cdot 16 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -32 & 0 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -112 & -48 & 16 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & 33 & 3 & -21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +III \\ \\ \end{array} \sim$$

Δ matice

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -32 & 0 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -112 & 0 & 49 & 35 & -21 \\ 0 & 0 & -48 & 33 & 3 & -21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 7 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & -32 & 0 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -16 & 0 & 7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 11 & 3 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} +2II \\ \\ \\ \end{array} \sim \xcancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 0 & 0 & \overset{25}{\cancel{11}} & \overset{19}{\cancel{9}} & \overset{-13}{\cancel{-7}} \\ 0 & 16 & 0 & 7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 11 & 3 & -7 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -8 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -16 & 0 & 7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 11 & 3 & -7 \end{array}\right) \sim$$

diagonální matice

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -7/16 & -5/16 & 3/16 \\ 0 & 0 & 1 & -11/16 & -3/16 & 7/16 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -7 & -5 & 3 \\ -11 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

jednotková diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Definice:** Nechť $A_{ij}$ je algebrajický doplněk prvku $a_{ij}$. Potom matice

$$A^A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice adjungovaná k matici $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} A^A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & \overset{2-(+4)}{\boxed{2}} \\ 7 & 5 & -3 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Transpozice + det minorů $A$ řádu $n-1$

- **Věta:** $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^A$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

# Lineární zobrazení

- **Definice:** Nechť U,V jsou vektorové prostory, nechť $Z: U \to V$ je zobrazení. Z se nazývá lineární zobrazení (homomorfismus), jestliže $\forall x,y \in U$ a $\lambda \in T$ je:

① $Z(x+y) = Z(x) + Z(y)$
② $Z(\lambda x) = \lambda Z(x)$

$R \to R$: $f(2)=5$ → $f(x) = 2x+1$
$f(3)=7$ →
$f(2+3)=11 \neq 5+7$

$y=3x$, $y=kx$ (lineární zobrazení to už je)

$R^2 \to R^2$: $L(a,b) = (a+b, a-b)$

$R^n \to R$: $L(a_1, a_2 \ldots a_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$L(\vec{v}) = |\vec{v}|$
$L(\lambda\vec{v}) = |\lambda||\vec{v}|$ - pouze pro kladné λ platí ②.
L

$T \to R$: $L(\{a_n\}) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

$f(y) = y'$

$R^m \to R^n$: $L(\vec{n}) = A\vec{n}$

$R^2 \to R^3$: $L(a,b) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (-a+3b, 2a+b, 3a-2b)^T$

- **Definice:** Nechť U,V jsou vektorové prostory, $L: U \to V$ lineární zobrazení. Množina všech prvků prostoru U takových, že $L(x) = 0$ se nazývá jádro zobrazení L (Ker L). Množina všech prvků prostoru V takových, že existuje $x \in U$ tak, že $L(x) = y$ se nazývá obraz zobrazení L (Im L)

- **Věta:** Ker L je podprostor prostoru U, Im L podprostor prostoru V

- **Věta:** $\dim(\mathrm{Ker}\,L) + \dim(\mathrm{Im}\,L) = \dim U$.

$R^3 \to R^4$: $L(a,b,c) = (a+b+c, 3a-b-c, -a+5b-2c, 2a-3b+c)$

$a+b+c=0$
$3a-b-c=0$ $-3\mathrm{I}$
$-a+5b-2c=0$ $+\mathrm{I}$
$2a-3b+c=0$ $-2\mathrm{I}$
$-4b+2c=0$
$6b-3c=0$  $b=1$  $a=1$
$-6b+3c=0$  $c=2$

Báze jádra = (1;1;2)

dim(Ker L) = 1

$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$
$L(\vec{v}) = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n)$
$= L(\alpha_1 b_1) + L(\alpha_2 b_2) + \ldots =$
$= \alpha_1 L(b_1) + \alpha_2 L(b_2) \ldots$

$L(1,0,0) = (1,3,-1,2)$
$L(0,1,0) = (1,-1,5,-4)$
$L(0,0,1) = (-1,-1,-2,1)$

množina generátorů } báze (dim(Ker L) + dim(Im L) = dim U =
⇒ 1 + x = 3 ⇒ dim(Im L) = 2 )

-**Definice**: Nechť $L: U \Rightarrow V$ je lineární zobrazení. $L$ se nazývá:

① Monomorfismus je-li prosté
② Epimorfismus je-li na
③ Izomorfismus je-li bijekce

-**Věta**: Zobrazení je monomorfismem, právě když má triviální jádro $\operatorname{Ker} L = 0$
Zobrazení je epimorfismus, je-li $\operatorname{Im} L = V$
Zobrazení je izomorfismus, platí-li mono. a epimorfismus.

-**Věta**: Je-li $L: U \to V$ izomorfismus, je inverzní zobrazení $L^{-1}: V \Rightarrow U$ také izomorfismus.

$$L^{-1}(y) = x \iff y = L(x)$$

$$L^{-1}(y_1+y_2) = L^{-1}(L(x_1)+L(x_2)) = L^{-1}(L(x_1)) + L^{-1}(L(x_2)) = L^{-1}(y^1) + L^{-1}(y^2)$$

-**Definice**: Prostory $U$ a $V$ se nazývají izomorfní, jestliže mezi nimi existuje izomorfismus.

-**Věta**: Nechť $L: U \Rightarrow V$ je izomorfismus. Potom $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ jsou lineárně závislé, právě když $L(u_1), L(u_2), \dots, L(u_k) \in V$ jsou lineárně závislé.

-**Věta**: Prostory $U, V$ konečné dimenze. Potom $U, V$ jsou izomorfní právě tehdy když $\underline{\dim U = \dim V}$.

$$R^4 \cong P_3 \qquad L(a,b,c,d) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Prostor 4 je izomorfní s polynomem nejvýše 3 řádu.

# Matice lineárního zobrazení

-**Motivace**: $L(a,b,c) = (a+b+c, 3a-b-c, -a+5b+2c, 2a-4b+c)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 3a-b-c \\ -a+5b-2c \\ 2a-4b+c \end{pmatrix} \qquad \dim \operatorname{Im} L \leq r(A)$$

generátory (sloupce)

-**Definice**: Matice $A$ složená po sloupcích ze souřadnic obrazů báze prostoru $U$ v bázi prostoru $V$ se nazývá <u>matice lineárního zobrazení</u> $L: U \Rightarrow V$

-**Značení**: Budeme značit $\hat{x} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, jestliže $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ jsou souřadnice prvku $x$ v daném bázi.

-**Př**: Báze: $R^3$ Báze $R^4$ $R^3 \Rightarrow R^4$: $L(a,b,c) = (a+b-c, 3a-b-c, -a+5b-2c, 2a-4b+c)$

Najděte matici zobrazení v těchto bázích.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,1,1)$ | $(-1,1,1,1)$ | $-a+b+c+d=1$ | | | |
| $(1,1,0)$ | $(1,-1,1,1)$ | $a-b+c+d=1$ | $2c+2d=2$ | $-b+d=1$ | $d=5/4$ |
| $(1,0,0)$ | $(1,1,-1,1)$ | $a+b-c+d=2$ | $2b+2d=3$ | $2b+2d=3$ | $c=-1/4$ |
| | $(1,1,1,-1)$ | $a+b+c-d=-1$ | $2b+2c=0$ | | $b=1/4$ |
| | | | $b=-c$ | | $a=1/4$ |

$L(1,1,1) = (1,1,2,-1)$
$L(1,1,0) = (2,2,4,-2)$
$L(1,0,0) = (1,3,-1,2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & \dots \\ 1/4 & \\ -1/4 & \end{pmatrix}$$

-**Věta**: Nechť $U, V$ jsou vektorové prostory, $L: U \to V$ lineární zobrazení, $u_1, u_2 \dots u_n$ báze prostoru $U$, $v_1 \dots v_n$, báze prostoru $V$, $A$ matice lineárního zobrazení. Potom:

① Pro $x \in U$ je $L(x) = y$ právě když $A\hat{x} = \hat{y}$
② Matice lineárního zobrazení je určena jednoznačně.

-**Věta**: Nechť $A$ je matice lineárního zobrazení $L: U \to V$, potom $\dim(\operatorname{Im} L) = r(A)$

-**Důsledek**: Matice $A$ je maticí izomorfismu právě když $A$ je regulární

-**Věta**: $r(AB) \leq \min(r(A); r(B))$

**Př**: $L_1(x) = y \quad U \to V \quad$ matice $A$
$L_2(y) = z \quad V \to W \quad$ matice $B$
$L(x) = L_2(L_1(x)) = L_2(y) = z$

$$L(x_1 + x_2) = L_2(L_1(x_1) + L_1(x_2)) = L_2(y_1 + y_2) = L_2(y_1) + L_2(y_2) = z_1 + z_2$$

$$z = By = B(Ax) = (BA)x$$

**Př**: $V \to V$
$L(x) = x$

-**Definice**: Nechť $f_1 \dots f_n, g_1 \dots g_n$ jsou dvě báze prostoru $U$, $I(x) = x$ identického zobrazení. Matice tohoto zobrazení vzhledem k bázím $f_1 \dots f_n$, $g_1 \dots g_n$ se nazývají matice přechodu od báze $f_1 \dots f_n$ k bázi $g_1 \dots g_n$.

**Př**:
$$\begin{array}{cccc|cccc} & A & & & & B & & \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \begin{matrix} \\ \\ +I \\ +I \\ +I \end{matrix} \sim$$

Máme najít matici přechodu z báze A do báze B

Vyjadřujeme souřadnice báze A do báze B.
(Zobrazujeme A do B)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -II \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 4 \\ 2 \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -IV \\ \\ -IV \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & 4 & 4 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} +III \\ +III \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/4 & 3/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/4 & 1/4 & 2/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/4 & 1/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \quad B \text{ k } A$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matice přechodu od A k B

-**Věta:** Nechť $U$ je vektorový prostor dimenze $n$,
$F = f_1 \dots f_n$, $G = g_1 \dots g_n$ dvě jeho báze,
$\hat{x}$ souřadnice prvku $x$ v bázi $F$, $\tilde{x}$ v bázi $G$,
$T = (\hat{g}_1 \dots \hat{g}_n)$ matice přechodu od báze $F$ k bázi $G$. Potom:
① $T =$ je regulární
② $T\tilde{x} = \hat{x}$
③ $T^{-1} =$ je matice přechodu od $G$ do $F$
④ $T^{-1}\hat{x} = \tilde{x}$

# Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a+2b-c-3d &= 1 \\ 2a+b-4c+d &= 3 \\ a-2b \quad +2d &= 0 \\ 3a+b-3c-2d &= 1 \\ 2a-3b+c-d &= -2 \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

-**Definice:** Nechť $A$ je matice typu $n/m$, $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$, $n$-tý člen, $\vec{b} = (b_1, b_2 \dots b_m)$ $m$-tý člen vektor. Potom $A\vec{x} = \vec{b}$ je soustava $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých. Matice $A = (a_{ij})$ se nazývá matice soustavy, matice $A_R = (A|\vec{b})$ rozšířená matice soustavy, vektor $\vec{x}$ vektor neznámých. Vektor $\vec{b}$ vektor pravých stran.

Soustava rovnic se nazývá homogenní, jestliže $\vec{b} = \vec{o}$, nehomogenní, jestliže $\vec{b} \neq \vec{o}$. Vektor $\vec{x}$, pro který platí $A\vec{x} = \vec{b}$ se nazývá řešení. Soustava pro, kterou existuje řešení se nazývá řešitelná, jinak neřešitelná. Pokud řešení existuje právě jedno, nazývá se soustava jednoznačně jednoznačná řešitelná. Dvě soustavy se nazývají ekvivalentní, jestliže mají tatéž množinu řešení.

-**Věta:** Jestliže matice $(C|d)$ vznikla z matice $(A|b)$ řádkovými elementárními úpravami, potom soustava $C\vec{x} = \vec{d}$ a $A\vec{x} = \vec{b}$ jsou ekvivalentní.

-**Věta:** FROBENIUS Soustava $A\vec{x} = \vec{b}$ je řešitelná právě když $r(A_R) = r(A)$

$$\begin{aligned} &Ax = o \quad Ay = o \\ &A(x+y) = Ax + Ay = \vec{o} \\ &A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \vec{o} \end{aligned}$$

**Př:**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +4I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 9 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & -4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +IV+II \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & -4 & -4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 4 \\ \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -20 & -20 & -4 & 12 \\ 0 & 20 & 20 & 15 & -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +II \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & c & \downarrow & e \end{matrix} \text{ - parametry} \\ \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \textcircled{-20} & 20 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{11} & -18 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vyberu první nenulové pro převod na Δ matici (vedoucí prvky), tam kde sou budou to proměnné BAZICKÉ, ostatní NEBAZICKÉ (počet proměnných – řád matice)

-**Věta:** Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

-**Definice:** Řekneme, že matice A, B jsou podobné, jestliže exregulární matice T tak, že $A = TBT^{-1}$

-**Věta:** Podobné matice mají týž charakteristický polynom a vlastní čísla.

$A = TBT^{-1}$ $\quad U = T^{-1}$ $\quad A = TBT^{-1}$ $\quad A = T(UCU^{-1})T^{-1} = (TU)C(T^{-1}U^{-1}) = TUC(TU)^{-1}$

$B = UAU^{-1}$ $\quad B = UCU^{-1}$

$|T(\lambda I - A)T^{-1}|$ $\quad \lambda I - A = T(\lambda I - A)T^{-1}$

-**Definice:** Nechť V je vektorový prostor. Potom lineární zobrazení $L: V \to V$ se nazývá lineární operátor

-**Věta:** Nechť V je vektorový prostor, $L: V \to V$ lineární operátor, A, B matice operátoru L ve dvou jeho bázích. Potom A a B jsou podobné.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "T z"'] & V \\ \circ \arrow[r, "g_B"'] & \circ \arrow[u, "z T^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$L = zLz$

$A = TJT^{-1}$ $\quad AT = TJ$ $\quad A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$$\underset{\lambda}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{\text{(jordonův tvar)}} = \begin{pmatrix} -a & 2b & -3c \\ -d & 2e & -3f \\ -g & 2h & -3i \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

-**Věta:** Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$

$v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

~~$\lambda_{k+1}$~~

$Av_{k+1} = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \dots + \alpha_k Av_k$

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} Av_1 + \alpha_2 \lambda_{k+1} Av_2 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} Av_k$

$Av_{k+1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k$

$\vec{0} = (A - \lambda_{k+1} I) = \underline{\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1} + \underline{\alpha_2(\lambda_2 + \lambda_{k+1})v_2} + \dots + \underline{\alpha_k(\lambda_k + \lambda_{k+1})v_k}$

můžou bejt jen $\vec{0}$, ale nějaké $\alpha_x$ je nenulové takže nějaká $(\lambda_x - \lambda_{k+1})$ je nulové, takže se rovnají $\lambda_x = \lambda_{k+1}$.

-**Př:** $\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-5 & -6 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 5) + 12 + 12 + 3(\lambda - 5) + 12(\lambda - 2) -$

$- 4(\lambda + 2) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 =$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ -dvojnásobné λ

$\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -12 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ L2 \end{matrix} \qquad v_3 = (-1; -2; 1) \;= \text{řešení lineární homogenní rovnice}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L2 \\ L2 \end{matrix} \qquad \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad J_A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-**Př:** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \\ 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 2 \\ -10 & \lambda-3 & -14 \\ -13 & 1 & \lambda-12 \end{vmatrix} = (\lambda^2-9)(\lambda-12) - 182 - 20 + 26(\lambda-3) +$
$+14(\lambda+3) - 10(\lambda+12) =$
$= \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 =$
$= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-10)$

$\lambda = 1$:

$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -10 & -2 & -14 \\ -13 & 1 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -18 & 0 & -18 \\ -9 & 0 & -9 \end{pmatrix} LZ$ $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Pro $\lambda=1$ existuje jenom 1 LNZ $\vec{v}$ takže to nejde vyřešit.

- **Věta:** Matice je podobná diagonální matici, právě když počet jejich LNZ vlastních vektorů je roven jejímu řádu.

-**Př:** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $|\lambda I - A| = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i$

Varianta 1): $J_A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$

$\lambda = 2+i$:

$\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$\lambda = 2-i$

$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$\Bigg\}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ ↳ matice řešení $T_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ z $\vec{v}_1$

$\overset{Re}{\phantom{x}}$ $\underset{Im}{\phantom{x}}$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $u = (\alpha_1 + \beta_1 i ; \alpha_2 + \beta_2 i, \dots ; \alpha_n + \beta_n i)$
$\bar{u} = (\bar{u}_1 ; \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ $\bar{u} = (\alpha_1 - \beta_1 i, \alpha_2 - \beta_2 i, \dots, \alpha_n - \beta_n i)$

$u + \bar{u} = (2\alpha_1, 2\alpha_2, \dots, 2\alpha_n)$

$\frac{u+\bar{u}}{2} = \underline{Re\, u}$

$\frac{u-\bar{u}}{2i} = \underline{Im\, u}$

-**Př:** $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ $r(A) = 6$
$\lambda_{3,4} = 3 \pm i$
$\lambda_5 = 2$
$\lambda_6 = -3$

$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & & & \\ -2 & -1 & & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & -1 & 3 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{matrix}$ ↖ Re

-**Př:** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \\ 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ $(\lambda-10)(\lambda-1)^2$ $\lambda = 1: (-1, -2, 1)$
$\lambda = 10: (0, 2, 1)$ $J = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda+3 & -1 & 2 \\ -10 & \lambda-3 & -14 \\ -13 & 1 & \lambda-12 \end{vmatrix}$ $AT = TJ$
$(\lambda I - A)\vec{h}_2 = -\vec{h}_1$ $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pro $\lambda = 1$: $\leftarrow -(0,2,1)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -10 & -2 & 14 & -2 \\ -13 & 1 & -11 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 18 & 36 & 8 \\ 0 & -9 & -18 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ LZ \\ -4I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \vec{h}_2$

Zvolime si něco za parametry c,e

① $\underline{c=1}\quad \underline{e=0}$: $\qquad a+2b+3c+2d-2e=0$

$b=1\quad d=0\qquad\qquad -20b-20c-4d+12e=0$

$a=-1\qquad\qquad\qquad 11d-18e=0$

} z výsledné matice převedené na stupňovitý tvar ze zadání.

② $\underline{c=0}\quad \underline{e=11}\qquad -20b-72+132=0$

$d=18\quad b=3$

$a=-20$

① $(-1,-1,1,0,0)$ ② $(-20,3,0,18,11)$

$\vec{x}=t(-1,-1,1,0,0)+r(-20,3,0,18,11)$ $\quad$ $\underline{r}$ a $\underline{t}$ jsou parametry

$\vec{x}=(-t-20r;-t+3r;t;18r;11r)$

- <u>Věta</u>: Množina řešení homogenní soustavy $A\vec{x}=\vec{o}$ je vektorový prostor dimenze $n-r(A)$

- <u>Věta</u>: Nechť $\vec{u},\vec{v}$ jsou řešení soustavy $A\vec{x}=\vec{b}$. Potom $\vec{u}-\vec{v}$ je řešení soustavy $A\vec{x}=\vec{o}$ zvané homogenní <u>soustava příslušná</u> soustavě $A\vec{x}=\vec{b}$.

$$R^5\to R^4:\ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

FROBENIUS = vektor pravých stran musí být lineárně závislý na sloupcích matice A. $r(Ar)=r(A)$

$$\left.\begin{matrix} A\vec{x}=\vec{b} \\ A\vec{y}=\vec{b} \end{matrix}\right\}\ A\vec{x}-A\vec{y}=A(\vec{x}-\vec{y})=\vec{b}-\vec{b}=\vec{o}$$

$$\vec{x}\quad \vec{y}=\vec{x}+\underbrace{(\vec{y}-\vec{x})}_{Ax=o}$$

Najdu-li řešení nehomogenní soustavy, můžu najít další řešení nalezneme řešením soustavy s homogenní maticí. $\vec{x}=x_p+x_o$

Př:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & b & c & d & e & \vec{b} \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -4 & \cancel{3}4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -3 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -4 & \cancel{3}4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2I \\ +4I \\ +I\cdot(-1) \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 4 & -9 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -3 & 6 & \cancel{-4}-5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\ \cancel{0} \\ 0 & -4 & -4 & -3 & 6 & \cancel{-4}-5 \end{array}\right)\to 0\neq 1$$

nerešitelná

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} & & c & & e & \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & \textcircled{-20} & -20 & -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{11} & 18 & 20 \end{array}\right)$$

Z homogenní: $\vec{x}=t(-1;-1;1;0;0)+r(-20;3;0;18;11)$

$\vec{x}=t(-1;-1;1;0;0)+r(20;3;0;18;11)+(-\frac{21}{11};-\frac{4}{11};0;\frac{20}{11};0)$

$c=e=0$: $\quad a+2b+2d=1 \qquad d=\frac{20}{11}$

$\qquad -20b-4d=0 \qquad b=-\frac{4}{11}$

$\qquad 11d=20 \qquad a=-\frac{21}{11}$

$\to(-\frac{21}{11};-\frac{4}{11};0;\frac{20}{11};0)$ k tomu přičtu řešení homogenní soustavy a máme všechna řešení

$A\vec{x}=\vec{b}$

$A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ $\quad$ - pracné! $\quad =\dfrac{A^A\vec{b}}{\det A}$ $\qquad x_i=\dfrac{\det A_i}{\det A}$ $\quad$ <u>CRAMER</u>

Př:

$2x+y-2z=-2$

$x-3y+z=1$

$3x-y-z=1$

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-16$$

nahrazení sloupce řešením a vyjde pak x

$$A_x=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-12\ \Rightarrow\ x=\frac{-12}{-16}=\frac{3}{4}$$

**Mot. př:**

$$\begin{aligned} x' &= -x - 3y - 3z \\ y' &= 2x - y + 2z \\ z' &= -2x + 3y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

} soustava lineárních rovnic z diferenciálů 1. stupně (1 derivace)

~~$x = v_1 e^{\lambda x}$~~ ~~$\lambda e^{\lambda x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$~~

~~$y = v_2 e^{\lambda x}$~~ ~~$\lambda e^{\lambda x} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$~~

~~$z = v_3 e^{\lambda x}$~~ ~~$\lambda e^{\lambda x} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$~~

$$\begin{aligned} x &= v_1 e^{\lambda x} & v_1 \lambda \cancel{e^{\lambda x}} &= a_{11} v_1 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{12} v_2 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{13} v_3 \cancel{e^{\lambda x}} \\ y &= v_2 e^{\lambda x} & v_2 \lambda \cancel{e^{\lambda x}} &= a_{21} v_1 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{22} v_2 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{32} v_3 \cancel{e^{\lambda x}} \\ z &= v_3 e^{\lambda x} & v_3 \lambda \cancel{e^{\lambda x}} &= a_{21} v_1 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{32} v_2 \cancel{e^{\lambda x}} + a_{33} v_3 \cancel{e^{\lambda x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= v_1(a_{11} - \lambda) + v_2 a_{12} + v_3 a_{13} \\ 0 &= v_1 a_{21} + v_2(a_{22} - \lambda) + v_3 a_{23} \\ 0 &= v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3(a_{33} - \lambda) \end{aligned}$$

# Jordanův tvar matice

- **Definice:** Nechť A je čtvercová matice řádu n. Potom det(λI − A) se nazývá charakteristický polynom matice A, jeho kořeny se nazývají vlastní čísla matice A.

Nechť λ je vlastní číslo matice A. Nenulový vektor $\vec{v}$ takový, že $\lambda\vec{v} = A\vec{v}$ se nazývá vlastní vektor matice A. Množina všech vlastních čísel se nazývá spektrum matice A.

$$(\lambda I - A)\vec{v} = 0\,;\ \lambda I\vec{v} - A\vec{v} = 0\,;\ \lambda\vec{v} = A\vec{v}$$

- **Př:** Najděte vlastní čísla a vektory matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 3 & 3 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 12 + 18 - 6(\lambda+1) - 6(\lambda+1) + 6\lambda =$$
$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array} \qquad p = 1; 2; 3; 6$$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+3) = (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3):\ \lambda_1 = 2\,;\ \lambda_2 = -1\,;\ \lambda_3 = -3$$

- **Definice:** Stopa matice je součet čísel na diagonále (tr(A)). Stopa je rovna součtu vlastních čísel. Součet vlastních čísel (±) je roven determinantu.

- **Př:** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{-3} & \cancel{2} \end{pmatrix} LZ$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ \cancel{2} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{X} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x}$$

-**Př:** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = (\lambda^2+5\lambda-6)(\lambda-8)+39-24+3(\lambda+6)+52(\lambda-1)-6(\lambda-8) =$

$= \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 = (\lambda-1)^3 \Rightarrow$ trojnásobné vl. číslo

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & 13 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \text{r2} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -1 \\ 2 & 7 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \\ & & & \end{array}\right)$$

-**Definice:** Nechť $A$ je matice řádu $\underline{n}$, $\lambda$ vlastní číslo. Uspořádaná $k$-tice vektorů $h_1, h_2 \dots h_k$ taková, že:

$$(\lambda I - A)h_1 = 0 \qquad k_1 \neq 0$$
$$(\lambda I - A)h_2 = -h_1$$
$$\vdots$$
$$(\lambda I - A)h_k = -h_{k-1}$$

se nazývá <u>řetězec zobecněných vlastních vektorů</u>, vektor $h_j$ pak <u>j-tý zobecněný vlastní vektor</u> příslušný vlastnímu číslu $\lambda$. Číslo $k$ se nazývá <u>délka řetězce</u>

-**Věta:** Vektory $h_1, h_2 \dots h_k$ jsou lineárně nezávislé.

-**Věta:** Nechť $h_1^1, h_2^1$ jsou LNZ vlastní vektory k témuž vlastnímu číslu $\lambda$. Potom vektory $h_1^1 \dots h_{k_1}^1\, h_1^2 \dots h_{k_2}^2$ [illegible] jsou lineárně nezávislé.

-**Věta:** Nechť $h_1^1, h_1^2 \dots h_1^s$ jsou LNZ vlastní vektor

-**Definice:** Matice tvaru ↓ se nazývá <u>Jordanova buňka</u>

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Blokově diagonální matice tvaru ↓ se nazývá <u>matice v Jordanově tvaru</u>

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & J_{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & J_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

$\lambda I - A \sim \lambda I - J_A$

Dvojnásobný
pro $r(A) = 1$: $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$

pro $r(A) = 2$: $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$

Trojnásobný
pro $r(A) = 1$: $\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$

- **Pozn:** Čísla $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$ nemusí být od sebe různá

- **Věta:** Každá matice je v oboru $\mathbb{C}$ podobná matici v Jordanově tvaru.

- **Př:** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & +4 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-6 & 0 \\ -2 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda^2-8\lambda+16) = (\lambda-4)^3$ $\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ :2 \end{matrix} \end{array}$ $r() = 1$

$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\vec{h_1} = (0,0,1)\alpha$ $\vec{h_2} = (1,2,0)\beta$

$\overset{\vec{h_1}}{\phantom{x}}$ $\underbrace{\begin{matrix} 2a-b=0 \\ -2a+b=1 \\ \text{nelze!} \end{matrix} \quad \overset{\vec{h_2}}{\begin{matrix} 2a-b=1 \\ -2a+b=0 \\ \text{nelze!} \end{matrix}}}_{\text{nejde z nich udělat zob. vektor}}$ $\leftarrow \vec{h}$

Další zob. vektor, ale musí $\exists$:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & \beta \\ \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{0} & | & \cancel{2\beta} \\ -2 & 1 & 0 & | & \alpha \end{pmatrix} :2$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & \beta \\ -2 & 1 & 0 & | & \alpha \end{pmatrix}$ pro $\alpha = 1; \beta = 1$: $\vec{h_3} = (1; 2; -1)$

$(1; 1; 0)$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \overset{\vec{h_1}}{0} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Př:** $\lambda_{1,2} = 1+i$
$\lambda_{3,4} = 1-i$

$J = \begin{pmatrix} 1+i & & & \\ & 1+i & & \\ & & 1-i & \\ & & & 1-i \end{pmatrix} \cdot J_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ +1 & 1 & & \\ & & 1 & +1 \\ & & +1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ +b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & +b & a \end{pmatrix}$

- **Př:**

$J = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & & \\ & 2+i & & \\ & & 2-i & 1 \\ & & & 2-i \end{pmatrix}$ $J_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

# PROSTORY SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

- **Definice:** Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $C$. Zobrazení $V \times V \Rightarrow C$ s vlastnostmi: ↖ komplexní prostor
  ① $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  ② $(x,y) = \overline{(y,x)}$
  ③ $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$
  ④ $(x+z, y) = (x,y) + (z,y)$
  se nazývá vektorový součin. Prostor, na kterém je definován skalární součin se nazývá unitární prostor. Skalární součin pro reálný prostor se definuje analogicky a prostor se nazývá eukleidovský

- **Věta:** Nechť $V$ je $\mathbb{R}$ vektorový prostor. Potom:
  ① $(x, \lambda y) = \lambda (x,y)$
  ② $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$
  ③ $(0,x) = (x,0) = 0$

$$(x,\lambda y) = (\lambda y, x) = \lambda (y,x) = \lambda (x,y) \quad \text{jen } \mathbb{R}!$$
$$(x,\lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}\,\overline{(y,x)} = \bar{\lambda}(x,y) \quad \text{pro } \mathbb{C}!$$

$\mathbb{R}^2$: $(a,b)(c,d) = ac + bd$

$$P_1 \quad \int_1^2 (ax+b)(cx+d)\,dx = \int_1^2 (acx^2 + bcx - adx + bd)\,dx = \left[\frac{acx^3}{3} + \frac{bcx^2}{2} + \frac{adx^2}{2} + bdx\right]^2 =$$
$$= \frac{7}{3}ac + \frac{3}{2}bc + \frac{3}{2}ad + bd = (a,c)(b,d)$$

- **Věta:** Cauchy - Schmarz: Nechť $V$ je euklidovský prostor. Potom:

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$$

$$(a,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k$$

- **Definice:** Nechť $V$ je vektorový prostor. Funkce $\nu : V \to R$ se nazývá ~~nom~~ norma jestliže:
  ① $\nu(x) \geq 0$, $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  ② $\nu(\lambda x) = |\lambda|\, \nu(x)$
  ③ $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$
  Norma $\nu(x)$ se značí $\|x\|$ = délka

- **Definice:** Nechť $V$ je prostor s normou. Potom číslo $p(x,y) = \|x-y\|$ nazýváme vzdálenost vektorů $x, y$

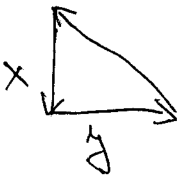
- **Věta:** Nechť $V$ je prostor s normou. Potom
  ① $p(x,y) \geq 0$; $p(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  ② $p(x,y) = p(y,x)$
  ③ $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$
  ④ $p(x+a, y+a) = p(x,y)$

  } metrický prostor

**Věta:** Nechť V je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že vektory x, y jsou ortogonální (kolmé) $x \perp y$, jestliže $(x,y)=0$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2x = \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_0^{2\pi} = 1-1=0$$

**Věta:** Pythagorova věta v euklidovském prostoru platí $x \perp y$ právě tehdy když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



$$\|x+y\|^2 = (x+y; x+y) = (x,x)+(x,y)+(y+x)+(y,y) =$$
$$= \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2$$

$\vec{w} = (2i, 3i) \quad \vec{v} = (1,1)$

$\vec{w} \cdot \vec{v} = 2i + 3i = 5i$

$\vec{w} + \vec{v} = (1+2i; 1+3i)$

$\|\vec{w}\|^2 = 2i(-2i) + 3i(-3i) = 12$

$\|\vec{v}\|^2 = 2$

**Pozn.:** V unitárním prostoru pouze $x \perp y = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

**Věta:** Nechť $v_1 \dots v_n$ jsou nenulové navzájem ortogonální vektory. Potom jsou lineárně nezávislé.

$v_1, v_2, \dots v_n$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

$$\underbrace{\alpha_1 (v_1, v_1)}_{\neq 0} + \alpha_2 \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{(v_2, v_1)} + \dots \alpha_n \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{(v_n, v_1)} = 0$$

$\alpha_1 = 0$

-<u>Definice</u>: Báze prostoru V tvořená navzdjem ortogonálními vektory se nazývá <u>ortogonální báze</u>. Jsou-li navíc prvky báze velikosti 1 je to <u>ortonormální báze</u>.

-<u>Věta</u>: V každém konečnědimenzionálním prostoru se skalárním součinem existuje ortogonální báze => takže i ortonormální.

$(1;0;0)$
$(0;1;0)$ = ortonormální báze
$(0;0;1)$

-<u>Důkaz</u>: Gram-Schmidtův ortogonalizační proces:

$(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ .. nějaká báze
$g_1 = v_1$
$g_2 = v_2 + \alpha g_1$ $\qquad \underset{\underset{0 \text{ .. aby bylo ortogonální}}{\parallel}}{(g_2, g_1)} = (v_2, g_1) + \alpha(g_1, g_1) \Rightarrow \alpha = \dfrac{-(v_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$

$g_1, g_2, v_3, \ldots, v_k$
$g_3 = v_3 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_1$ $\qquad (g_3, g_1) = (v_3, g_1) + \beta_1(g_1, g_1) + \beta_2 \overbrace{(g_2, g_1)}^{\text{tyhle už jsou } = 0 \text{ .. jsou kolmé}}$

$$\beta_1 = -\frac{(v_3, g_1)}{(g_1, g_1)}$$

$$(g_3, g_2) = (v_3, g_2) + \beta_1 \overbrace{(g_1, g_2)}^{0} + \beta_2 (g_2, g_2)$$

$$\beta_2 = -\frac{(v_3, g_2)}{(g_2, g_2)}$$

$\vdots$

$g_1, g_2, g_3, g_r, v_{r+1}, \ldots, v_k$

$$g_{r+1} = v_{r+1} + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \ldots + \gamma_r g_r$$

$$(g_{r+1}, g_1) = (v_{r+1}, g_1) + \gamma_1 (g_1, g_1) + \gamma_2 \overbrace{(g_2, g_1)}^{0} + \ldots + \gamma_r \overbrace{(g_r, g_1)}^{0}$$

$$\gamma_1 = -\frac{(v_{r+1}, g_1)}{(g_1, g_1)} \quad \ldots \quad \gamma_i = -\frac{(v_{r+1}, g_i)}{(g_i, g_i)}$$

$v_1, v_2, \ldots v_k$ generují prostor $\mathbb{R}^k$
$g_1, g_2, \ldots, g_k$ generují ten samý prostor, nemůžou generovat míň ani víc, protože to jsou LK $v_1, v_2 \ldots v_k$

<u>Př</u>: $v_1 = (1,1,1,1)$
$v_2 = (1,3,5,7)$
$v_3 = (-2,1,1,3)$

$g_1 = (1,1,1,1)$
$g_2 = (1,3,5,7) + \alpha(1,1,1,1)$ $\qquad (g_2, g_1) = (1,3,5,7)(1,1,1,1) + \alpha(1,1,1,1)(1,1,1,1)$
$g_2 = (-3,-1,1,3)$ $\qquad 0 = 16 + 4\alpha$
$\qquad \alpha = -4$

$g_3 = (v_3 + \beta_1(1,1,1,1) + \beta_2(-3,-1,1,3)$
$(g_3, g_1) = (-2,1,1,3)v_1 + \beta_1(1,1,1,1)(1,1,1,1) + \beta_2 \overbrace{(1,1,1,1)(-3,-1,1,3)}^{g_1 \quad 0 \quad g_2}$
$0 = 4 + 4\beta_1$
$\beta_1 = -1$ $\qquad \beta_2 = -\frac{9}{10}$ $\qquad g_3 = (-3,9,-9,3) \cdot \frac{1}{10} = (-1,3,-3,1)$

$(g_3, g_2) = (-2,1,1,3)(-1,3,5,7) + \beta_1 \overbrace{(1,1,1,1)(-3,-1,1,3)}^{g_1 \quad 0 \quad g_2} + \beta_2(-3,-1,1,3)(-3,-1,1,3)$

Ortogonální báze: $\|(1,1,1,1)\| = 2$

$\|(-3,-1,1,3)\| = \sqrt{20}$

$\|(-1,3,-3,1)\| = \sqrt{20}$

Ortonormální báze: $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$

$\frac{1}{\sqrt{20}}(-3,-1,1,3)$

$\frac{1}{\sqrt{20}}(-1,3,-3,1)$

**Př** Prostor polynomů

$$p(x)q(x) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,q(x)\,dx$$

$P_2$: $1$, $x$, $x^2$

$p_1 = 1$

$p_2 = x + \alpha . p_1 = x + \alpha \Rightarrow x + \frac{3}{2}$

$$\int_1^2 (x - \alpha) = \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_1^2 = 2 - 2\alpha - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{3}{2} - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

$$p_3 = x^2 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 = x^2 + \beta_1 + \beta_2\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow x^2 + 3x - \frac{41}{6}$$

$$\beta_1 = -\frac{(x^2, p_1)}{(p_1, p_1)}$$

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$$

$$\beta_2 = \frac{-(x^2, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = 3$$

$$(x^2, p_2) = \int_1^2 x^2\left(x - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{12}$$

ortogonální báze: $1$

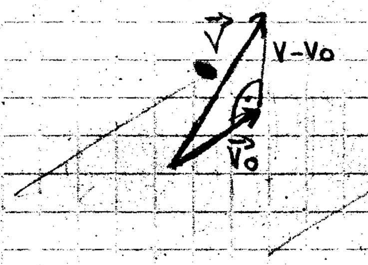
$x + 3/2$

$x^2 + 3x - 41/6$

-**Důsledek:** V každém takovém prostoru existuje ortonormální báze.

# ORTOGONÁLNÍ PRŮMĚT VEKTORU DO PROSTORU

- **Definice:** Nechť $V$ je eukleidovský prostor konečné dimenze, $V_1$ jeho podprostor, $V_1 \neq o$, $V_1 \neq V$, nechť $v \in V$, $v \notin V_1$. Vektor $v_0$ se nazývá ortogonální průmět vektoru $v$ do podprostoru $V_1$ jestliže $v_0 \in V_1$, $(v - v_0) \perp V_1$



- **Definice:** Nechť $b_1, b_2, \dots, b_k \in V$. Matice:

$$\begin{pmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \cdots & (b_1, b_k) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \cdots & (b_2, b_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_k, b_1) & (b_k, b_2) & \cdots & (b_k, b_k) \end{pmatrix} = G$$

se nazývá Gramova matice vektorů $b_1, \dots, b_k$

- **Věta:** Nechť $V$ je eukleidovský prostor, $b_1 \dots b_k \in V$. Pro Gramovu matici $G$ vektorů $b_1 \dots b_k$ platí:

① $G$ je symetrická matice
② $G$ je regulární právě když $v_1 \dots v_k$ jsou lineárně nezávislé.

- **Věta:** Nechť $\emptyset \neq V_1 \neq V$. Potom pro $v \in V$, $v \notin V_1$ existuje jednoznačně určený ortogonální průmět do $V_1$, $v_0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k$, kde $b_1 \dots b_k$ je báze prostoru $V_1$. Je-li $b_1 \dots b_k$ ortogonální báze, je

$$\lambda_i = \frac{(v, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

Pro každé $x \in V_1$ je $\|v - x\| \geq \|v - v_0\|$ a rovnost nastává jen při $x = v_0$

- **Př:** Prostor: $(1,1,1,1)$ $(1,1,1,-1)$ $(1,-1,1,1)$
$V_1 = (1,2,3,4)$

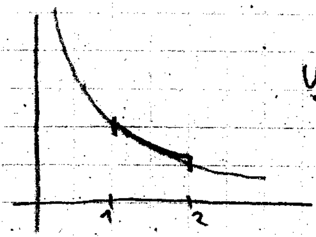
$a(1,1,1,1) + b(1,1,1,-1) + c(1,-1,1,1)$

$$\begin{aligned} 4a + 2b + 2c &= 10 \\ 2a + 4b \quad &= 2 \\ 2a \quad + 4c &= 6 \end{aligned}$$

$c = 0$
$a = 3$
$b = -1$

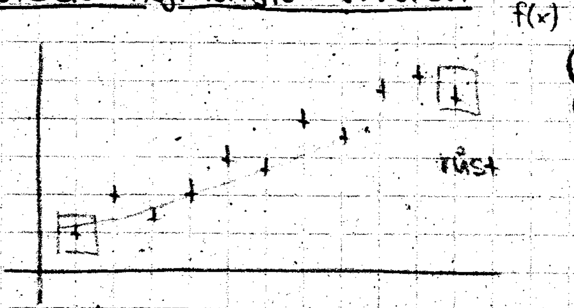
$V_0 = (2,2,2,4)$

**Př:** Najdete kvadratickou funkci podobnou $f = \frac{1}{x}$ na $I \in \langle 1; 2 \rangle$



$y = ax^2 + bx + c$

- Metoda nejmenších čtverců:



$(x, y)$
$y = f(x)$

Hledám jednoduchou funkci, která nejlépe vystihuje chování bodů

**Např:** parabola $Y = ax^2 + bx + c$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 5 | 3 | 2 | 4 | 10 | 14 |

$4a - 2b + c = 5$
$1a - b + c = 3$
$c = 2$
$a + b + c = 4$
$4a + 2b + c = 10$
$9a + 3b + c = 14$

Neřešitelná soustava, ale chci najít alespoň přibližně

$A\vec{x} = \vec{b}$

$ax^4 + bx^3 + cx^2$

$$\left.\begin{array}{l} 115a + 27b + 19c = 1381 \\ 27a + 19b + 3c = 56 \\ 19a + 3c + 6c = 38 \end{array}\right\}$$ vypočítat kompem

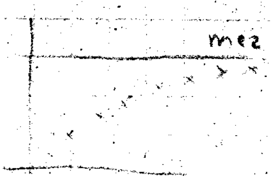
$Y = ax^2 + bx + c$

$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$
$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2$
$\vdots$
$ax_n^2 + bx_n^2 + c = y_n$

$\cancel{ax_i^4}$

$a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i$
$a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i = \sum x_i y_i$
$a\sum x_i^2 + b\sum x_i + cn = \sum y_i$

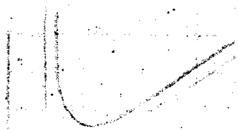
pro přímku



$Y = a + \frac{b}{x}$

$a + \frac{b}{x_1} = y_1$
$a + \frac{b}{x_2} = y_2$
$\vdots$
$a + \frac{b}{x_n} = y_n$

$a.n + b\sum \frac{1}{x_i} = \sum y_i$
$a\sum \frac{1}{x_i} + b\sum \frac{1}{x_i^2} = \sum \frac{y_i}{x_i}$



$Y = ax + b + \frac{c}{x}$

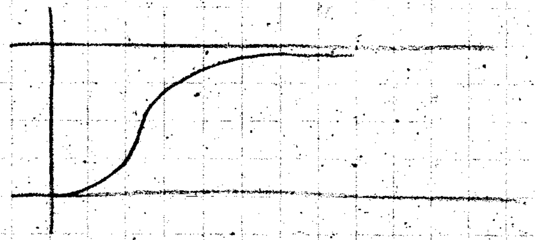
$Y = a.b^t$

$\Big\downarrow \ln$

| | |
|---|---|
| $x_i$ | |
| $y_i$ | |
| $\ln y_i$ | |

$\ln Y = \ln a + t.\ln b$

Nutná podmínka správně zvolené lineární funkce $\sum y_i = \sum Y_i$
nelineární funkce $\prod y_i = \prod Y_i$ $\qquad \prod$ = součin



---

-**Definice:** Nechť V je euklidovský prostor, $U \in V$. Množina všech $x \in V$ takových, že $x \perp U$ se nazývá ortogonálním doplňkem prostoru U $U^\perp$

-**Věta:** Ortogonální doplněk $U^\perp$ je podprostorem prostoru V, navíc $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

-**Důsledek:** $U + U^\perp = V$, $U \cap U^\perp = o$

-**Věta:** $(U^\perp)^\perp = U$

-**Př:** $(1,2,1,3,1)$ $\quad a+2b+c+3d+e = 0$
$(2,-1,-1,1,2)$ $\quad 2a-b-c+d+2e = 0$
$(3,1,2,-1,-1)$ $\quad 3a+b+2c-d-e = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$a = -1$
$[\, d = 2;\ e = 0$
$b = -5$
$c = 5$

$[\, d = 0;\ e = 1$
$c = 2$
$b = -\frac{6}{5}$
$a = -\frac{3}{5}$

$U^\perp = \langle(-1;-5;5;2;0);(-3;-6;10;0;5)\rangle$

-**Př:** $x + x^2$ $\quad \langle 0;2\rangle$ $\quad y = ax^2 + bx + c$

$$\int_0^2 (ax^2+bx+c) = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{8}{3}a + \frac{4}{2}b + 2c = 0}$$

$$\int_0^2 (x+x^2)(ax^2+bx+c) = \int_0^2 (ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + cx)\,dx =$$

$$= \left[a\frac{x^5}{5} + a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{52}{5}a + \frac{30}{3}b + \frac{14}{3}c = 0}$$

$$\begin{array}{r} 8a + 6b + 6c = 0 \\ \underline{116a + 100b + 70c = 0} \\ -17b - 47c = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} c = 17 \\ b = -47 \\ a = 45/2 \end{array}$$

$\underline{\frac{45}{2}a - 44b + 17c}$

# BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

-**Definice:** Nechť $V$ je reálný vektorový prostor. Zobrazení $\varphi: V \times V \to R$ se nazývá bilineární forma na $V$, jestliže:

$\forall x, y, z \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ platí:

① $\varphi(x+z, y) = \varphi(x, y) + \varphi(z, y)$
② $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
③ $\varphi(x, y+z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z)$
④ $\varphi(x, \lambda y) = \lambda \varphi(x, y)$

$R^2 \times R^2 \to R$ $\quad \varphi((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \boxed{2u_1v_1 + u_1v_2 - 3u_2v_1 + u_2v_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi((1,2),(3,1)) = 6 + 1 - 18 + 2 = -9 \\ \varphi((3,1),(1,2)) = 6 + 6 + 3 + 2 = 11\end{array}\right\}$$ není to komutativní

$$\varphi((1,1),(1,1)) = -3$$

$$\overbrace{2u_1v_1 - \underbrace{u_1v_2 + u_2v_1}_{} + 2u_2v_2}$$

pokud jsou stejné je to komutativní, jinak ne!

$b_1, b_2, \dots, b_n$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \\ u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n \end{array}\right\}$ lineární kombinace báze

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \varphi((\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n), (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n)) = \\ &= \alpha_1 \varphi(b_1; \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n) + \\ &+ \alpha_2 \varphi(b_2; \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n) + \dots \\ &+ \alpha_n \varphi(b_n; \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n) = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \varphi(b_1, b_1) + \alpha_1 \lambda_2 \varphi(b_1, b_2) + \dots + \alpha_1 \lambda_n \varphi(b_1, b_n) + \dots \\ &+ \alpha_2 \lambda_2 \varphi(b_2, b_1) + \alpha_2 \lambda_2 \varphi(b_2, b_2) + \dots + \alpha_2 \lambda_n \varphi(b_2, b_n) + \dots\end{aligned}$$

-**Definice:** Matice

$$A = [\varphi(b_i, b_j)] = \begin{pmatrix} \varphi(b_1; b_1) & \cdots & \varphi(b_1, b_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(b_n; b_1) & \cdots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

se nazývá matice bilineární formy v bázi $b_1 \dots b_n$.

-**Věta:** Nechť $V$ je reálný vektorový prostor, $\varphi$ bilineární forma, $A$ matice této formy v bázi $b_1 \dots b_n$. Potom $\forall x, y \in V$:
$\varphi(x, y) = \hat{x}^T A \hat{y}$

$(1,0)$ $\quad \varphi((1,0),(1,0)) = 2$
$(0,1)$ $\quad \varphi((1,0),(0,1)) = 1$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$b_1 = (1,-1)$
$b_2 = (-1,1)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b_1 = (1,-1)$
$b_2 = (-2,1)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$

- **Věta:** Nechť $\psi$ je bilineární forma, $A$ matice této formy v bázi $b_1 \dots b_n$, $B$ matice formy v bázi $g_1, \dots g_n$, $T$ matice přechodu od $b_1 \dots b_n$ k $g_1 \dots g_n$. Potom:

$$B = T^T A T$$

- **Definice:** Řekněme, že čtvercová matice $A, B$ jsou kongruentní jestliže existuje regulární matice $T$ tak, že $B = T^T A T$.

- **Tvrzení:** Vztah kongruence je ekvivalentní.

- **Věta:** Jestliže $A, B$ jsou kongruentní, potom existuje prostor $V$ a forma $\psi$ taková, že $A$ i $B$ jsou matice této formy.

- **Definice:** Bilineární forma se nazývá symetrická, jestliže $\psi(x,y) = \psi(y,x)$, $\forall x,y$.

- **Definice:** Nechť $\psi$ je symetrická bilineární forma na prostoru $V$. Zobrazení $\mathcal{H}: V \to R$ definované $\mathcal{H}(x) = \varphi(x,x)$ se nazývá kvadratická forma na $V$.

- **Věta:** Nechť $\psi_1$ a $\psi_2$ jsou symetrické bilineární formy takové, že $\psi_1(x,x) = \psi_2(x,x)$, $\forall x \in V$. Potom $\psi_1 = \psi_2$.

Pokračování →

-**Věta**: Nechť A je symetrická matice. Potom:

① Všechna vlastní čísla jsou reálná.
② Všechny vlastní vektory jsou reálné.
③ Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem ortogonální

-**Lemma**: Nechť A je symetrická matice, potom soustavy $Bx=0$ a $B^2x=0$ jsou ekvivalentní.

$$Bx=0 \iff B(Bx)=0 \Rightarrow B^2x=0$$

$$(Bx, Bx) = (Bx)^T Bx = x^T B^T Bx = \underline{x^T B^2 x}$$

-**Věta**: Nechť A je symetrická matice, J její Jordanův tvar $A=TJT^{-1}$. Potom J je diagonální a lze T vytvořit tak, že její sloupce tvoří ortogonální bázi.

-**Věta**: Každá symetrická matice je kongruentní s diagonální maticí

-**Definice**: Nechť A je symetrická matice. Označme:
**k** - počet kladných vlastních čísel
**z** - počet záporných vlastních čísel
**d** - násobnost vlastního čísla **0**
Trojice (k, z, d) se nazývá <u>inercie</u> matice A <u>in(A)</u>

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ nekongruentní matice s $\sigma; R^2$

-**Př**:
$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z\\ \hline x & 0 & 2 & 3\\ y & 2 & 3 & 6\\ z & 3 & 6 & 8\end{array} \quad \begin{vmatrix}\lambda & -2 & -3\\ -2 & \lambda-3 & -6\\ -3 & -6 & \lambda-8\end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 24\lambda - 36 - 36 - 9(\lambda-3) - 36\lambda - 4(\lambda-8) =$$
$$= \lambda^3 - 11\lambda^2 - 25\lambda - 13 =$$
$$= (\lambda+1)^2(\lambda-13)$$

<u>pro $\lambda = 13$:</u>

$$\begin{pmatrix}13 & -2 & -3\\ -2 & 10 & -6\\ -3 & -6 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -26 & 17\\ -1 & 5 & -3\\ -3 & -6 & 5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -26 & 17\\ 0 & 21^3 & 14^2\\ \cancel{0} & \cancel{84} & \cancel{56}\end{pmatrix} L2 \qquad (-1; -2; 3)$$

<u>pro $\lambda = -1$:</u>

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -2 & -4 & -6\\ -3 & -6 & -9\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}(2; -1; 0)\\ (3; 0; -1)\end{matrix}$$

$$g_1 = (2; -1; 0)$$
$$g_2 = (3; 0; -1) - \alpha(2; -1; 0) \qquad \alpha = +\frac{6}{5}$$

$$g_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; +1\right)$$

$$T = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & 6\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

-V

-**Věta:** Nechť $A$ je reálná matice symetrická, $in(A) = (k, z, d)$. Potom $A$ je kongruentní s $K = diag(1, -1, -1 \dots 1, 0)$

-**Důsledek:** $A, B$ jsou kongruentní právě když $in A = in B$

-**Definice:** Je-li kvadratická forma na $V$ potom inercie této formy $in(\mathcal{H})$ je rovna inercii její matice.

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_k^2 + \nu_{k+1}^2 \dots - \nu_{k+2}^2$$

-**Věta:**

-**Definice:** Řekněme, že kvadratická forma je:

| | | |
|---|---|---|
| ① Pozitivně definitní | $\mathcal{H}(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ | $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ |
| ② Pozitivně semidefinitní | $\mathcal{H}(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$<br>$\exists x \neq 0 \quad \mathcal{H}(x) = 0$ | $x^2 + 2y^2$ |
| ③ Negativně definitní | $\mathcal{H}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ | |
| ④ Negativně semidefinitní | $\mathcal{H}(x) \leq 0 \quad \forall x$<br>$\exists x \neq 0 \quad \mathcal{H}(x) = 0$ | |
| ⑤ Indefinitní | $\exists x ; \mathcal{H}(x) > 0$<br>$\exists y ; \mathcal{H}(y) < 0$ | |

-**Př:** $3y^2 + 8z^2 + 4xy + 6xz + 12yz =$

$$= \underset{\lambda}{13}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}x + \underset{\overrightarrow{f_1}}{\frac{2}{\sqrt{14}}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z\right)^2 \underset{\lambda}{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x + \underset{\overrightarrow{f_2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}y\right)^2 \underset{\lambda}{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{30}}x + \underset{\overrightarrow{f_3}}{\frac{6}{\sqrt{70}}}y + \frac{5}{\sqrt{70}}z\right)^2$$

← z předchozího příkladu vl. čísla a matice $T$

-**Věta:** Nechť $in(\mathcal{H}) = (k; z; d)$. Potom $\mathcal{H}$ je:

| | | |
|---|---|---|
| ① Pozitivně definitní | $k = n$ | $z = d = 0$ |
| ② Negativně definitní | $z = n$ | $k = d = 0$ |
| ③ Pozitivně semidef. | $z = 0$ | $k, d \neq 0$ |
| ④ Negativně semidef. | $k = 0$ | $z, d \neq 0$ |
| ⑤ Indefinitní | $k \neq 0$ | $z \neq 0$ |

-**Př:** $3y^2 + 8z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$

$$f_1, f_2 \dots f_n \quad \Big| \quad g_1 = f_1 \cdot \alpha_{11} \quad \Big| \quad (g_2, g_2) = 1$$

$$g_1, g_2 \dots g_n \quad \Big| \quad g_2 = \alpha_{22} f_2 + \alpha_{12} f_1 \quad \Big| \quad (g_2, f_1) = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 1 \end{array}\right) \qquad det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \qquad det A_x = \frac{|\alpha_{11}|}{det A}$$

↑ minor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix}} & & \alpha_{13} & 0 \\ & & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1}\eta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\eta_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\eta_n^2$$ $\overrightarrow{\text{na další straně věta}}$

-**Definice**: Hlavní minor matice A $\boxed{\Delta_i}$ je determinant matice tvořené prvními $i$ ~~řádky~~ řády a sloupci matice A.

-**Věta**: Silvestrovo kritérium
Forma $\mathcal{Q}$ je pozitivně definitní právě když všechny její hlavní minory jsou kladné.

-**Věta**: Diagonálně dominantní matice jsou matice jejichž prvky na diagonále jsou větší než-li ~~p~~ součet prvků na daném řádku
=> je pozitivně definitní.

-**Př**: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz - 2yz$

Převeďte tuto formu na součet čtverců.

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2ab + 2bc.$

$\boxed{x^2} + 2y^2 + 3z^2 - \boxed{2xy} + \boxed{4xz} - 2yz$ ↓ doplnění na čtverec

$(x-y+2z)^2 = \boxed{x^2} + y^2 + 4z^2 \boxed{-2xy} + \boxed{4xz} - 4yz$
$(x-y+2z)^2 + y^2 - z^2 + 2yz$
$| \ (x-y+2z)^2 + (y+z)^2 - 2z^2 \ |$

-**Př**: $2xy + 2xz - 4yz$    $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$

$\tilde{x} = x+y$
$\tilde{y} = x-y$

# PŘÍKLADY

**Př:** $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x - 6 = 0$  pro $c = 2$

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & -3 & 5 & -4 & -6 & 0 & -4 & -6 \\
2 & & 2 & -2 & 6 & 4 & 6 & 12 & 16 \\
\hline
 & 1 & -1 & 3 & 2 & 2 & 6 & 8 & \boxed{16}
\end{array}$$

**Př:** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  $c = \pm 1, 2, 3, 6$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
1 & & 1 & -5 & +6 \\
\hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x-1)(x^2 - 5x + 6)$

$D = 25 - 4.6$
$D = \cancel{24}\ 25 - 24$
$D = 1$

$c_1, c_2 = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{cases}$

$q(x) = (x-1)(x-3)(x-2)$

**Př:** $x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x + 16 = 0$  $p = \pm \cancel{1}, 2, 4, 8, 16$ ← kladné nemá

nedá to nulu

jakékoliv liché dá lichý výsledek.. nejde!

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 4 & 2 & -4 & 8 & 16 \\
-2 & & -2 & -4 & 4 & 0 & -16 \\
\hline
 & 1 & 2 & -2 & 0 & 8 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x+2)(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8)$  $p = -$ [illegible] $2, 4, 8$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & -2 & \cancel{8}0 & 8 \\
-2 & & -2 & 0 & +4 & -8 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & +4 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x+2)(x+2)(x^3 - 2x + 4)$  $p = -2, 4$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -2 & 4 \\
-2 & & -2 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x+2)(x+2)(x+2)(x^2 - 2x + 2)$ - reálný rozklad  $D = 4 - 4.2 = -4$

$x_{4,5} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i$

$(x+2)(x+2)(x+2)(x-1-i)(x-1+i)$ - komplexní rozklad

39

**Př.** $6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 11 + 2$  $p = 1, 2$  $q = 1, 2, 3, 6$  $c = -1; 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 11 & 18 & 11 & 2 \\ -2 & & -12 & 2 & -40 & \\ \hline & 6 & -1 & 20 & & \searrow \text{není} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 11 & 18 & 11 & 2 \\ -\frac{1}{2} & & -3 & -4 & -7 & \cancel{\frac{1}{2}}-2 \\ \hline & 6 & 8 & 14 & 84 & \boxed{0} \end{array}$$

← pokud vyjde dole zlomek nemá cenu pokračovat, protože polynom je celočíselný

$(x+\frac{1}{2})(6x^3+8x^2+14x+4)$

$2(x+\frac{1}{2})(3x^3+4x^2+7x+2)$

$p = 1, 2$  $q = 1, 2, 3$  $c = -1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 4 & 7 & 2 \\ -\frac{1}{3} & & -1 & -1 & -2 \\ \hline & 3 & 3 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$6(x+\frac{1}{2})(x^2+x+2)$ = reálný rozklad

**Př:** $x^4 + 16$ – doplním na čtverec = $a^2 + b^2$ – chybí 2ab  $\boxed{\text{U ZKOUŠKY}}$

$\Downarrow$

$x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2+4)^2 - 8x^2 = (x^2+4-\sqrt{8}x)(x^2+4+\sqrt{8}x)$

## — VEKTOROVÝ PROSTOR

**Př:** $(0; a; b)$ : $\langle (0;1;0); (0;0;1) \rangle$

$(0; a; a+1)$ : X – neobsahuje nulový vektor $(0;0;1)$

$(0; a; a^2)$ : X – není : $(0;a;a^2) = (0;2;4) \Rightarrow 2(0;2;4) = (0;4;8) \neq (0;a;a^2)$

$(a; b; a+b)$ : $\langle (1;0;1); (0;1;1) \rangle$

$(a; a+b; a+b+c)$ : $\langle (1;1;1); (0;1;1); (0;0;1) \rangle$ = báze

$(a; 2a; 3a)$ : $a(1;2;3)$ – lineární obal

? jaká množina je podprostor

**Př:** $\vec{u} = (2;1;3;1)$  Jsou lineárně závislé ?

$\vec{v} = (-1;1;2;3)$

$\vec{w} = (2;3;-1;4)$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ ← můžeme použít, pokud 2 vektory nejsou očividně lineárně závislé

$2 = 2a - b$

$3 = a + b \rightarrow a = 3 - b$

$-1 = 3a + 2b$

$4 = a + 3b \rightarrow a = 4 - 3b$

$2 \neq 5 - \frac{1}{2}$

$3 - b = 4 - 3b$  $a = 3 - b$

$2b = 1$  $a = \frac{5}{2}$

$b = \frac{1}{2}$

Vektory jsou lineárně nezávislé.

**Př:** $\sin^2 2x = f_1$ Jsou lineárně závislé ?
$\cos^2 2x = f_2$
$\sin^4 x = f_3$
$\cos 4x = f_4$

$f_1 = (2\sin x \cos x)^2 = 4\sin^2 x\cos^2 x = (1-\cos^2 x)4\cos^2 x = 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$
$f_2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2 = 4\cos^4 x + 1$
$f_3 = (1-\cos^2 x)^2 = 1 + \cos^4 x$
$f_4 = \cos^4 x$

Všechny funkce jsou lineární kombinací fcí $\cos^2 x$ a $\cos^4 x$. ~~to~~ Je to podprostor dimenze nejvýše 3, ale má 4 prvky, takže musí být LZ

**Př:** $\boxed{\text{U zkoušky}}$

(1; 2; 1; 3) Generujou prostor $R^4$ ?
(3; 4; 1; 2) "Budu postupně zkoušet"
~~(1; 0; -1; 4)~~
(2; -2; 3; 1)
~~(5; 6; 1; 1)~~

3v: $a + 3b = 1 \rightarrow a = 1 - 3b$
$2a + 4b = 0$
$1a + b = -1 \rightarrow a = -1 - b$
$3a + 2b = -4$

$\left.\right\}$ $1 - 3b = -1 - b$, $-2b = -2$, $b = 1$ $\quad a = 1 - 3$, $a = -2$

$-4 + 4 = 0$
$-6 + 2 = -4$

$\Rightarrow$ 3. vektor je LZ s 1. a 2. takže ho můžu vyškrtnout, protože nic nového nevygeneruje

4v: $a + 3b = -2 \rightarrow a = -2 - 3b$
$2a + 4b = -2$
$a + b = 3 \rightarrow a = 3 - b$
$3a + 2b = 1$

$\left.\right\}$ $3 - b = -2 - 3b$, $2b = -5$, $b = -\frac{5}{2}$ $\quad a = -2 - \frac{15}{2}$, $a = \ldots$ prostě LNZ takže generuje

5v: $a + 3b - 2c = 5$ ①
$2a + 4b - 2c = 6$ ② $/ - 2\text{I}$
$a + b + 3c = 1$ ③ $/ - \text{I}$
$3a + 2b + 1c = 1$ ④ $/ - 3\text{I}$

$-2b + 2c = -4$
$-2b + 5c = -4$
$-7b + 7c = -14$

$\left.\right\}$ $c = 0$, $b = 2$

5. vektor je LZ takže ho škrtneme

Negeneruje to $R^4$ (máme 3 LNZ a potřebujeme 4 LNZ)

**Př:** $\vec{v}(0; 1; 3; 1)$ Najít souřadnice $\vec{v}$ v bázi $\vec{b}$

$\vec{b_1}(1, 1, 2, 1)$
$\vec{b_2}(2, 3; 1, -1)$
$\vec{b_3}(-2; -1; -1; 2)$
$\vec{b_4}(-1; 1; -3; -2)$

I $a + 2b - 2b - d = 0$
II $a + 3b - c + d = 1$
III $2a + b - c - 3d = 3$
IV $a - b + 2c - 2d = 1$

I
II $-$ I: $b + c + 2d = 1$
III $-$ 2I: $-3b + 3c - d = 3$
IV $-$ I: $-3b + 4c - d = 1$

II + 3I: $6c + 5d = 6$
III + 3I: $7c + 5d = 4$ $\ominus$
$-c = 2$
$\underline{\underline{c = -2}}$

$b = 2 + \frac{36}{5} = 1$
$5b - 10 + 36 = 5$
$5b = -21$
$b = -\frac{21}{5}$

$-12 + 5d = 6$
$5d = 16$
$d = +\frac{16}{5}$

$5a + 21 - 20 - 36 = 1$
$5a = 36$
$a = \frac{36}{5}$

$\boxed{\vec{v}\left(\frac{36}{5}; -\frac{21}{5}; -2; \frac{16}{5}\right)}$

↑ pokud vyjde jednoznačně tato soustava nemusíme kontrolovat bázi. Pokud nevyjde

41

**Př:** $\vec{v_1} = (3,2,2,1)$ Najděte bázi průniku a součtu podprostorů w a v
$\vec{v_2} = (1,1,2,0)$

$\vec{w_1} = (-1,-1,2,2)$
$\vec{w_2} = (3,2,-2,-1)$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 3a+b = -c+3d \\ \text{II} & 2a+b = -c+2d \\ \text{III} & 2a+2b = 2c-2d \\ \text{IV} & a = 2c-d \end{array}$$

$$a = 2a - a$$
$$a = a$$
$$0 = 0$$ -nekonečně mnoho řešení → dosadíme ⇒ $a=1$ ; $c=1$ ; $d=1$ ; $b=-1$

$$\text{II}-\text{I}: \quad -a = -d$$
$$\text{III}-\text{II}: \quad -4a = 4c - 8d$$
$$-4d = 4c - 8d$$
$$4c = 4d$$
$$c = d = a$$

~~(1, 1; 1, 1)~~

$$a.\vec{v_1} + b.\vec{v_2} = c.\vec{w_1} + d.\vec{w_2}$$
$$\Downarrow$$
$$(3a+b;\ 2a+b,\ 2a+2b,\ a) \Rightarrow (2;1;0;1)$$

jeden z průniků $R^1$

---

**Př:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 17 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.3 - 1.3 - 2.1 = -2$$
$$1.1 + 3.4 + 4 = 17$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{12} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^6 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & \binom{13}{2} \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Př:**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ d & d+e & d+e+f \\ g & g+h & g+h+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & \cancel{b+}e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

~~a = a+d+g~~
~~a+b = b+e+h~~
~~a+b+c = c+f+i~~

$a = a+d+g \Rightarrow d = \underline{0}$
$d = d+g \Rightarrow g = \underline{0}$
$g = g$

$a+b = b+e+h \Rightarrow \underline{a=e}$
$d+e = e+h \Rightarrow d=h \Rightarrow h=\underline{0}$
$g+h = h \Rightarrow g=\underline{0}$

$a+b+c = c+f+i \Rightarrow b=f$
$\cancel{d}+e+f = f+i \Rightarrow e=i=a$
$\cancel{g+h}+i = i$

- tvar komutativní matice s maticí A: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c$$

**Př:** $X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cancel{a+3c}\;a+2b & c+2d\\ \cancel{2a+5c}\;3a+5b & 3c+5d\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}a+2b=-1\;|\cdot 3\\ 3a+5b=2\end{array}\right\}\ominus \qquad \left.\begin{array}{l}c+2d=3\;|\cdot 3\\ 3c+5d=-2\end{array}\right\}\ominus$$

$b=-5$ $\qquad$ $d=7$

$a-10=-1$ $\qquad$ $c+14=3$

$a=9$ $\qquad$ $c=-11$

$$X=\begin{pmatrix}9&-5\\7&-11\end{pmatrix}$$

**Př:** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&5&2&6&4\end{pmatrix}_{\circ}$ – Vyjádři identickou transpozici

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&4&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&4&5&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&4&3&6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&5&4&6\end{pmatrix}\circ\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&2&4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&5&4&2&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&5&2&4&6\end{pmatrix}$$

$1\Rightarrow 3\Rightarrow 5\Rightarrow 6\Rightarrow 4\Rightarrow 2\Rightarrow 1$ $\qquad$ $\rightarrow\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&6&5\end{pmatrix}$

**Př:** Pomocí Laplasova pravidla upravte

$$\begin{vmatrix}2&1&3&1\\3&0&0&-1\\-1&2&4&2\\1&3&2&0\end{vmatrix}\leftarrow=3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}1&3&1\\2&4&2\\3&2&0\end{vmatrix}+(-1)(-1)^2\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&2&4\\1&3&2\end{vmatrix}$$

**Př:**

$$\begin{vmatrix}2&1&3&1&-2\\-1&-4&-2&0&2\\-2&3&4&2&-1\\1&2&3&2&1\\3&4&1&1&0\end{vmatrix}\begin{array}{l}-2IV\\+IV\\+2IV\\ \\-3IV\end{array}=\begin{vmatrix}0&-3&-3&-3&-4\\0&-2&1&2&3\\0&7&10&6&1\\1&2&3&2&1\\0&-2&-8&-5&-3\end{vmatrix}=\begin{array}{c}\cancel{\ }\;-I\;\;-I\;\;-I\\ \begin{vmatrix}-3&-3&-3&-4\\-2&1&2&3\\7&10&6&1\\-2&-8&-5&-3\end{vmatrix}\end{array}=\begin{vmatrix}1&-2&2&3\\-3&-3&-3&4\\10&7&6&1\\-8&-2&-5&-3\end{vmatrix}=\begin{array}{c}-3IV\\ \begin{vmatrix}-3&0&0&-1\\-2&3&4&5\\7&3&-1&-6\\-2&-6&-3&-1\end{vmatrix}\end{array}=\begin{vmatrix}0&0&0&-1\\-17&3&4&5\\25&3&-1&-6\\1&-6&-3&-1\end{vmatrix}=$$

$$=-1\begin{vmatrix}-17&3&4\\25&3&-1\\1&-6&-3\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\-I\\+2I\end{array}=-1\begin{vmatrix}-17&3&4\\42&0&-5\\-33&0&5\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}42&-5\\-33&5\end{vmatrix}=-3(210-165)=-3\cdot 45=\underline{\underline{-135}}$$

**Př:**

$$\begin{vmatrix}560&561&562\\563&564&565\\566&567&569\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}560&1&2\\563&1&2\\566&1&3\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\-I\\-I\end{array}=\begin{vmatrix}560&1&2\\3&0&0\\6&0&1\end{vmatrix}=\underline{\underline{-3}}$$

(sloupcové úpravy nad 2. a 3. sloupcem: $-I$, $-I$)

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ – lichá transpozice (−1)

**Př:**

$$\begin{vmatrix}x&1&4\\2&x&1\\2&-3&x\end{vmatrix}=x^3-24-2+8x+3x-2x=x^3+9x-26=0$$

$q$: ±1, ±2, ±13, ±26

$q$: 1, 2, 13, 26

| | 1 | 0 | 9 | −26 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | 4 | 26 |
| | 1 | 2 | 13 | 0 |

$(x-2)(x^2+2x+13)=0$

$D=4-4\cdot 13=-48$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm i4\sqrt{3}}{2}$$

**Ř:**

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&-1&-1&1&+1\\1&-1&-1&1&-1&1\\1&1&-1&1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1\\1&1&1&-1&1&-1\\1&-1&1&1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\+I\\-I\\+I\\-I\\+I\end{matrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-1&1&+1\\0&0&-2&0&0&2\\0&0&0&2&0&-2\\0&0&0&-2&0&2\\0&0&2&0&0&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+III\\+II\\\\\end{matrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-1&1&1\\0&0&-2&0&0&2\\0&0&0&2&0&-2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad r(A)=3$$

**Ř:**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\2&2&-3&0&1&0\\-1&-6&2&0&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\-2I\\+I\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&-4&1&1&0&1\end{array}\right)\begin{matrix}\\\\-2II\end{matrix}\sim\overset{-2I\ +I}{\xcancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)}}\sim\overset{+\frac{1}{2}II}{\xcancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)}}\sim$$

$$\sim\xcancel{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-2&0&-2&1&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)}\quad\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)\begin{matrix}+II\\\\\\\end{matrix}\sim\overset{-1\ 1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&[illegible]&2&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)}\begin{matrix}\cdot3\\\cdot3\\\\\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&-6&-3&3&0\\0&-6&-3&-6&3&0\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)\begin{matrix}+2III\\+III\\\\\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&7&-1&2\\0&-6&0&-1&1&1\\0&0&3&5&-2&1\end{array}\right)\begin{matrix}/3\\/-6\\/3\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7/3&-1/3&2/3\\0&1&0&-1/6&-1/6&-1/6\\0&0&1&5/3&-2/3&1/3\end{array}\right)$$

**Ř:** $R^4\to R^4$: $L(a,b,c,d)=(3a+b-2c-5d;\ a-2b+c-d;\ -a+3b+c-2d;\ 2a-b-3c\ [illegible])$

$3a+b-2c-5d=0$
$a-2b+c-d=0$
$-a+3b+c-2d=0$
$2a-b-3c\ [illegible]=0$

---

$a-2b+c-d=0$
$3a+b-2c-5d=0\quad /-3I$
$-a+3b+c+2d=0\quad /+I$
$2a-b-3c=0\quad /-2I$

---

$a-2b+c-d=0$
$7b-5c-2d=0$
$b+3c-3d=0$
$3b-5c+2d=0$

---

$b+3c-3d=0$
$7b-5c-2d=0\quad /-7I$
$3b-5c+2d=0\quad /-3I$

---

$-19c+19d=0$
$-11c+11d=0$

---

$c=d=1$
$a=2$
$b=1$

Ker L = 1

Jádro = (2;1;1;1)

Im L = 3 (dim U - Ker L)

$$\left.\begin{array}{l}L(1;0;0;0)=(3,1,-1,2)\\L(0;1;0;0)=(1,-2,3,-1)\\L(0;0;1;0)=(-2,1,1,-3)\\L(0;0;0;1)=(-5,-1,-2,0)\end{array}\right\}\text{generátory 4 (3 báze)}$$

Vybereme bázi:

~~$3a+b-c+2d$~~ $=\quad 3a+b=-2$
~~$a-2b+3c-d$~~ $=\quad a+2b=1$
~~$-2a+b+c-3d$~~ $=\quad -a+3b=1$
$2a-b=-3$

**Př:** $(1\ 2\ -1)$ $\quad(2\ 1\ 1)\quad$ Báze přechodu
$(2\ 3\ 1)$ $\quad(1\ 1\ -2)$
$(-1\ -4\ 2)$ $\quad(3\ 2\ 1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&2&1&3\\2&3&-4&1&1&2\\-1&1&2&1&-2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2I\\+I\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-1&-4\\0&3&1&3&-1&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\\\+3II\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-1&-4\\0&0&-5&-6&-4&-9\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 5\\/(-5)\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&10&-5&10&5&15\\0&+5&10&15&5&20\\0&0&5&6&4&9\end{array}\right)\begin{array}{l}+IV\\+2IV\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&10&0&16&9&24\\0&5&0&3&-3&2\\0&0&5&6&4&9\end{array}\right)\begin{array}{l}-2II\\\\\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&0&0&10&15&20\\0&5&0&3&-3&2\\0&0&5&6&4&9\end{array}\right)\begin{array}{l}/5\\/5\\/5\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&3/5&-3/5&2/5\\0&0&1&6/5&4/5&9/5\end{array}\right)$$

**Př:**

$$\begin{pmatrix}3&1&2&1&-1\\2&-1&3&2&2\\-1&1&-2&-1&1\\1&0&1&1&3\\4&1&3&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\2&-1&3&2&2\\-1&1&-2&-1&1\\3&1&2&1&-1\\4&1&3&2&2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-2I\\+I\\-3I\\-4I\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\0&-1&1&0&-4\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-1}&\cancel{0}&\cancel{4}\\0&1&-1&-2&-10\\\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-1}&\cancel{-2}&\cancel{-10}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&3\\0&-1&1&0&-4\\0&1&-1&-2&-10\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\+II\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\\begin{pmatrix}\textcircled{1}&0&1&1&3\\0&\textcircled{-1}&1&0&-4\\0&0&0&\textcircled{-2}&-14\end{pmatrix}\end{array}$$

$c=0;\ e=1:$ $\quad\cancel{a-b}\quad a \quad + c + d + 3e = 0$
$\qquad\qquad\qquad -b + c \quad - 4e = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad -2d - 14e = 0$

$a+d\cancel{e}+3=0 \Rightarrow a-7+3=0 \Rightarrow a=+4$
$-b+0-4=0 \Rightarrow b=-4$
$-2d-14=0 \Rightarrow d=-7$ $\qquad(4;-4;0;-7;1).t$

$c=1;\ e=0:$ $\quad a+\overset{1}{\cancel{c}}+d=0 \Rightarrow a+1+0=0 \Rightarrow a=-1$
$-b+\cancel{c}1 \quad =0 \Rightarrow b=1$
$-2d-14\cdot 0=0 \Rightarrow d=0$ $\qquad(-1;1;1;0;0).s$

$x=(4;-4;0;-7;1)t+(-1;1;1;0;0).s$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

↓ ↓ ↓

-prostor aritmetických posloupností = 2 (ze 3 je alespoň 1 LZ)

$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 & -2 \\ -5 & \lambda+7 & -3 \\ -6 & 9 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+7)(\lambda-4)+90+90-12(\lambda+7)+25(\lambda-4)+27(\lambda-4) =$$

$$= (\lambda^2 \cancel{+8} -8\lambda+16)(\lambda+7)+180-12\lambda-84+25\lambda\,100+27\lambda\,112 =$$

$$= \underbrace{\lambda^3}_{} + \underbrace{7\lambda^2}_{} \underbrace{-8\lambda^2}_{} \underbrace{-56\lambda}_{} + \underbrace{16\lambda}_{} + 112+180 \underbrace{-12\lambda}_{} -84 + \underbrace{25\lambda}_{} 100 + \underbrace{27\lambda}_{} - 112 =$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2$$

$$= \lambda^2(\lambda-1)$$

$$J = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{0} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{0} \end{pmatrix} \to +1 \text{ odd1}$$

<u>pro $\lambda = 0$:</u>

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -5 & 7 & -3 \\ -6 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4I \\ LZ \end{matrix} \sim \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \textcircled{-1} & 2 & -1 \\ 0 & \textcircled{-3} & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -a+2b-c &= 0 \\ -3b+2c &= 0 \end{aligned} \qquad \underline{c=3}: \; -3b+6=0, \; \underline{\underline{b=2}} \qquad -a+4-3=0, \; -a=-1, \; \underline{\underline{a=1}}$$

$$x_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{taky aritmetická posloupnost.}$$

<u>pro $\lambda = 0_2$:</u> $-x_1$ (minus kvůli +1 v Jordanově tvaru [2,3]) odd1 ↑

↙

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -2 & -1 \\ -5 & 7 & -3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{array}\right) LZ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) -4I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} -a+2b-c &= -1 \\ -3b+2c &= 3 \end{aligned} \qquad \underline{c=0}: \; -3b=3, \; \underline{\underline{b=-1}} \qquad -a-2=-1, \; -a=1, \; \underline{\underline{a=-1}}$$

$$x_2: \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Př:</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -2 & -4 & \lambda-8 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda-8) + 12 + 12 - 6\lambda + 2(\lambda-8) + 12(\lambda-3) =$$

$$= (\lambda^2-3\lambda)(\lambda-8) + 24 - 6\lambda + 2\lambda - 16 + 12\lambda - 36 =$$

$$= \lambda^3 \underbrace{-8\lambda^2}_{} \underbrace{-3\lambda^2}_{} + \underbrace{14\lambda}_{} + 24 \underbrace{-6\lambda}_{} + \underbrace{2\lambda}_{} - 16 + \underbrace{12\lambda}_{} - 36 =$$

$$= \lambda^3 - 11\lambda^2 + 32\lambda - 28 =$$

$$= (\lambda-7)(\lambda-2)(\lambda-2)$$