Relace: Binární relace: libov. podmnožina kartézs. součinu X x Y.| Podrelace R_1 jestl. $R_1 \subset R_2$ | relace na množ $R \subset X\ x\ X$ | slož. relace(součin) $(x,z) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists\, y \in Y : x\, R_1\, y,\ y\, R_2\, z$ inverz. relace $y\, R^{-1}\, x \Leftrightarrow x\, R\, y$ **Zobrazení:** z množ. X do množ. y každ. x nejvýš. jedno y| zobr. množ. X do množ Y $\forall\, x \in X\ \exists !\, y \in Y$ prosté $\forall\, y$ nejvýše 1 vzor na množinu P_f(pravý obor) P_f=Y bijekce jestl. *f* je prosté zobr. na množ. Y ekvivalentní množ. exist. bijekce X na Y **Ekvivalence:** E_x...iden. relace| relace reflexiv. $\forall\, x \in X\ ;\ x\, R\, x\ \ (E_x \subset R)$ symetr $x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x$ $(R = R^{-1})$ antisym $x\, R\, y \wedge y\, R\, x \Rightarrow x = y\ \ (R \cap R^{-1} \subset E_x)$ tranzit $x\, R\, y \wedge y\, R\, z \Rightarrow x\, R\, z\ \ (R \circ R \subset R)$ Tolerance reflex, symetr. relace na X; Ekvivalence reflex, symetr, tranzit rel. na X; **Př:** x<=y ... reflex. antisym., tranzit. Rozklad – podmnožina množ. X: 1) $B_i \neq \emptyset\ \forall\, i \in I$ 2) $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall\, i \neq j$ 3) průnik všech B_i=X Třídy ekvivalence – prvky rozkladu **Algebraické struktury:** binárni operace $X \times X \to X$ součet, součin, průnik, sjednocení operace komutativní $\forall\, a, b : a \circ b = b \circ a$ asociativní nezáleží na uzávorkování distributiv operace * k operaci **o** $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ neutrální prvek *e,* $a \circ e = e \circ a = a\ \forall\, a$ inverzní prvek a^{-1}, $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ | Pologrupa množin. **M** s asociativní operací | Monoid **M** s neutrál. prvkem | Grupa monoid, kde ke každ. prvku ex. inverzní | Komutativní grupa grupa s komutativ. operací **Př:** přiroz. čísla – pologrupa, přiroz. čísl. s 0 – monoid, celá čísla – grupa Okruh mn. **M** s operacemi součet(komutat. grupa) a součin(distrib. zákon); sudá čísla – okruh, mn. Z – okruh s jednotkou | dělitel. nuly nenul. prvky $a \times b = 0$ obor integrity je kruh s jednotkou bez dělitel. nuly Těleso kruh s jednotkou, ke každ. nenulov. prvku exist. inverzní prvek; množina rac. čísel, nejmenší mož. těleso **Kongruence:** kongruence modulo p mn. Z celá čísla, *p>1*, *p* přiroz.; $x = y (mod\ p) \Leftrightarrow p / x - y$ | relace kongruen je ekvival. na Z. ve třídě ekvivalence čísla, se stejným zbytkem – Zbytkové třídy module *p* **Uspořádání:** tranzit. uzávěr relace R je relace $\mathbf{R}^+$, sestávací ze všech dvojic (x,y), pro něž exist. konečný počet prvků s vlastností $x\, Rz_1Rz_2...z_kR\, y$ Reflex. tranzit. uzávěr –$\mathbf{R}^*$ k předcházejícímu se přidají prvky (x,x) Uspořádání reflex., tranzit, antisymetr relace srovnatelné pvky *xRy* nebo *yRx* Poset (X,<=)– částečně uspoř množina – exist. dvojice neporovnat prvků Relace bezprostřed. předcházení $x \leq y \wedge \forall\, z \in X,\ x \neq z \neq y\ neplatí\ x \leq z \leq y$ Hasseův diagr **Svazy:** (X, <=) ... poset | minimal, maximal, největ, nejmenš, horní závor *a,b* je *x:* $a \leq x,\ b \leq x$ supr nejm hor závor dol závor *a,b* je *x:* $x \leq a,\ x \leq b$ infim nejv dol závor Svaz – poset, v němž $\forall\, x, y \in X\ \exists\, supr, \exists\, infm$ Spojení operace supremum průnik operac infim **Př:** nekonečný svaz – přiroz čísl uspoř dělitelnost Princip duality když v libov tvrzení prohodíme průsek a spojení a uspořádání nahradíme inverzním dostáváme opět pravdivé tvrzení Idempotentnost $a \cup a = a\ \ a \cap a = a$ absorpce $a \cup (b \cap a) = a\ \ a \cap (b \cup a) = a$ distributivní $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap b)$ podsvaz svazu(x,<=) je poset (Y,<=) $Y \in X$ jesl. operace průseku a spojení zachovávají výsledky ve svazu X doplněk(komplement) prvku *x:* $\bar{x}\ \ x \cup \bar{x} = 1\ \ x \cap \bar{x} = 0$ komplementární svaz $\forall\, x \in X : \exists\, \bar{x}$ **Booleova algebra:** distributivní komplementární svaz, platí $\bar{0} = 1$, v booleově algebře každý prvek právě jeden komplement. de Morganovy zákony $\overline{a+b} = \bar{a}\,\bar{b}\ \ \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$ idempotentnost, komutativita,asociativita, absorbce, distributivita, neutrální prvky *a+0 = a, a . 1 = a, a . 0 =0, a+1=1* komplementarita $\bar{1} = 0\ \ a + \bar{a} = 1\ \ a \cdot \bar{a} = 0$ $\overline{(\bar{a})} = a$ Atom algebry X – *a,* $\forall\, x \in X:\ \ x \cap a = a$ nebo $x \cap a = 0$ Isomorfismus usp. mn. X,Y je bijekce z X do Y: $\forall\, a, b \in X\ a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$ X,Y isomor. $X \simeq Y$ **St**oneova věta Každá konečná Booleova algebra X je isomor s algebrou 2^M(množ všech podmnožin množ M), kde M je množ všech atomů algebry X Důsledky 1) 2 koneč Bool alg se stejn počet prvků – isomorf 2) každ koneč bool alg má 2^n prvků, *n*-počet jejich atom Direktní součin bool algeber: kartézský součin A_1 x A_2 s uspořádáním po složkách $(a,b) \cup (c,d) = (a \cup c; b \cup d)$ Booleova fce *f*:$(B_2)^n$ do B_2 (n >=1) klauzule(průsek, spojov) polynom $y_1 \wedge ... \wedge y_n$ nebo $y_1 \vee ... \vee y_n$ literál y_i Úplná disjunktní (konjunkt)forma obsahuje literály všech proměnných symetric rozdíl $A \nabla B = (A - B) \cup (B - A)$; $a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b$ **Pojem grafu:** automorfismus permutace na vrcholech grafu, zachovávaj hrany podgraf grafu G(V,E)- G',jestl $V' \subset V\ \ E' \subset E$ homomorfismus *f:V (G) do V(G')* $(x,y) \in E(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E(G')$ jeli *f* homo, pak $e \in E(G) \Rightarrow f*(e) \in E(G')$ vrcholov monomor *f* je prosté vrchol epimorf jeli *f* na hrano monom jeli *f** prosté hran epimor jeli *f** na monomorf jeli *f* i *f** prosté epimor jeli *f* i *f** na vnoření jeli f monomor a navíc $e \in E(G) \Leftrightarrow f*(e) \in E(G')$ isomorf jeli *f* i *f** bijekce **Neorient grafy:** úplný graf(klika) stupeň vrcholu $d_G(v)$ *f:* P_n do G je homom *f(0)=u, f(u)=v:* sled podgraf *f*(P_n) tah jeli *f* hran monom cesta jeli *f* vrcholový monomor souvislý graf $\forall \in V(G)\ \exists$ v G sled z *u* do *v* komponenty maxim souvislé podgrafy grafu G Eulerovký tah tah přes všechny hrany Graf je Eulerov jestl souvisl a všechny stupeň sudé kružnice uzavřen sled délky alespoň 3 Strom souvisl graf bez kružni les graf, jehož komponenty stromy faktor je podgraf a V(G)=V(G') kostra faktor grafu, který je strom |V(G)| = n, |E(G)|=m, k..poč kompon hodnost grafu h(G)=n-k cyklomatické čísl c (G)=m-n+k **Orient grafy:** symetrizace zapomeneme orientaci grafu silně souvisl $\forall\, x, y \in V(\vec{G})\ \exists$ v G orient sled; silně souv, jesl každá hrana leží v cyklu souvisl jeho symetri souvisl kvazikompon maxim silně souvisl podgraf grafu inciden matic M(G) řádek-vrchol sloupec-hrana; 1 poč vrch, -1 konc vrch, 0 jinak redukov incid mat M_R(G), vynechán posled řádek z M(G) V: Cauchy-Binet **A** typ *pxq*, *p<=q*, $det(A\, A^T) = \Sigma (det\, A_I)^2$ počet růz koster = $det(M_R(G) M_R^T(R))$ **Matice kružnic(souvisl graf):** větev hrany kostry tětiva hrany mimo kostru prostorkružnic podprostor incdenč matice **Ohodnoc graf:** hled minim kostr-hlad algor zač izolov vrcholy, krok- přidat hranu s minim vahou aniž kružnic vznik **Acyklick graf:** graf $\vec{G}$ acykl ⇔ každ podgraf obsahuj vstup vrcho ⇔ každ podgraf obsah vystup vrchol ⇔ vrcholy lze očíslov tak, že hrana je vždy z vrchol s nižš do vrchol s vyšš čísl ⇔ každ sled je cestou ⇔ $\vec{G}$ neobsah smyčky a má jednovrchol kvazikompon Kritick cesta-nejdel cesta v ohod acykl grafu činností – přímá návaznost