

Vložené řídicí systémy Úvod do regulace 2.

Pavel Balda
ZČU v Plzni, FAV, KKY

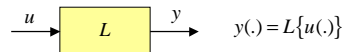
Osnova přednášky

- n Základní pojmy – opakování
- n Jednoduchá regulační smyčka
- n Reléový regulátor
- n P, PI, PID regulátor
- n Implementace PID regulátoru

2

Lineární stacionární (LTI) soustava SISO

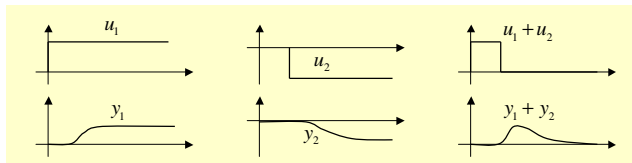
- n Soustava s 1 vstupem a 1 výstupem (SISO = Single Input Single Output), která nemění parametry v čase
- n V praxi použitelná teorie existuje jen pro lineární stacionární systémy



- n Platí **princip superpozice** (linearita)

$$\forall u_1, u_2; \forall a_1, a_2:$$

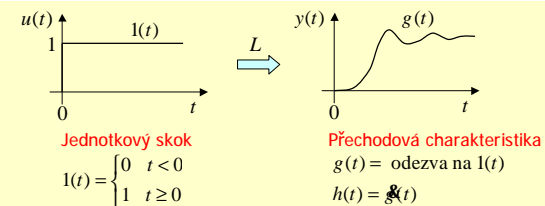
$$L\{a_1 u_1(\cdot) + a_2 u_2(\cdot)\} = a_1 L\{u_1(\cdot)\} + a_2 L\{u_2(\cdot)\}$$



3

Přechodová charakteristika

- n **Přechodová charakteristika** je odezvou systému na jednotkový skok
- n Přechodová charakteristika plně popisuje LTI soustavu

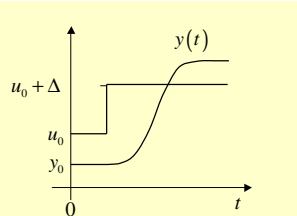


Derivace $h(t)$ přechodové charakteristiky $g(t)$ se nazývá **impulzní charakteristikou** nebo **váhovou funkcí** soustavy

- n Přechodovou charakteristiku lze na systému přímo odměřit
 - n Problémy: zajištění ustáleného stavu, nelinearita systému, poruchy, často velká časová náročnost
 - n Určení váhové funkce naráží na problém numerického derivování zašuměného signálu

Měření přechodové charakteristiky

- Vyčkáme na ustálený stav
- Skokově změněme vstup systému o Δ
- Zaznamenáme odezvu systému
- Přechodovou charakteristiku vypočteme podle vztahu (*)
- Měření lze opakovat v dalších pracovních bodech
- Při působení poruch je nutné výsledky průměrovat



$$g(t) = (y(t) - y_0) / \Delta \quad (*)$$

5

Relace vstup-výstup LTI soustav (1/2)

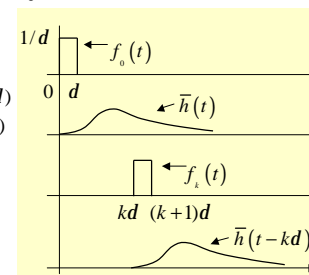
- **Věta:** Relaci vstup-výstup libovolného spojitého lineárního stacionárního systému lze vyjádřit ve tvaru

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t) u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) u(t-t) dt$$

kde je tzv. **váhová (impulsní) funkce** systému.

- **Důkaz:**

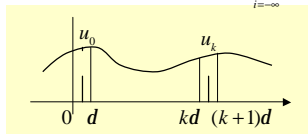
- Předpokládejme, že na puls $f_0(t)$ nulový všude, kromě intervalu $[0; d]$ je odezva systému $L\{f_0(t)\} = \bar{h}(t)$
- Na posunutý puls $f_k(t)$ o čas kd je odezva $L\{f_k(t)\} = \bar{h}(t - kd)$



6

Relace vstup-výstup LTI soustav (2/2)

- Vstup lze aproximovat ve tvaru $\bar{u}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t) d$



- Použitím principu superpozice dostáváme

$$y(t) = L\{u(t)\} = L\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i f_i(t) d\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i L\{f_i(t)\} d = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i \bar{h}(t - id) d$$

- Limitním přechodem pro $d \rightarrow 0$ přechází $\bar{u}(t) \rightarrow u(t)$, $\bar{h}(t) \rightarrow h(t)$ a dostáváme požadované tvrzení

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) h(t-t) dt$$

- Funkce $d(\cdot)$ se nazývá **Diracův puls** a je zobecněnou derivací funkce $1(t)$

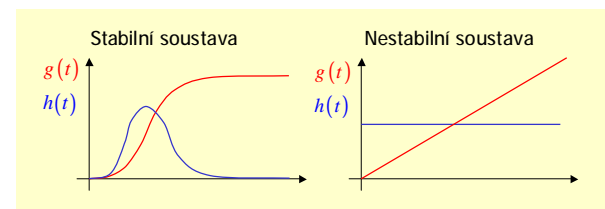
7

Stabilita LTI soustav

- **Definice:** Soustava je stabilní ve smyslu omezený vstup – omezený výstup, jestliže odezva soustavy na libovolný omezený vstup je omezená. Matematicky vyjádřeno

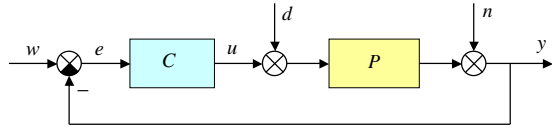
$$\exists M_u < \infty, \forall t : |u(t)| < M_u \Rightarrow \exists M_y < \infty, \forall t : |y(t)| < M_y$$

- **Věta:** Soustava je stabilní ve smyslu omezený vstup – omezený výstup právě když $\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$.



8

Jednoduchá regulační smyčka



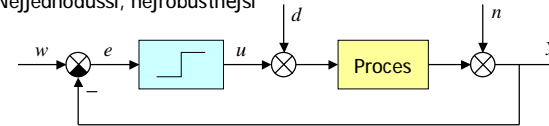
C... Regulator
 P... Proces (regulovaná soustava)
 w... požadovaná hodnota
 e... regulační odchylka
 u... akční veličina
 d... porucha
 n... šum měření
 y... regulovaná veličina

- n Problém regulátoru: $y(t) = w = konst.$
- n Problém sledování: $y(t) = w(t)$
- n Problém regulace v přípustném intervalu: $w^- \leq y(t) = w^+$
- n Problém přechodu mezi pracovními body: $y(t_1) = w_1, y(t_2) = w_2, \dot{y}(t_1) = \dot{y}(t_2) = 0$

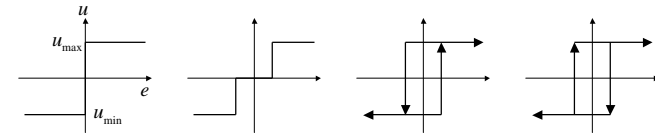
9

Reléový regulátor

- n Nejjednodušší, nejrobustnější



$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{pro } e > 0 \\ u_{\min} & \text{pro } e < 0 \end{cases}$$

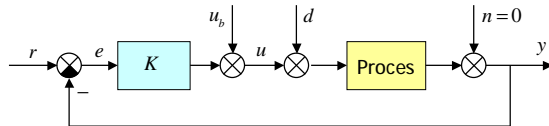


Ideální relé Relé s necitlivostí Relé s hysterezí Relé s předstihem

10

Proporcionální regulátor: P – regulátor

- n Nejjednodušší spojité regulátor. Jediným parametrem je zesílení K



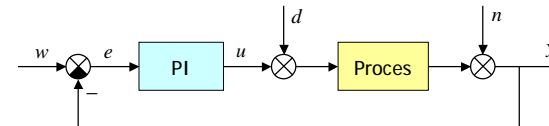
$$u = \begin{cases} u_{\max} & \text{pro } Ke + u_b > u_{\max} \\ Ke + u_b & \text{pro } Ke + u_b \in (u_{\min}, u_{\max}) \\ u_{\min} & \text{pro } Ke + u_b < u_{\min} \end{cases}$$

- n Regulační odchylka v ustáleném stavu je **nenulová** (K_0 je statické zesílení systému)
 $e = w - y = w - K_0(u_b + Ke + d)$
 $e(1 + KK_0) = w - K_0(u_b + d)$
 $e = \frac{1}{1 + KK_0} w - \frac{K_0}{1 + KK_0} (u_b + d)$

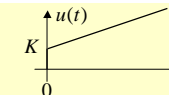
11

PI – regulátor (proporcionálně integrační)

- n Nepoužívanější regulátor v průmyslu. Má dva parametry K, T_i



$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt \right)$$



- n PI-regulátor zajišťuje **nulovou** odchylku v ustáleném stavu při konstantních hodnotách w, d, n

12

Důkaz

- n Předpokládejme, že existuje ustálený stav, ve kterém je konstantní $u(t)=u_0$ a chyba $e(t)=e_0$

- n Dokážeme, že e_0 musí být nulová

- n Předpokládejme, že $e_0 \neq 0$

Pak v ustáleném stavu platí:

$$u(t) = u_0 = K \left(e_0 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e_0 dt \right) = Ke_0 + \frac{e_0}{T_i} t$$

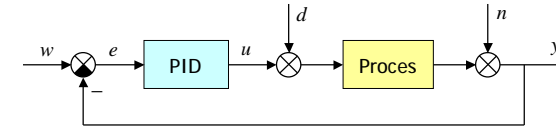
Aby pravá strana byla konstantní, musí být $e_0 = 0$

13

PID – regulátor

(1/2)

- n Proporcionálně integračně derivační regulátor. Má tři parametry K, T_i, T_d



$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$$e(t + T_d) \cong e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

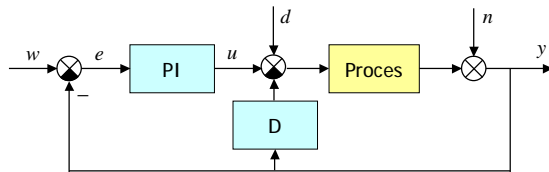
- n Derivační složka zrychluje regulační proces (snižuje normalizované zpoždění)
 - n Problém realizace derivace ze zašuměných signálů

14

PID – regulátor

(2/2)

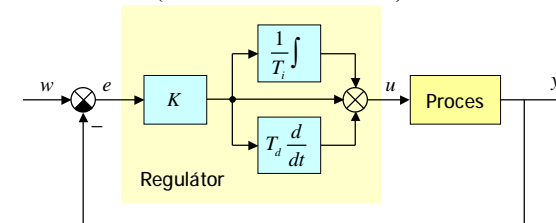
- n Při skokové změně požadované hodnoty w je ideální derivace nekonečná. Proto se někdy PID regulátor realizuje následovně:



15

Realizace PID regulátoru

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$



- n Algoritmus PID regulátoru lze realizovat „po složkách“
 - n $u = u_p + u_i + u_d$;
 - n Proporcionální složka je jednoduchá: $e = w - y$; $u_p = k * e$;
 - n Počítač neumí integrovat ani derivovat, umí jen násobit a sčítat. Proto je třeba použít aproximace pro diskrétní případ (existuje jich hodně).

16

Realizace integrační složky (1/2)

- Uvažujme periodu vzorkování T @ $t_k - t_{k-1}$, kde $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$ jsou okamžiky vzorkování

- Integrační složka: $u_i(t) = \frac{K}{T_i} \int_0^t e(t) dt$

- Nejjednodušší aproximace: derivujme předchozí výraz

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \frac{K}{T_i} e(t)$$

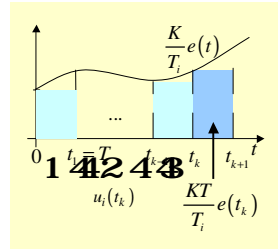
Aproximujme derivaci dopřednou diferencí

$$\frac{u_i(t_{k+1}) - u_i(t_k)}{T} = \frac{K}{T_i} e(t_k)$$

Po úpravě dostáváme

$$u_i(t_{k+1}) = u_i(t_k) + \frac{KT}{T_i} e(t_k)$$

- Tato aproximace je známé **obdélníkové pravidlo**



17

Realizace integrační složky (2/2)

T @ $t_k - t_{k-1}$

- Lepší aproximací je **lichoběžníkové pravidlo**:

$$u_i(t_{k+1}) = u_i(t_k) + \frac{1}{2} \frac{KT}{T_i} [e(t_k) + e(t_{k+1})]$$

- Implementace:

`e = w-y;`

`up = k*e;`

`ui = ui+0.5*T*(upold+up)/ti;`

`upold = up;`

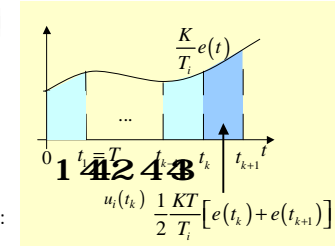
- Problém – počet platných cifer!

- Příklad: Předpokládejme, že máme:

$$T = 0.001 \text{ s}, T_i = 1000 \text{ s}, K = 1$$

- Pak je $KT/T_i = 10^{-6}$

- Má-li regulační odchylka tři platné cifry, potřebujeme 9 cifer pro aktualizaci integrátoru. To je **30 bitů**, což přesahuje rozsah mantisy 32 bitového čísla v pohyblivé čáře (**float**)



18

Realizace derivační složky

- Derivační složka:

$$u_d(t) = KT_d \frac{de(t)}{dt}$$

- Aproximace zpětnou diferencí:

$$u_d(t_k) = KT_d \frac{e(t_k) - e(t_{k-1})}{T}$$

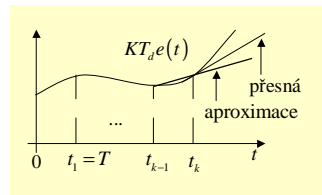
- Implementace

`e = w-y;`

`up = k*e;`

`ud = td*(up-upold)/T;`

`upold = up;`



19

Realizace derivační složky s filtrem

- Výpočet derivace je náchylný na šum derivovaného signálu. Proto vypočtenou hodnotu derivační složky filtrujeme systémem prvního řádu:

$$u_d(t) + \frac{T_d}{N} \frac{du_d(t)}{dt} = KT_d \frac{de(t)}{dt}$$

s časovou konstantou T_d/N , $N > 1$

- Aproximace zpětnou diferencí:

$$u_d(t_k) + \frac{T_d}{NT} [u_d(t_k) - u_d(t_{k-1})] = \frac{KT_d}{T} [e(t_k) - e(t_{k-1})]$$

$$\left(1 + \frac{T_d}{NT}\right) u_d(t_k) = \frac{T_d}{NT} u_d(t_{k-1}) + \frac{KT_d}{T} [e(t_k) - e(t_{k-1})]$$

$$u_d(t_k) = \frac{T_d}{T_d + NT} [u_d(t_{k-1}) + KN(e(t_k) - e(t_{k-1}))]$$

20