Vložené řídicí systémy
Úvod do regulace I.

Pavel Balda

ZČU v Plzni, FAV, KKY

Osnova přednášky

- Spojité lineární systémy
- Diskrétní lineární systémy
- Diskretizace

Lineární spojitý systém 1. řádu (1/2)

- Opakování: Nejjednodušší případ – autonomní systém 1. řádu

$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0$

$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$

$\frac{dx(t)}{x(t)} = adt$

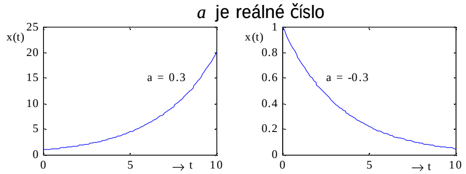
$\int \frac{dx}{x} = \int adt$

$\ln|x| = at + C$

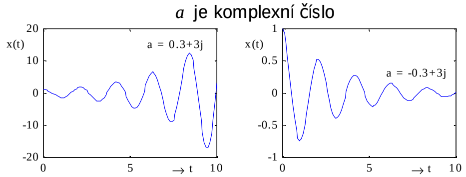
$x(t) = e^C e^{at} = x_0 e^{at}$

$x(t) = x_0 e^{at}$

a je reálné číslo



a je komplexní číslo



Lineární spojitý systém 1. řádu (2/2)

- Řízený lineární systém 1. řádu

$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$

$e^{-at}\dot{x}(t) - e^{-at}ax(t) = e^{-at}bu(t)$

$\frac{d(e^{-at}x(t))}{dt} = e^{-at}bu(t)$

$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$

Využit vztah pro derivaci součinu funkcí

$[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

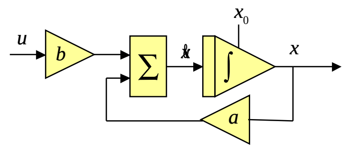
kde

$f(t) = e^{-at}$

$g(t) = x(t)$

$[f(t)g(t)]' = -e^{-at}ax(t) + e^{-at}\dot{x}(t)$

- Realizace pomocí integrátoru



Lineární spojitý systém n. řádu

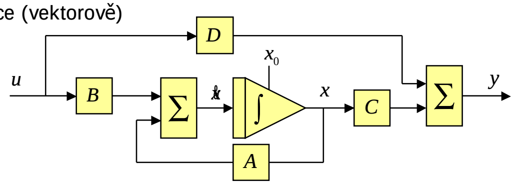
- Stavové rovnice:

  $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
  $$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
  $$x \in R^n,\ u \in R^m,\ y \in R^p,\ A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times m},\ C \in R^{p\times n},\ D \in R^{p\times m}$$

  řešení obdobně jako ve skalárním případě

  $$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- V řešení se vyskytuje maticová exponenciála a integrál z ní
- Realizace (vektorově)



Ekvivalentní lineární systémy (1/2)

- Pro systém

  $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$
  $$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

  uvažujme transformaci stavu

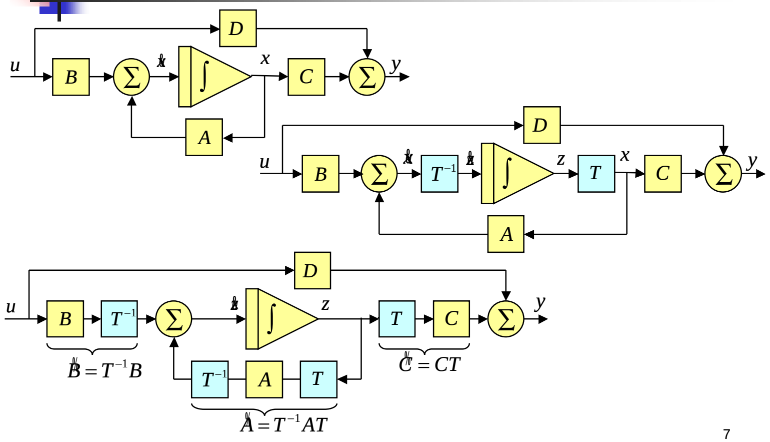
  $$z = T^{-1}x \Leftrightarrow x = Tz,\ T \text{ je regulární}$$
  $$\dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}AT\,z(t) + T^{-1}Bu(t)$$
  $$y(t) = CTz(t) + Du(t)$$

  dostáváme

  $$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t)$$
  $$y(t) = \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t)$$
  $$\tilde{A} \triangleq T^{-1}AT,\ \tilde{B} \triangleq T^{-1}B,\ \tilde{C} \triangleq CT,\ \tilde{D} \triangleq D$$

- Systémy (A,B,C,D) a $(\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C},\tilde{D})$ jsou ekvivalentní (vzhledem k vstupu a výstupu)

Ekvivalentní lineární systémy (2/2)



Modální stavová reprezentace (1/2)

- Pro jednoduchost předpokládejme, že matice A má navzájem různá vlastní čísla. Pak existuje T taková, že:

$$\Lambda = T^{-1}AT$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Protože platí

$$AT = T\Lambda,$$

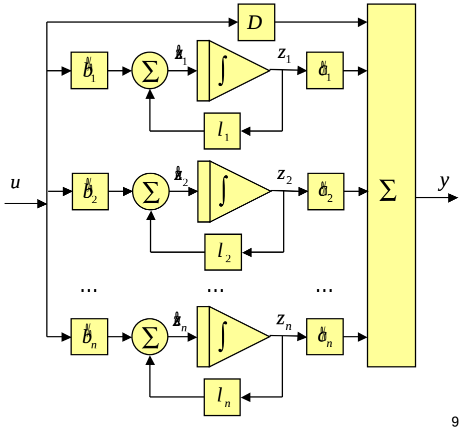
jsou sloupce matice T vlastními vektory matice A

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \mathbf{K} =$$
$$= T\left(I + \Lambda t + \frac{1}{2!}(\Lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\Lambda t)^3 + \mathbf{K}\right)T^{-1}$$
$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & \mathbf{O} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

- Někdy se této reprezentaci říká Jordanova, protože matice Λ je v Jordanově formě

Modální stavová reprezentace (2/2)

- Případ systému s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO = Single Input, Single Output)
- Realizace se „rozpadá“ se na součet paralelních větví jednotlivých složek (každá pro jednu stavovou veličinu)



Konstrukce stavového modelu z LDR (1/3)

- Diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$$

Lze převést na stavový model (tzv. normální formu řiditelnosti)

$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad y = Cx$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}$$

Konstrukce stavového modelu z LDR (2/3)

- Důkaz pro speciální případ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = u,\quad (m=1)$$

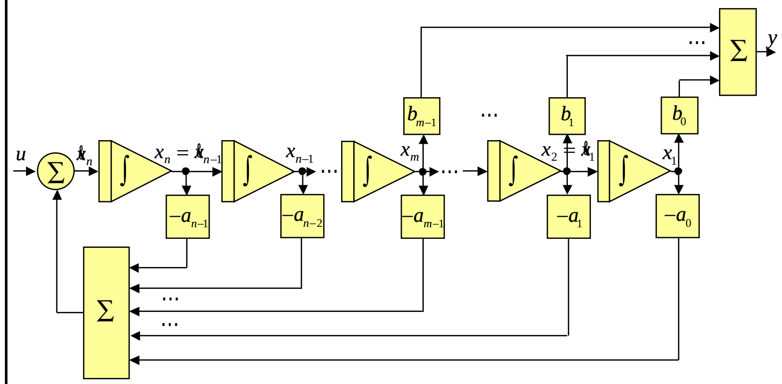
Lze převést na stavový model (tzv. normální formu řiditelnosti)

$$y = [1\quad 0\quad \dots\quad 0]x = x_1$$
$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$
$$\dots$$
$$y^{(n-1)} = x_n$$
$$y^{(n)} = \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 \dots - a_{n-1}x_n + u$$

Vynásobením rovnic koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ a sečtením dostáváme:

$$a_0 y + a_1\dot{y} + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)} + y^{(n)} = a_0x_1 + a_1x_2 + \dots + a_{n-1}x_n$$
$$- a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u$$

Konstrukce stavového modelu z LDR (3/3)



Lineární diskrétní systém n. řádu

- Stavové rovnice:

  $x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k,$

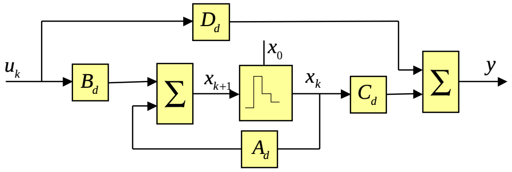
  $y_k = C_d x_k + D_d u_k$

  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}, D \in R^{p \times m}$

  řešení obdobně jako ve skalárním případě

  $x_{k+1} = A_d^k x_0 + \sum_{i=0}^{k} A_d^{k-i} B_d u_i$

- Realizace (vektorově) s tvarovačem nultého řádu



Diskretizace lineárního systému (1/2)

- Diskretizací rozumíme převod spojitého systému

  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$

  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$

  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{p \times n}, D \in R^{p \times m}$

  na diskrétní systém pro danou periodu vzorkování

  $x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k,$

  $y_k = C_d x_k + D_d u_k$

  $x_k \triangleq x(kT), u_k \triangleq u(kT)$

  Pro diskrétní model platí, za předpokladu, že $u(t) = u_k, t \in [kT; (k+1)T)$:

  $A_d = e^{AT}, \; B_d = \left(\int_0^T e^{At} dt\right), \; C_d = C, \; D_d = D$

Diskretizace lineárního systému (2/2)

- Odvození:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$t = (k+1)T, \; t_0 = kT$$

$$x((k+1)T) = e^{AT} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Použijeme substituci $u = (k+1)T - t$

$$x_{k+1} = e^{AT} + \left(\int_0^T e^{Au} du\right) Bu_k$$

$$A_d = e^{AT}, \; B_d = \left(\int_0^T e^{Au} du\right) B$$

Pro zbylé dvě matice je postup zřejmý