Last update 2.5.96 6:45

3.11 Základní geometrické útvary

Až dosud jsme se především zabývali reprezentací geometrických objektů definovaných pomocí bodů, hran a lineárních ploch. Nicméně v praxi je velmi často nutné reprezentovat nebo modelovat křivky, či plochy, které jsou určeny buď body nebo dalšími údaji, např. směrovými vektory.

Obecně lze křivky nebo plochy vyjádřit buď implicitní funkcí (pro některé křivky, resp. plochy lze nalézt explicitní funkční popis např. ve tvaru $y = f(x)$, resp. $z = f(x,z)$) .

$$F(\mathbf{x}) = 0,$$

tj.

$$F(x,y) = 0 \qquad \text{pro křivky v } E^2,$$

resp.

$$F(x,y,z) = 0 \qquad \text{pro křivky a plochy v } E^3,$$

nebo parametrickými funkcemi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u) \qquad \text{pro křivky v } E^2 \text{, resp. v } E^3,$$

tj.

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad \text{, resp.} \quad z = z(u)$$

a

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) \qquad \text{pro plochy v } E^2 \text{, resp. v } E^3,$$

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad \text{, resp.} \quad z = z(u,v)$$

Křivka v E^3 může být navíc určena jako průsečnice dvou ploch obecně neplanárních ploch, tj. řešením dvou nelineárních funkcí

$$F_1(x,y,z) = 0 \qquad F_2(x,y,z) = 0$$

přičemž je zřejmé, že obecně jde o řešení soustavy nelineárních rovnic. Vlastní řešení pak může obsahovat několik samostatných křivek.

Je známo, že přímka p může být v E^2 vyjádřena pomocí rovnice

$$ax + by + c = 0$$

nebo pomocí parametrického vyjádření

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}\,u \qquad u \in (-\infty, \infty)$$

kde: $\mathbf{s} = [s_x, s_y]^T$ je směrový vektor přímky v E^2,

$\mathbf{x}_0$ je bod, kterým přímka p prochází.

Úsečku procházející dvěma body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_1$ je pak možné určit parametrickou rovnicí

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}\,u \qquad u \in < 0\ ,\ 1 >$$

kde: $\mathbf{s} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ je směrový vektor úsečky.

Rovina ρ v E^3 je definována třemi body $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, které **neleží** na jedné přímce p. Rovnici roviny ρ lze určit vyhodnocením determinantu

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

nebo parametricky

$$\mathbf{x}(p,q) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}_1 p + \mathbf{s}_2 q \qquad p,\ q \in (-\infty, \infty)$$

kde: $\mathbf{x}_0$ je bod, kterým rovina ρ prochází

$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ jsou **různoběžné** směrové vektory ležící na rovině ρ, přičemž je lze např. určit takto

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad \text{a} \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$$

Normála roviny $\mathbf{n}$, která je kolmá na rovinu ρ je pak dána výrazem

$$\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \text{ x } \mathbf{s}_2$$

kde: $\mathbf{a}$ x $\mathbf{b}$ značí vektorový součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Je zřejmé, že např. trojúhelník lze velmi jednoduše vyjádřit pomocí parametrické rovnice, a to:

$$\mathbf{x}(p,q) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}_1 p + \mathbf{s}_2 q \qquad p\ ,q \in \ < 0\ ,\ 1\ >$$

přičemž $\quad |\ p + q\ | \leq 1$

Přímku v E^3 je nezbytné definovat jako průsečnici dvou rovin ρ_1 a ρ_2, které nejsou rovnoběžné, tj. přímka je určena řešením rovnic:

$$\rho_1\!: \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$\rho_2\!: \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

nebo pomocí parametrického vyjádření

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}\, u \qquad u \in (-\infty\ ,\ \infty)\ ,$$

tj. po rozepsání do složek

$$x(u) = x_0 + s_x\ u \qquad y(u) = y_0 + s_y\ u$$

$$z(u) = z_0 + s_z\ u \qquad u \in (-\infty\ ,\ \infty)$$

kde: $\mathbf{x}_0$ je bod kterým přímka p prochází,

$\mathbf{s} = [s_x, s_y, s_z]^T$ je směrový vektor přímky v E^3.

Trojúhelník, resp. obdélník v prostoru lze vyjádřit analogicky jeko v případě E^2.

Až dosud jsme se zabývali rovinnými útvary, jako je přímka, rovina apod. Pro praktické aplikace počítačové grafiky je nutné poskytnout i složitější křivky a plochy než lineární.

Výhodou implicitního popisu je snadnost zjištění, zda daný bod leží na křivce, či nikoliv, resp. na které straně plochy se daný bod nachází. Toto je velmi výhodné v některých aplikacích, resp. algoritmech používaných v počítačové grafice. V technické praxi se však velmi často setkáváme s požadavkem na proložení bodů daných tabulkou křivkou, resp. plochou, která je „hladká“. Data mohou být získána z různých pozorování, výpočtů apod. a to s rovnoměrným nebo nerovnoměrným krokem. Nejjednodušším případem je **lineární interpolace** funkčních hodnot $f(x) = 0$ mezi dvěma body x_i a x_{i+1} pomocí vzorce

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{pro } \forall x \in < x_i\ , x_{i+1} >$$

Velmi často se pro některé problémy používají interpolace založené na polynomiální interpolaci, zejména pak na použití Lagrangeova polynomu, který je učen takto:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{i,n}(x)$$

kde:

$$L_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$L_{i,n}(x) = \frac{(x - x_0).....(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}).....(x - x_n)}{(x_i - x_0).....(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}).....(x_i - x_n)}$$

pro lineární interpolaci mezi dvěma body pak dostáváme

$$f(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_{i+1}) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_i)$$

což je výše uvedená rovnice pro lineární interpolaci v jiném tvaru. Je však nezbytné poznamenat, že Lagrangeův polynom se vzrůstajícím stupněm zvyšuje „oscilace“ a v mnoha případech dává nepřijatelné výsledky.

Příklad

Proložte body $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,2)$, $(5,1)$ lineární interpolací a Lagrangeovým polynomem.

Jením z možných způsobů řešení problému prokládání daných bodů hladkou křivkou, resp. plochou je použití parametrického vyjádření. Zde je nezbytné upozornit na to, že se obvykle pracuje v prostoru parametrických souřadnic, tj. máme-li křivku $F(x, y) = 0$, pak pracujeme s křivkami:

$x = x(u)$ a $y = y(u)$

kde: u je parametr.

Je nutné si uvědomit, že z chování křivek $x(u)$ a $y(u)$ lze jen velmi těžko usuzovat na výsledný tvar křivky $F(x, y) = 0$, viz obr. xxxx. Pro případ E^3 pak obdobně, viz obr.zzz.

Parametrické křivky

Uvažme nejdříve případ kvadratických parametrických křivek ve tvaru:

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{a}\, u^2 + \mathbf{b}\, u + \mathbf{c}$$

rozepsáním do složek pak dostáváme

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_y & c_z \\ a_x & b_y & c_z \\ a_x & b_y & c_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pak lze přepsat rovnici do maticového tvaru, který se též nazývá algebraickou formou:

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

kde: matice $\mathbf{A}$ je matice určená

$$\mathbf{A} = [\ \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c}\ ]$$

$\mathbf{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right]^T$ a analogicky pro vektory $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Vektor $\mathbf{u}$ je určen takto:

$$\mathbf{u} = \left[\, u^2,\ u\ ,\ 1\, \right]^T$$

Předpokládejme, že jsou dány tři body $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(0.5)$, $\mathbf{x}(1)$. Pak lze nahlédnout, že

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$$
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(0.5) = 0.25\,\mathbf{a} + 0.5\,\mathbf{b} + \mathbf{c}$$
$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(1) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Obr.

Jsou dány tři body svými souřadnicemi v E^3, tj. dostáváme 9 rovnic pro 9 neznámých. Lze tedy vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ určit řešením soustavy lineárních rovnic. Poznamenejme, že délka křivky pro $u \in <0\ ,\ 0.5>$ je obecně rozdílná od délky křivky pro $u \in <0.5\ ,\ 1>$

Lze nahlédnout, že pro souřadnici x platí:

$$a_x = 2x_0 - 4x_1 + 2x_2$$
$$b_x = -3x_0 + 4x_1 - x_2$$
$$c_x = x_0$$

Dosazením do rovnic pro $x(u)$ dostáváme

$$x(u) = (2x_0 - 4x_1 + 2x_2)u^2 + (-3x_0 + 4x_1 - x_2)u + x_0 \qquad u \in <0\ ,\ 1>$$

Úpravou pak

$$x(u) = (2u^2 - 3u + 1)x_0 + (-4u^2 + 4u)x_1 + (2u^2 - u)x_2 \qquad u \in <0\ ,\ 1>$$

Obecně pak

$$\mathbf{x}(u) = (2u^2 - 3u + 1)\mathbf{x}_0 + (-4u^2 + 4u)\mathbf{x}_1 + (2u^2 - u)\mathbf{x}_2 \qquad u \in <0\ ,\ 1>$$

Tento tvar se též někdy nazývá geometrickou formou. Při použití maticového vyjádření pak

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{B}\,\mathbf{h}$$

kde: $\mathbf{B} = \left[\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2\right]$ je maticí vektorů $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$

$$\mathbf{h} = \left[(2u^2 - 3u + 1)\ ,\ (-4u^2 + 4u)\ ,\ (2u^2 - u)\right]^T$$

$$\mathbf{u} = \left[\, u^2,\ u\ ,\ 1\, \right]^T$$

Je zřejmé, že vektor $\mathbf{h}$ může být rozepsán jako

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pak

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{B}\,\mathbf{h} = \mathbf{B}\,\mathbf{M}\,\mathbf{u}$$

a tedy platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{M}$$

přičemž: $\mathbf{B}$ se nazývá univerzální transformační maticí ,
$\mathbf{M}$ se nazývá blending funkční maticí,
$\mathbf{h}$ se nazývá blending funkcí.

Z dosud uvedeného je zřejmé, že je možné proložit třemi body kvadratickou křivku. Nicméně uživatel musí zvolit hodnotu parametru u pro vnitřní bod.

V praxi je nutné prokládat křivku více body, přičemž je v zásadě možné používat parametrické křivky vyšších stupňů a řešit problémy s tím spojené, nebo prokládat křivku méně body a jednotlivé křivky "hladce" napojovat. Pro aplikace v technické praxi je nezbytné uvažovat kubické parametrické křivky v E^2 , resp.E^3, především z důvodů výhodnosti existence inflexního budu kubické křivky. Pro případ kubické parametrické křivky pak dostáváme

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{a}\,u^3 + \mathbf{b}\,u^2 + \mathbf{c}\,u + \mathbf{d}$$

a je tedy nezbytné určit 16 koeficientů. Je zřejmé, že křivka musí procházet dvěma krajními body $\mathbf{x}(0)$ a $\mathbf{x}(1)$. Je tedy nezbytné určit další dva body, např. $\mathbf{x}(1/3)$ a $\mathbf{x}(2/3)$. Pro jednoduchost označme $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(1/3)$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}(2/3)$, $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}(1)$.

Pak pro souřadnici x pak dostáváme

$$x_1 = d_x$$

$$x_2 = \frac{1}{27}a_x + \frac{1}{9}b_x + \frac{1}{3}c_x + d_x$$

$$x_3 = \frac{8}{27}a_x + \frac{4}{9}b_x + \frac{2}{3}c_x + d_x$$

$$x_4 = a_x + b_x + c_x + d_x$$

Úpravami pak

$$a_x = -\frac{9}{2}x_1 + \frac{27}{2}x_2 - \frac{27}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_4$$

$$b_x = 9\,x_1 - \frac{45}{2}x_2 + 18\,x_3 - \frac{9}{2}\,x_4$$

$$c_x = -\frac{11}{2}x_1 + 9x_2 - \frac{9}{2}x_3 + x_4$$

$$d_x = x_1$$

Vyjádřením koeficientů pro jednotlivé mocniny dostáváme

$$x(u) = (-4.5\,u^3 + 9\,u^2 - 5.5\,u + 1)x_1 + (13.5\,u^3 - 22.5\,u^2 + 9\,u)x_2$$
$$+ (-13.5\,u^3 + 18\,u^2 - 4.5\,u)x_3 + (4.5\,u^3 - 4.5\,u^2 + u)x_4$$

Pak

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{A}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Úpravami dostáváme

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}\,\mathbf{g}$$

kde:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.5\,u^3 + 9\,u^2 - 5.5\,u + 1 \\ 13.5\,u^3 - 22.5\,u^2 + 9\,u \\ -13.5\,u^3 + 18\,u^2 - 4.5\,u \\ 4.5\,u^3 - 4.5\,u^2 + u \end{bmatrix}$$

Pak lze psát

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}\,\mathbf{G}\,\mathbf{u} = [\,\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3 \mid \mathbf{x}_4\,]\,[g_1, g_2, g_3, g_4]^T$$

Vyjádřením v maticové formě pak

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{X}\,\mathbf{G}\,\mathbf{u}$$

kde: $\mathbf{u} = [\,u^3\,,\,u^2,\,u\,,\,1\,]^T$

Pak vztah mezi algebraickou a geometrickou formou lze vyjádřit vztahem:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\,\mathbf{G}$$

Je zřejmé, že průběh křivky bude závislý na volbě hodnot parametru u pro vnitřní body.

OBR

Příklad 1

Odvoďte analogické vztahy pro jiné vnitřní body, přičemž hodnoty u pro jednotlivé body $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ volte např. takto (0,1/4,1/2,1) , (0,1/2,3/4,1) , (0,1/3,2/3,1) apod. Pokuste se zodpovědět, co se stane pokud hodnoty u volíme (0,1/2,1/4,1), tj. posloupnost není monotónní!!

Hermitovská forma

Jedním z možných způsobů definice křivky je možnost jejího určení pomocí krajních bodů a směrovými vektory v krajních bodech, viz. obr.xxx

Obr

přičemž směrové vektory jsou definovány takto

$$\mathbf{x}'(u) = \frac{d\mathbf{x}}{du} = \frac{d}{du}[x(u), y(u), z(u)]^T$$

Uvažme nyní opět parametrické kubické křivky ve tvaru

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{a}\,u^3 + \mathbf{b}\,u^2 + \mathbf{c}\,u + \mathbf{d}$$

pak pro složku x lze psát

$$x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$$

a

$$x'(u) = 3a_x u^2 + 2b_x u + c_x$$

Směrový vektor je pak obecně určen výrazem

$$\mathbf{x}'(u) = 3\mathbf{a}u^2 + 2\mathbf{b}u + \mathbf{c}$$

V maticovém vyjádřením pak

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{A}\,\mathbf{u}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_z & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{bmatrix} = [\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c} \mid \mathbf{d}]$$

a

$$\mathbf{u} = [\, u^3 \,,\, u^2 ,\, u \,,\, 1 \,]^T$$

Dosadíme-li nyní do rovnic příslušné hodnoty, pak dostáváme pro souřadnici x soustavu rovnic

$$x_1 = d_x$$
$$x_2 = a_x + b_x + c_x + d_x$$
$$x_1' = c_x$$
$$x_2' = 3a_x + 2b_x + c_x$$

Z nich pak úpravou obdržíme tzv. algebraickou formu

$$a_x = 2x_1 - 2x_2 + x_1' + x_2'$$
$$b_x = -3x_1 + 3x_2 - 2x_1' - x_2'$$
$$c_x = x_1'$$
$$d_x = x_1$$

Dosazením do rovnic pro x(u) pak dostáváme

$$x(u) = (2x_1 - 2x_2 + x_1' + x_2')\,u^3 + (-3x_1 + 3x_2 - 2x_1' - x_2')\,u^2 + x_1'\,u + x_1$$

a úpravou pak

$$x(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)\,x_1 + (-2u^3 + 3u^2)\,x_2 + (u^3 - 2u^2 + u)\,x_1' + (u^3 - u^2)\,x_2'$$

Je zřejmé, že obecně pro křivku $\mathbf{x}(u)$ platí

$$\mathbf{x}(u) = (2u^3 - 3u^2 + 1)\,\mathbf{x}_1 + (-2u^3 + 3u^2)\,\mathbf{x}_2 + (u^3 - 2u^2 + u)\,\mathbf{x}_1' + (u^3 - u^2)\,\mathbf{x}_2'$$

Uvedenou rovnici lze přepsat pomocí maticové notace do tvaru

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}_H \, \mathbf{f}_H$$

kde: $\mathbf{X} = \left[\, \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1^{'} \mid \mathbf{x}_2^{'} \right]$ je matice Hermitovských vektorů

$$\mathbf{f}_H = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Takto definovaná kubika se též nazývá Fergusonovou kubikou.
Nyní je zřejmé, že vektor $\mathbf{f}$ lze určit jako součin matice $\mathbf{M}_H$ Hermitovské formy a vektoru $\mathbf{u}$

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{M}_H \mathbf{u}$$

a tedy lze psát

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}_H \mathbf{M}_H \mathbf{u}$$

kde matice $\mathbf{X}_H$ a $\mathbf{M}_H$ lze vyjádřit

$$\mathbf{X}_H = \left[\, \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1^{'} \mid \mathbf{x}_2^{'} \,\right] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_1^{'} & x_2^{'} \\ y_1 & y_2 & y_1^{'} & y_2^{'} \\ z_1 & z_2 & z_1^{'} & z_2^{'} \end{bmatrix} = \left[\, \mathbf{x}(0) \mid \mathbf{x}(1) \mid \mathbf{x}'(0) \mid \mathbf{x}'(1) \,\right]$$

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{, resp.} \quad \mathbf{M}_H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a vektor $\mathbf{u}$ je definován opět jako

$$\mathbf{u} = \left[\, u^3 \,,\, u^2 ,\, u \,,\, 1 \,\right]^T$$

Tato forma se nazývá geometrickou formou. Z dosud uvedeného je zřejmé, že platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}_H \, \mathbf{M}_H$$

Tvar křivky je určen nejen krajními body

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(0) \qquad \text{a} \qquad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(1),$$

ale též směrovými vektory

$$\mathbf{x}_1^{'} = \frac{d\mathbf{x}(0)}{du} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{x}_2^{'} = \frac{d\mathbf{x}(1)}{du}$$

Pro jednoduchost uvažme případ křivky v E^2. Je zřejmé, že poměr $\frac{dy}{dx}$ je směrnicí tečny křivky v daném bodě $\mathbf{x}$, viz obr.xxx. Směrnice křivky se nezmění, pokud směrový vektor $\mathbf{x}'$ bude měnit svoji velikost a nikoliv směr, neboť

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{q\frac{dy}{du}}{q\frac{dx}{du}}$$

To znamená, že pokud q krát zvětšíme vektor $\mathbf{x}_1^{'}$, resp. $\mathbf{x}_2^{'}$, pak se směrnice křivky v těchto bodech nezmění.

Je zřejmé, že je nutné volit nejen směr, ale i délku vektorů.

Obecně lze volit $q \neq 0$ tak, že

$${}^1\mathbf{x}_1^{'} = q\,\mathbf{x}_1^{'} \quad , \qquad {}^1\mathbf{x}_2^{'} = q\,\mathbf{x}_2^{'}$$

přičemž $\quad {}^1\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \quad$ a $\quad {}^1\mathbf{x}_1^{'} = \mathbf{x}_2^{'}$

tj. nemění se směr v krajních bodech.

Pak lze pro $\mathbf{x}(u)$ a ${}^1\mathbf{x}(u)$ psát

$$\mathbf{x}(u) = \left[\ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1^{'} \mid \mathbf{x}_2^{'}\ \right]\mathbf{M}_H\ \mathbf{u}$$

$${}^1\mathbf{x}(u) = \left[\ {}^1\mathbf{x}_1 \mid {}^1\mathbf{x}_2 \mid {}^1\mathbf{x}_1^{'} \mid {}^1\mathbf{x}_2^{'}\ \right]\mathbf{M}_H\ \mathbf{u} = \left[\ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid q\mathbf{x}_1^{'} \mid q\mathbf{x}_2^{'}\ \right]\mathbf{M}_H\ \mathbf{u}$$

Geometrický význam všech proměnných je zřejmý ze zadání, kromě parametru q, který vlastně říká, jak "dlouho" se přimkne křivka ke směrovému vektoru, viz obr.3####

Obr.

Bázové funkce

Prvky vektoru $\mathbf{f}_H$ se nazývají blending (bázovými) funkcemi. Z předchozího víme, že např. pro Hermitovskou formu jsou blending funkce definovány

$$\mathbf{f}_H = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}_H\ \mathbf{f}_H \qquad\qquad \mathbf{f}_H = \mathbf{M}_H\ \mathbf{u}$$

tj. pro případ, kdy křivka je definována koncovými body a směrovými vektory. Podobné funkce jsme získali pro případ, kdy kubická křivka byla definována 4 body.

Z toho vyplývá, že existuje mnoho blending funkcí, které jsou více či méně užitečné, resp. každý si vlastně může navrhnout svoji blending funkci. Blending funkce vlastně zajišťuje zahrnutí daných geometrických omezení a hraničních podmínek, tj. zahrnutí vlivu krajních bodů a dodatečných podmínek, tj. vliv směrových vektorů $\mathbf{x}_1'$ a $\mathbf{x}_2'$, nebo dalších bodů křivky.

Blending funkce g f
Obr.

Porovnáním průběhů funkcí $\mathbf{g}$ a $\mathbf{f}_H$ je zřejmé, že některé základní vlastnosti jsou společné, např. symetričnost f_1 a f_2, resp. f_3 a f_4, což je odrazem toho, že body $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ se od sebe svým významem neliší, liší se jen souřadnicemi. Analogicky pak pro $\mathbf{x}_1'$ a $\mathbf{x}_2'$.

V technické praxi je nezbytné prokládat křivky více než dvěma body, tj. provádět jejich "skládání", které se nazývá napojování. Je zřejmé, že základním požadavkem je pak spojitost a hladkost napojovaných křivek.

Uvažme dvě Hermitovské křivky $\mathbf{x}(u)$ a ${}^1\mathbf{x}(v)$, které budeme chtít na sebe napojit a budeme požadovat "hladkost" přechodu, čímž definujeme další požadavek kladený na křivky. Je zřejmé, že pro spojitost musí platit podmínka:
- spojitosti

$$\mathbf{x}(u) = {}^1\mathbf{x}(v) \quad \text{pro} \quad u = 1 \ , \ v = 0,$$

- hladkosti

$$\mathbf{x}'(u) = k\,{}^1\mathbf{x}'(v) \quad \text{pro} \quad u = 1 \ , \ v = 0 \ , \ k > 0,$$

tj. směrové vektory koncového a počátečního bodu křivek musí ležet na společné přímce.

Uvedené podmínky jsou podmínkami pro tzv. spojitost $\mathbf{C}^1$ parametrického vyjádření, neboť jde o vyjádření způsobu chování křivky $x(u)$, resp. $y(u)$ a $z(u)$ v závislosti na parametru u.

Výsledné chování křivek je však posuzováno uživatelem v prostoru souřadnic x, y, z, a tedy nezávisle na změně hodnot parametru u. Je tedy zřejmé, že podmínku spojitosti $\mathbf{C}^1$ lze oslabit s tím, že budeme požadovat, aby

$$\frac{\dfrac{d\,{}^1y(0)}{dv}}{\dfrac{d\,{}^1x(0)}{dv}} = \frac{q\dfrac{dy(1)}{du}}{q\dfrac{dx(1)}{du}} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{{}^1y_1'}{{}^1x_1'} = \frac{y_2'}{x_2'}$$

Pak lze psát

$$\frac{dy(1)}{du}\frac{d\,{}^1x(0)}{dv} - \frac{dx(1)}{du}\frac{d\,{}^1y(0)}{dv} = 0, \qquad \text{resp.} \qquad {}^1y_1' x_2 - {}^1x_1' y_2 = 0$$

analogicky pro ostatní souřadnice, tj. $y - z$, $z - x$.

Takto definovanou spojitost nazýváme geometrickou spojitostí 1.řádu a značíme ji $\mathbf{GC}^1$. Lze tedy nahlédnout, že požadavkem na to, aby křivky $\mathbf{x}(u)$ a ${}^1\mathbf{x}(v)$ byly hladce napojeny, musí platit

$$\mathbf{x}(1) = {}^1\mathbf{x}(0) \quad \text{, resp.} \quad \mathbf{x}_2 = {}^1\mathbf{x}_1$$

tj. koncový **prvé** křivky a počáteční bod **druhé** křivky musí být totožné,

$$\mathbf{x}'(1) \text{ x } {}^1\mathbf{x}'(0) = \mathbf{0} \qquad \text{, resp.} \quad \mathbf{x}_2' \text{ x } {}^1\mathbf{x}_1' = \mathbf{0}$$

$$\text{tj.} \qquad \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

tj. vektory $\mathbf{x}_2^{'}$, ${}^1\mathbf{x}_1^{'}$ musí být rovnoběžné. Navíc však musí mít i shodnou orientaci, tj.

$${}^1\mathbf{x}^{'}(0)^T \mathbf{x}^{'}(1) > 0 \qquad \text{, resp. } {}^1\mathbf{x}_1^{'T} \mathbf{x}_2^{'} > 0$$

viz obr.3.11.x

Kubické spline křivky

Interpolační problémy v počítačové grafice a CAD systémech mohou být uspokojivě řešeny pomocí tzv. „spline křivek“, které prokládájí danou množinu bodů. Interpolační spline křivky mohou být s výhodou použity i pro rozsáhlé množiny přesných dat. Jestliže segmenty kubické křivky jsou parametrizovány odděleně, přičemž pro parametr u platí $u \in <0\,,\,1>$, pak je možné využít speciálního případu Hermitovy formy, a to:

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}_H \, \mathbf{f}_H$$

kde: $\mathbf{X} = \left[\, \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1^{'} \mid \mathbf{x}_2^{'} \,\right]$ je matice Hermitovských vektorů,

$$\mathbf{f}_H = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ -2u^3 + 3u^2 \\ u^3 - 2u^2 + u \\ u^3 - u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matice $\mathbf{M}_H$ a vektor $\mathbf{u}$ jsou nezávislé (invariantní) na parametrizaci daného segmentu. Změny se projevují pouze prostřednictvím matice souřadnic koncových bodů pro jednotlivé souřadnice. Budeme-li požadovat spojitost křivky nejen C^1 , ale i C^2 , pak pro bod napojení segmentů musí platit

$$\mathbf{x}''(1) = {}^1\mathbf{x}''(0)$$

Z tvaru Hermitovy formy

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{a}\, u^3 + \mathbf{b}\, u^2 + \mathbf{c}\, u + \mathbf{d} \qquad \text{a} \qquad {}^1\mathbf{x}(u) = {}^1\mathbf{a}\, u^3 + {}^1\mathbf{b}\, u^2 + {}^1\mathbf{c}\, u + {}^1\mathbf{d}$$

pak pro druhou derivaci dostáváme

$$\mathbf{x}''(u) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = 6\,\mathbf{a}\, u + 2\,\mathbf{b} \qquad \text{a} \qquad {}^1\mathbf{x}''(u) = \frac{\partial^2\, {}^1\mathbf{x}}{\partial u^2} = 6\ {}^1\mathbf{a}\, u + 2\ {}^1\mathbf{b}$$

dosazením do rovnice pro podmínku napojení segmentů dostáváme (pro první segment $u = 1$, pro druhý pak $u = 0$):

$$6\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b} = 2\ {}^1\mathbf{a}$$

Dosazením do rovnice z Hermitovy formy dostáváme:

$$6\,(2\mathbf{x}_0 - 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0^{'} + \mathbf{x}_0^{'}) + 2\,(3\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_0 - 2\mathbf{x}_0^{'} - \mathbf{x}_1^{'}) = 2\,(3\,{}^1\mathbf{x}_1 - 3\,{}^1\mathbf{x}_0 - 2\,{}^1\mathbf{x}_0 - {}^1\mathbf{x}_1)$$

Zjednodušením dostáváme

$$\mathbf{x}_0^{'} + 4\,\mathbf{x}_1^{'} + {}^1\mathbf{x}_1^{'} = 3\,({}^1\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

Tato podmínka nám umožňuje výpočet tangenciálního vektoru v bodě, kde se segmenty napojují. Obecně pak pro zadaných m bodů $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{m-1}$ je nutné určit tangenciální vektory pro $m-2$ vnitřních bodů, kterými křivku prokládáme. Je nutné si při přeznačování uvědomit, že v tomto případě je bod ${}^1\mathbf{x}_1$ vlastně bodem $\mathbf{x}_2$ atd. Obvykle se používá jedna z doplňkových podmínek, a to:

a) jsou známy koncové tangenciální vektory $\mathbf{x}_0^{'}$ a $\mathbf{x}_m^{'}$,

b) druhé derivace v koncových bodech $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_0$ jsou nulové (tzv. přirozený spline),

c) křivka je uzavřená, tj. předpokládáme hladké napojení „koncových“ bodů.

Případ ad a.

Nyní je problém určení tangenciálních vektorů převeden na řešení soustavy lineárních rovnic. Označíme-li $\mathbf{x}_k^{'}$ hodnotu tangenciálního vektoru v bodě $\mathbf{x}_k$, pak dostáváme:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \\ & & & & & \\ & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{'} \\ \mathbf{x}_1^{'} \\ \mathbf{x}_2^{'} \\ \\ \\ \mathbf{x}_{m-1}^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{'} \\ 3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \\ 3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \\ 3(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-3}) \\ \mathbf{x}_{m-1}^{'} \end{bmatrix}$$

Řešením soustavy pak dostáváme hodnotu tangenciálních vektorů pro „vnitřní“ body. Někdy se při zápisu vynechává první a poslední řádka a soustava rovnic má pak tvar:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \\ & & & & \\ & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{'} \\ \mathbf{x}_2^{'} \\ \\ \\ \mathbf{x}_{m-2}^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0^{'} \\ 3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \\ 3(\mathbf{x}_{m-2} - \mathbf{x}_{m-4}) \\ 3(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-3}) - \mathbf{x}_{m-1}^{'} \end{bmatrix}$$

Příklad

Jsou dány čtyři body v rovině, a to:

$$\mathbf{x}_0 = [\,0\,,0\,] \qquad \mathbf{x}_1 = [\,2\,,1\,] \qquad \mathbf{x}_2 = [\,4\,,4\,] \qquad \mathbf{x}_3 = [\,6\,,0\,]$$

a tangenciální počáteční vektor $\mathbf{x}_0^{'} = [\,1\,,1\,]$ a koncový tangenciální vektor $\mathbf{x}_3^{'} = [\,-1\,,1\,]$.
Pak tangenciální vektory pro souřadnici x mohou být určeny takto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3\,(4-0) \\ 3\,(6-2) \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pak

$$\begin{bmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 15 \\ 31 \\ 41 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Obdobně pak pro y souřadnici dostáváme $\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 15 & 48 & 27 & 15 \end{bmatrix}^T$.

Případ ad b.

V tomto případě, kdy druhé derivace v koncových bodech jsou nulové, dostáváme $2\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$ a dosazením do rovnice pro koeficient $\mathbf{c}$ Hermitovy formy dostáváme:

$$3\,({}^1\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0) - 2\mathbf{x}_1 - {}^1\mathbf{x}_0' = \mathbf{0}$$

nebo $\quad 2\;{}^1\mathbf{x}_0' + \mathbf{x}_1' = 3\,(\mathbf{x}_1 - {}^1\mathbf{x}_0')$

Obecně pak pro m bodů dostáváme další zjednodušení pro bod $\mathbf{x}_{m-1}$ (parametr $u = 1$):

$$\mathbf{x}_{m-2}' + 2\,\mathbf{x}_{m-1}' = 3\,(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-2})$$

a tedy soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & \\ & & & & & & \\ & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0' \\ \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \\ \mathbf{x}_{m-2}' \\ \mathbf{x}_{m-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \\ 3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \\ 3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \\ 3(\mathbf{x}_{m-2} - \mathbf{x}_{m-4}) \\ 3(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-3}) \end{bmatrix}$$

Případ ad c.

V případě uzavřené spline křivky pak dostáváme

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & & & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \\ & & & & & \\ & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & & & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0' \\ \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ \\ \mathbf{x}_{m-2}' \\ \mathbf{x}_{m-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \\ 3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \\ 3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \\ \\ 3(\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-3}) \\ 3(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{m-2}) \end{bmatrix}$$

neboť platí, že $\mathbf{x}_0^{'} + 4\,\mathbf{x}_1^{'} + {}^1\mathbf{x}_1^{'} = 3\,({}^1\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ nejen pro „vnitřní“ segmenty, ale též i pro „koncové“ vzhledem k požadavku jejich hladkého napojení.

Ve všech případech je nutné řešit soustavu lineárních rovnic a je nezbytné využít speciálních algoritmů pro řešení soustav rovnic s tridiagonální maticí.

Až dosud jsme se zabývali **interpolačními** metodami, tj. křivkami, které prochází zadanými body. Tento případ je velmi častý v oblasti vyhodnocování numerických výpočtů, měření apod. Nicméně však existuje celá řada oblastí, např. modelování objektů, CAD systémy apod., kdy jde především o tvar a následně pak o rozměr. V těchto případech křivka neprochází všemi zadanými body a příslušné metody jsou tedy **aproximační**. Tyto metody jsou většinou mnohem pružnější z hlediska interaktivního zadávání. Za hlavní představitele aproximačních metod se považují Bezierovy a B-spline křivky.

Bezierova forma

Bezier a Frenchmann navrhli zcela odlišným způsobem bázové funkce. Při svém návrhu vyšli z požadavků na křivku, a to:

- křivka musí procházet bodem $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_n$

- jednotkový směrový vektor $\mathbf{x}_0^{'}$ v bodě $\mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_1^{'}$ v bodě $\mathbf{x}_1$ musí být dán jako

$$\frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{x_n - x_{n-1}}{\|x_n - x_{n-1}\|}$$

- druhá derivace v bodě $\mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_n$ musí být určena pomocí bodů $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, resp. $\mathbf{x}_{n-2}$, $\mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{x}_n$; obecně r-tá derivace musí být určena pomocí r nejbližších bodů

- bázové funkce musí být symetrické vzhledem k u a $u-1$, tj. obrácení posloupnosti bodů nemění tvar křivky.

V obecném případě je Bézierova křivka dána

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\,\mathbf{x}_i \qquad u \in <0\,,\,1>$$

kde: $B_{n,i}(u)$ jsou Bernsteinovy polynomy, které jsou definovány takto:

$$B_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

kde

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad \& \qquad 0! = 1$$

Analogicky pak pro ostatní souřadnice y a z .

Z dosud uvedeného je zřejmé, že Bezierova křivka je polynomem n-tého stupně, která prochází pouze prvním a posledním bodem.

Pro n = 3 pak dostáváme

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^{3} B_{n,i}(u)\,\mathbf{x}_i = (1-u)^3\mathbf{x}_0 + 3u(1-u)^2\mathbf{x}_1 + 3u^2(1-u)\mathbf{x}_2 + u^3\mathbf{x}_3 \qquad u \in <0\,,\,1>$$

Pak je zřejmé, že

$$\mathbf{x}(u) = \left[\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3\right]\begin{bmatrix}(1-u)^3\\ 3u(1-u)^2\\ 3u^2(1-u)\\ u^3\end{bmatrix} = \mathbf{X}_B\,\mathbf{f}_B$$

kde bázové funkce jsou definovány takto

$$\mathbf{f}_B = \begin{bmatrix}(1-u)^3\\ 3u(1-u)^2\\ 3u^2(1-u)\\ u^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{M}_B\,\mathbf{u}$$

Pak

$$\mathbf{x}(u) = \left[\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3\right]\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^3\\ u^2\\ u\\ 1\end{bmatrix}$$

Lze tedy psát

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{X}_B\,\mathbf{M}_B\,\mathbf{u} \qquad u \in <0\,,\,1>$$

kde: $\mathbf{X}_B$ je matice Bezierových vektorů

$\mathbf{M}_B$ je matice Bezierovy formy

$\mathbf{u}$ je vektor definovaný jako $\mathbf{u} = \left[\,u^3\,,\,u^2,\,u\,,\,1\,\right]^T$

Bezierova křivka prochází body $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_3$. Body $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ nahrazují významově zadávání směrových vektorů z Hermitovy formy.

Obr.

Příklad

Nakreslete Bezierovy křivku, je-li definována body

$\mathbf{x}_0 = [\ 2\ ,\ 3\ ]$ $\qquad$ $\mathbf{x}_1 = [\ 3\ ,\ 5\ ]$

$\mathbf{x}_3 = [\ 5\ ,\ 3\ ]$ $\qquad$ $\mathbf{x}_2 = [\ 4\ ,\ 7\ ]$, resp. $\mathbf{x}_2 = [\ 4\ ,\ 1\ ]$

Lze ukázat, že pokud se volí v Hermitově formě vektory ${}^H\mathbf{x}_1^{'}$ a ${}^H\mathbf{x}_2^{'}$ tak, že

$${}^H\mathbf{x}_1^{'} = 3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \qquad {}^H\mathbf{x}_2^{'} = 3(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)$$

pak Hermitovská forma je ekvivalentní Bezierově formě a platí

$$\mathbf{M}_{BH}\,\mathbf{M}_H = \mathbf{M}_B$$

$$\mathbf{M}_{BH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Význačnou vlastností Bezierových křivek je to, že křivka $\mathbf{x}(u)$ je vždy uvnitř konvexního obalu, který je dán body $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_3$.

Příklad

Spojitost $\mathbf{C}^1$ dvou segmentů vyžaduje u Bezierových křivek, aby oba dva segmenty nejen sdílely společný bod, ale aby měly též společnou směrnici v tomto bodě. Předpoládejme dva segmenty $\mathbf{x}(u)$ a ${}^1\mathbf{x}(u)$, které jsou určeny body:

$\mathbf{x}(u)$: $\mathbf{x}_A = [2,3,4]$ $\quad$ $\mathbf{x}_B = [3,1,5]$ $\quad$ $\mathbf{x}_c = [x,y,z]$ $\quad$ $\mathbf{x}_D = [3,4,3]$

${}^1\mathbf{x}(u)$: $\mathbf{x}_D = [3,4,3]$ $\quad$ $\mathbf{x}_E = [2,6,0]$ $\quad$ $\mathbf{x}_E = [5,7,5]$ $\quad$ $\mathbf{x}_F = [5,2,3]$

Určete podmínky, které musí splňovat bod (x,y,z) k zajištění spojitosti $\mathbf{C}^1$. Derivací výrazu pro Bezierovu formu

$$\mathbf{x}(u) = [\ \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

a dosazením pro společný bod dostáváme:

$$\mathbf{x}'(1) = -3\,\mathbf{x}_C + 3\mathbf{x}_D \qquad {}^1\mathbf{x}(0) = -3\mathbf{x}_D + 3\mathbf{x}_E$$

Z předchozího víme, že pro $\mathbf{C}^1$ spojitost musí platit $\mathbf{x}'(1) = q\ {}^1\mathbf{x}'(0)$, kde q je konstanta. Dosazením pak dostáváme

$3(3-x) = -3k$ $\qquad$ $3(4-y) = 6k$ $\qquad$ $3(3-z) = -9k$

Lze tedy nahlédnout, že platí:

$x = 3 + k$ $\qquad$ $y = 4 - 2k$ $\qquad$ $z = 3 + 3k$

B-spline křivky

Na rozdíl od Hermitových a Bezierových křivek jsou B-spline křivky, které definičními body neprochází, není je však nutné složitě napojovat. Křivky se většinou rozdělují na uniformní a neuniformní dle toho, zda uzlové (řídící) body jsou rozloženy rovnoměrně či nikoliv.

Uniformní B-spline křivka

Jedním speciálním typem uniformní B-spline křivky je Coonsova kubika, která má stejný způsob zadávání jako Bezierova kubika a je tedy též určena čtyřmi body. Pak

$$\mathbf{x}(u) = [\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3\,]\,\mathbf{f}_C = \mathbf{X}_C\,\mathbf{f}_C \qquad u \in < 0\,,\,1 >$$

kde: $\mathbf{f}_C$ je vektor bázových funkcí Coonsovy kubiky, který je definován takto:

$$\mathbf{f}_C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} (1-u)^3 \\ 3u^3 - 6u^2 + 4 \\ -3u^3 + 3u^2 + 3u + 1 \\ u^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \mathbf{M}_C\,\mathbf{u}$$

a

$$\mathbf{u} = [\,u^3\,,\,u^2,\,u\,,\,1\,]^T$$

přičemž aproximace probíhá "mezi body" $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, viz obr.

Lze ukázat, že takto definovaná křivka má definovanou spojitost včetně druhých derivací.

Aby bylo možné kreslit obecnou křivku z koncových bodů je nutné křivku vhodně "nastartovat", např. zavedením několika fiktivních bodů totožných s bodem $\mathbf{x}_0$ a ukončit křivku analogickým způsobem, a to tak, že postupně volíme $\mathbf{X}_C$ takto:

$$\mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1\,] \qquad \mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2\,]$$

$$\mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3\,] \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_{n-3} \mid \mathbf{x}_{n-2} \mid \mathbf{x}_{n-1} \mid \mathbf{x}_n\,]$$

$$\mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_{n-2} \mid \mathbf{x}_{n-1} \mid \mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n\,] \qquad \mathbf{X}_C = [\,\mathbf{x}_{n-1} \mid \mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n\,]$$

konstrukce oblouku obecná křivka

Obr.

Neuniformní B-spline křivky

Neuniformní B-spline křivky se vyznačují tím, že posloupnost uzlových bodů (knot vector) nemusí být uniformní, tj. vzdálenost mezi uzlovými body není konstantní (u všech předchozích křivek jsme měli vzdálenost mezi uzlovými body rovnu jedné, neboť vždy pro každý segment platilo $t \in < 0{,}1 >$). Neuniformnost uzlových bodů umožňuje ovlivňovat spojitost (hladkost), a to z $\mathbf{C}^2$ na $\mathbf{C}^1$ resp. $\mathbf{C}^0$ poměrně jednoduchým způsobem. Předpokládejme prozatím uniformnost, tj. uzlový vektor $[u_1, u_2, ..., u_s]$ přičemž $u_{i+1} = u_i + 1$.

Pak křivkou k-tého řádu budeme rozumnět křivku určenou vztahem

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{x}_i N_{i,k}(u)$$

kde: $\mathbf{x}_i$ jsou řídící body křivky, tj. vrcholy lomenné čáry definnující B-spline křivku

$N_{i,k}(u)$ jsou normalizované bázové funkce přičemž $\sum_{i=0}^{m-1} N_{i,k} = 1$

Normalizované bázové funkce $N_{i,k}$ jsou určeny vztahy:

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{pokud} \quad u_i \le u \le u_{i+1} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - u_i) N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1} - u_i} + \frac{(u_{i+k} - u) N_{i+1,k}(u)}{u_{i+k} - u_{i+1}}$$

Lze ukázat, že

$N_{i,1}(u) = 1$ pro $u \in < u_i, u_{i+1} >$ viz obr.xxx

$N_{i,2}(u) = (u - u_i) N_{i,1}(u) + (u_{i+2} - u) N_{i+1,1}(u)$

vyhodnocením dostáváme

$N_{i,2}(u) = (u - u_i)$ pro $u \in < u_i, u_{i+1} >$

$N_{i,2}(u) = (u_{i+2} - u)$ pro $u \in < u_{i+1}, u_{i+2} >$ viz obr.xxx

Pak

$$N_{i,3}(u) = \frac{1}{2}(u - u_i) N_{i,2}(u) + (u_{i+3} - u) N_{i+1,2}(u)$$

vyhodnocením pak dostáváme

$$N_{i,3}(u) = \frac{1}{2} \begin{cases} (u - u_i)^2 & \text{pro } u \in < u_i, u_{i+1} > \\ (u - u_i)(u_{i+2} - u) + (u_{i+3} - u)(u - u_{i+1}) & \text{pro } u \in < u_{i+1}, u_{i+2} > \\ (u - u_{i+3})^2 & \text{pro } u \in < u_{i+2}, u_{i+3} > \end{cases}$$

Křivka $N_{i,3}(u)$ se tedy sestává pro $u \in < u_i, u_{i+3} >$ ze tří parabolických oblouků, viz obr.xxx.

$$N_{i,4}(u) = \frac{(u - u_i) N_{i,3}(u)}{3} + \frac{(u_{i+4} - u) N_{i+1,3}(u)}{3}$$

Tato křivka se pak sestává ze čtyř kubických segmentů.

V praxi se velmi často používá trochu jiné indexování řídících bodů, a to: $\mathbf{x}_{i-1}$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i+1}$, $\mathbf{x}_{i+2}$. Po přeznačení lze pak ukázat, že vyhodnocením výše uvedených rovnic pro segment odpovídající původně $u \in < u_{i+1}, u_{i+2} >$ a změně parametrizace, nyní $u \in < 0,1 >$, pak po přeznačení platí:

$N_{0,3}(u) = \frac{1}{6} u^3$ $\quad u \in < 0,1 >$

$N_{1,3}(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$

$$N_{2,3}(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4)$$

$$N_{2,3}(u) = \frac{1}{6}(-u^3 + 3u^2 - 3u + 1)$$

Přepsáním do maticové formy pak dostáváme

$$\mathbf{x}(u) = \frac{1}{6}[\,\mathbf{x}_{i-1} \mid \mathbf{x}_i \mid \mathbf{x}_{i+1} \mid \mathbf{x}_{i+2}] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

což je známá forma Coonsovy křivky.

Obecné B-spline křivky

bude dodáno později

Konverze mezi reprezentacemi

Až dosud jsme se zabývali otázkami reprezentace křivek a jejich vlastnostmi. I když jsou některé vlastnosti velmi rozdílné, lze některé reprezentace vzájemně převádět, viz [Ana93].

do formy z formy	Hermitovy	Bezierovy	B-spline
Hermitovy	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
Bezierovy	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
B-spline	$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 6 & -3 \\ -7 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Parametrické plochy

Až dosud jsme se zabývali křivkami, které byly vyjádřeny parametricky jako parametrické kubické křivky. Nyní se budeme zabývat parametrickými plochami, které je možné vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) \qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$$

tj. po rozepsání do složek

$x = x(u,v)$ $\qquad y = y(u,v)$

$z = z(u,v)$ $\qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$

Takto zadanou plochu budeme považovat za elementární prvek obecné plochy a nazývá se též plátem (záplatou, ploškou). Vedle obdélníkových plátů se nejčastěji ještě používají pláty trojúkelníkové nebo pětiúhelníkové z důvodů snadnějšího vystižení zakřiveného povrch, viz [Yum88].

Nejednodušší plochou je rovinný plát v rovině $x - y$, viz obr.xxx

Obr.

Proměnné u, v jsou proměnné parametrického vyjádření, přičemž

$\mathbf{x}_{00} = \mathbf{x}(0,0)$ $\qquad \mathbf{x}_{10} = \mathbf{x}(1,0)$

$\mathbf{x}_{01} = \mathbf{x}(0,1)$ $\qquad \mathbf{x}_{11} = \mathbf{x}(1,1)$

Příklad

Nalezněte parametrické rovnice popisující obecný lichoběžník

Dalším typem ploch jsou plochy válcové, které jsou vytvářeny křivkou ${}^{1}\mathbf{x}(u)$ a vektorem $\mathbf{r}$, jehož koncový bod se posouvá po křivce ${}^{1}\mathbf{x}(u)$, viz obr.xxx.

Obr.

Křivka ${}^{1}\mathbf{x}(u)$ může být definována jako Hermitova, Bezierova nebo B-spline křivka.

Pro mnohé technické aplikace se tyto plochy používají s tím, že jsou definovány dvě křivky ${}^{1}\mathbf{x}(u)$ a ${}^{2}\mathbf{x}(u)$, viz obr.xxx

Obr.xxx

Vektor $\mathbf{r}$ je určen jako

$$\mathbf{r} = {}^{2}\mathbf{x}(u) - {}^{1}\mathbf{x}(u)$$

a plocha je pak určena rovnicí

$$\mathbf{x}(u,v) = {}^{1}\mathbf{x}(u) + ({}^{2}\mathbf{x}(u) - {}^{1}\mathbf{x}(u))v \qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$$

Pro výpočty pak může být vhodnější tvar

$$\mathbf{x}(u,v) = (1-v)\ {}^{1}\mathbf{x}(u) + v\ {}^{2}\mathbf{x}(u) \qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$$

Je nutné též upozornit, že tvar plochy závisí na parametrizaci křivek ${}^{1}\mathbf{x}(u)$ a ${}^{2}\mathbf{x}(u)$, tj. i na poloze počátečních bodů ${}^{1}\mathbf{x}(0)$ a ${}^{2}\mathbf{x}(0)$.

Hermitova plocha

Uvažujme nyní obecný bikubický plát. Předpokládejme, že je dána plocha s ohraničujícími křivkami ${}^{1}\mathbf{x}(u)$, ${}^{2}\mathbf{x}(u)$, ${}^{3}\mathbf{x}(v)$, ${}^{4}\mathbf{x}(v)$, viz obr...

Každá hraniční křivka je křivkou kubickou, a tedy i křivka ${}^{0}\mathbf{x}(u)$, na které leží bod $\mathbf{x}(u,v)$, nechť je křivkou kubickou, pro kterou platí (v případě Hermitovy formy):

$$^{0}\mathbf{x}(u) = \left[\ ^{0}\mathbf{x}_{\alpha} \mid {}^{0}\mathbf{x}_{\beta} \mid {}^{0}\mathbf{x}'_{\alpha} \mid {}^{0}\mathbf{x}'_{\beta}\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{u}$$

kde: $\mathbf{x}' = {}^{(u)}\mathbf{x} = \dfrac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial\,u}$ je parciální derivace vektoru $\mathbf{x}$ podle u.

Z obr.xxxx je zřejmé, že $^{0}\mathbf{x}_{\alpha} = {}^{3}\mathbf{x}(v)$ a $^{0}\mathbf{x}_{\beta} = {}^{4}\mathbf{x}(v)$ pro určitou hodnotu v. Pak lze psát

$$\mathbf{x}(u,v) = \left[\ ^{3}\mathbf{x}(v) \mid {}^{4}\mathbf{x}(v) \mid {}^{3}\mathbf{x}'(\mathrm{v}) \mid {}^{4}\mathbf{x}'(v)\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{u}$$

kde: $\mathbf{x}' = {}^{(u)}\mathbf{x} = \dfrac{\partial\,\mathbf{x}}{\partial\,u}$ je parciální derivace vektoru $\mathbf{x}$ podle u.

Nyní lze za $^{3}\mathbf{x}(v)$ a $^{4}\mathbf{x}(v)$ dosadit, neboť lze snadno nahlédnout, že platí:

$$^{3}\mathbf{x}(v) = \left[\ \mathbf{x}_{00} \mid \mathbf{x}_{10} \mid {}^{(\mathrm{v})}\mathbf{x}_{00} \mid {}^{(\mathrm{v})}\mathbf{x}_{10}\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{v}$$

$$^{4}\mathbf{x}(v) = \left[\ \mathbf{x}_{01} \mid \mathbf{x}_{11} \mid {}^{(\mathrm{v})}\mathbf{x}_{01} \mid {}^{(\mathrm{v})}\mathbf{x}_{11}\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{v}$$

neboť $^{3}\mathbf{x}(v)$ a $^{4}\mathbf{x}(v)$ jsou Hermitovské křivky.

Pak pro souřadnici x platí:

$$x(u,v) = \left[\ ^{3}x(v) \mid {}^{4}x(v) \mid {}^{3}x'(\mathrm{v}) \mid {}^{4}x'(v)\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{u}$$

kde: $\mathbf{x}'(v) = {}^{(u)}\mathbf{x}(v) = \dfrac{\partial\,\mathbf{x}(v)}{\partial\,u}$ je parciální derivace vektoru $\mathbf{x}(v)$ podle u

$$^{3}x(v) = \left[\ x_{00} \mid x_{10} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{00} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{10}\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^{T}\ \mathbf{M}_{H}^{T}\left[\ x_{00} \mid x_{10} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{00} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{11}\right]^{T}$$

$$^{4}x(v) = \left[\ x_{01} \mid x_{11} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{01} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{11}\right] \mathbf{M}_{H}\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^{T}\ \mathbf{M}_{H}\left[\ x_{01} \mid x_{11} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{01} \mid {}^{(\mathrm{v})}x_{11}\right]^{T}$$

a po dosazení za $^{3}x(v)$, $^{4}x(v)$ dostáváme:

$$x(u,v) = \mathbf{v}^{T}\mathbf{M}_{H}\begin{bmatrix} x_{00} & x_{10} & ? & ? \\ x_{01} & x_{11} & ? & ? \\ ^{(v)}x_{00} & ^{(v)}x_{10} & ? & ? \\ ^{(v)}x_{01} & ^{(v)}x_{11} & ? & ? \end{bmatrix}\mathbf{M}_{H}\ \mathbf{u}$$

dosazením za křivky $^{3}x'(\mathrm{v})$, $^{4}x'(v)$ pak dostáváme

$$x(u,v) = \mathbf{v}^{T}\mathbf{M}_{H}\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & ^{(u)}x_{00} & ^{(u)}x_{01} \\ x_{10} & x_{11} & ^{(u)}x_{10} & ^{(u)}x_{11} \\ ^{(v)}x_{00} & ^{(v)}x_{01} & ^{(u,v)}x_{00} & ^{(u,v)}x_{01} \\ ^{(v)}x_{10} & ^{(v)}x_{11} & ^{(u,v)}x_{10} & ^{(u,v)}x_{11} \end{bmatrix}\mathbf{M}_{H}\ \mathbf{u}$$

přičemž: $\mathbf{x}'(v) = {}^{(u)}\mathbf{x}(v) = \dfrac{\partial\,\mathbf{x}(v)}{\partial\,u}$ je parciální derivace vektoru $\mathbf{x}(v)$ podle u.

Nyní lze psát

$$x(u,v) = \mathbf{v}^{T}\mathbf{M}_{H}^{T}\mathbf{X}_{H}\mathbf{M}_{H}\mathbf{u} \qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$$

kde:

$$\mathbf{X}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_x \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{D}_x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} {}^{(u)}x_{00} & {}^{(u)}x_{01} \\ {}^{(u)}x_{10} & {}^{(u)}x_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} {}^{(v)}x_{00} & {}^{(v)}x_{01} \\ {}^{(v)}x_{10} & {}^{(v)}x_{11} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} {}^{(u,v)}x_{00} & {}^{(u,v)}x_{01} \\ {}^{(u,v)}x_{10} & {}^{(u,v)}x_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž

$\mathbf{M}_H$ je matice Hermitovské formy

$\mathbf{A}_x$ je matice x-ových souřadnic bodů

$\mathbf{B}_x$, resp. $\mathbf{C}_x$ je matice x-ových složek směrových vektorů ve směru u, resp. v, přičemž ${}^{(u)}x_{i\,j} = \dfrac{dx_{i\,j}}{du}$, resp. ${}^{(v)}x_{i\,j} = \dfrac{dx_{i\,j}}{dv}$

$\mathbf{D}_x$ je matice smíšených derivací pro souřadnici x, které se nazývají zkrutem a které vlastně definují „vyklenutí" rohu plochy, přičemž ${}^{(uv)}x_{i\,j} = \dfrac{d^2 x_{i\,j}}{du\,dv}$

Analogicky pak i pro ostatní souřadnice lze psát

$$y(u,v) = \mathbf{v}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{Y}_H \mathbf{M}_H \mathbf{u} \qquad u,v \in <0\,,\,1>$$
$$z(u,v) = \mathbf{v}^T \mathbf{M}_H^T \mathbf{Z}_H \mathbf{M}_H \mathbf{u} \qquad u,v \in <0\,,\,1>$$

Z rovnic vyplývá, že každá plocha je popsána pomocí 48 koeficientů (3 x 16 koeficientů), přičemž změna kteréhokoliv parametru znamená úplnou změnu tvaru plochy. Podobným způsobem lze odvodit i jiné plochy, např. Bezierovy, Coonsovy apod.

Bezierova plocha

Bezierova plocha je definována vztahem

$$x(u,v) = \mathbf{v}^T \mathbf{M}_B^T \mathbf{X}_B \mathbf{M}_B \mathbf{u} \qquad y(u,v) = \mathbf{v}^T \mathbf{M}_B^T \mathbf{Y}_B \mathbf{M}_B \mathbf{u}$$

$$z(u,v) = \mathbf{v}^T \mathbf{M}_B^T \mathbf{Z}_B \mathbf{M}_B \mathbf{u} \qquad u,v \in <0\,,\,1>$$

kde: $\mathbf{M}_B$ je matice Bezierovy formy

$\mathbf{X}_B$ je matice x-ových souřadnic bodů definující danou plochu, viz obr.xxxx

$$\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \qquad M_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definice Bezierovy plochy
Obr.xxxx

Podobně jako pro Bezierovu křivku platí, že plocha je uvnitř konvexního obalu daných bodů.

B-spline plocha

Coonsova B-spline plocha , která zaručuje spojitost do druhého řádu podobně jako u Coonsovy plochy, je definována analogickým způsobem, viz obr.xxx, a to:

$$x(u,v) = \mathbf{v}^T\mathbf{M}_S^T\mathbf{X}_S\mathbf{M}_S\mathbf{u} \qquad y(u,v) = \mathbf{v}^T\mathbf{M}_S^T\mathbf{Y}_S\mathbf{M}_S\mathbf{u}$$

$$z(u,v) = \mathbf{v}^T\mathbf{M}_S^T\mathbf{Z}_S\mathbf{M}_S\mathbf{u} \qquad u,v \in <0\ ,\ 1>$$

kde: $\mathbf{M}_S$ je matice Coonsovy B-spline formy
$\mathbf{X}_S$ je matice x-ových souřadnic bodů definující danou plochu, viz obr.xxxx

$$\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obr.xxx.

Dosud uvedené principy naznačily další způsoby reprezentace ploch, které je možné v aplikacích počítačové grafiky použít. Pro další studium lze doporučit publikace [Drs][Yuma]. V současné době se věnuje velká pozornost NURBS (neuniformní racionální B-spliny) křivkám a plochám , např. [Hew]. V zásadě lze říci, že NURBS křivka je vyjádřena v homogenních souřadnicích, tj. všechny složky vektoru $\mathbf{x}$ jsou vyjádřeny jako parametrické křivky. Skutečná hodnota příslušné souřadnice je pak určena obdobným způsobem jako při použití homogenních souřadnic, viz kap.4.

[Ana] Anand,V.: Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers, John Wiley, 1993
[Drs] Drs: Křivky a plochy v počítačové grafice

[Gra80] Granát,L., Sechovský,H.: Počítačová grafika, SNTL, 1980
[Hew92] Hewitt,Lin.F.,Preston,M.: NURBS - A Tool or Ornament for Graphics?, Report EG92
[Yum88] Yumaguchi,F.: Curves and Surfaces for Computer Geometric Design, Springer Verlag, 1988.