Sada úloh č. 1 [20 bodů]

1. Nechť A je pole různých čísel (celých). Pokud existují indexy i, j (i≠j) takové, že i<j a současně A[i] > A[j], pak se dvojice (A[i], A[j]) nazývá inverze.
   a. Vypište všechny inverze v poli A = {2, 3, 8, 6, 1}. [1 b]
   b. Nalezněte pole sestrojené permutací prvků pole {1, 2, …n} takové, že má nejvíce inverzí ze všech možných prvků. Kolik jich je? [1 b]
   c. Navrhněte algoritmus, který spočítá počet inverzí v daném poli se složitostí Θ(nlogn). Nápověda: využijte techniku rozděl a panuj + řazení. [3 b]
2. Ověřte, zda platí: a) $2^{n+1} = O(2^n)$ a b) $2^{2n} = O(2^n)$. Své tvrzení zdůvodněte (dokažte). [2 b]
3. Nalezněte asymptotickou složitost pro skutečnou složitost vyjádřenou rekurentní formulí:
   a. $T(n)=9T(n/10) + n$
   b. $T(n)=16T(n/4) + n^2$
   c. $T(n)=7T(n/3) + n^2$
   d. $T(n)=7T(n/2) + n^2$
   e. $T(n)=T(\sqrt{n}) + 1$

   [5 b]

4. Srovnejte následujících 25 funkcí dle rychlosti jejich růstu, tj. nalezněte uspořádání $g_1, g_2 \dots g_{25}$ takové, že $g_1=\Omega(g_2)$, $g_2=\Omega(g_3)$,… $g_{24}=\Omega(g_{25})$:

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\left(\sqrt{2}\right)^{\log n}$	n^2	$(\log n)!$	n^3
$\log^2 n$	$\log(n!)$	$2^{(2^n)}$	$n^{1/\log n}$	$\log\log n$
$n \cdot 2^n$	$n^{\log\log n}$	$\log n$	2^n	$2^{\log n}$
$(\log n)^{\log n}$	$4^{\log n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\log n}$	$n!$
$2^{\sqrt{2\cdot\log n}}$	n	$n \cdot \log n$	1	$(\log\log n)^{(2^n)}$

Všechny logaritmy jsou o základu 2. Nápověda:

$$2^{\sqrt{2\cdot\log n}} = n^{\sqrt{2/\log n}}$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log n} = \sqrt{n}$$

$$n! \geq c \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)}; c > 0$$

[8 b]