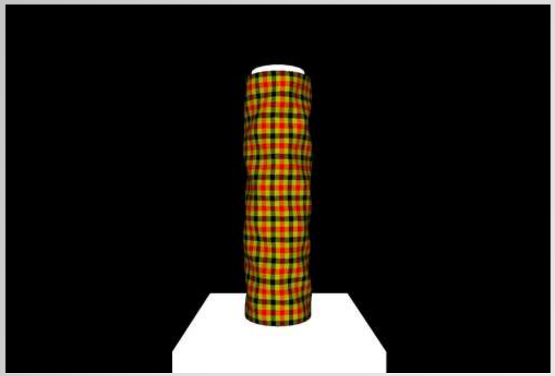
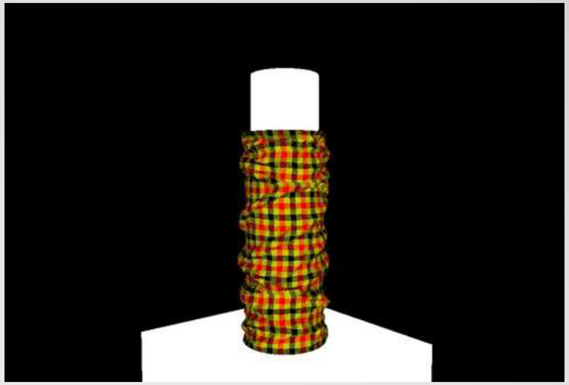
KIV/ZEP - 2012

Násobení matic,
řešení soustav lineárních i nelineárních rovnic

- mnoho problémů vede na řešení soustavy lineárních nebo nelineárních rovnic
  - transformace z RGB na YCbCr, radiozitní řešení, masivní systém pružin (látka), detekce kolizí, proložení funkce zadanými body, ...
  - základem bývá násobení matic



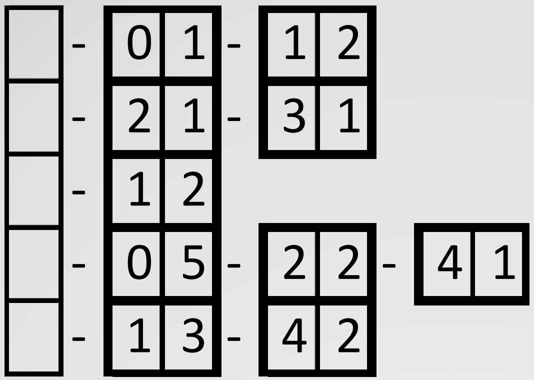


Motivace

Matice - reprezentace

- Běžné matice
  - vícerozměrné vs. jednorozměrné pole
    - *zpracování obrázků a volumetrických dat*
- Řídké matice
  - velký počet prvků konstantní (nulové)
  - spojový seznam (dvourozměrný)
  - několik jednorozměrných polí

1	2	0	0	0
0	0	1	1	0
0	2	0	0	0
5	0	2	0	1
0	3	0	0	2



N	2	2	1	3	2					
I	0	1	2	3	1	0	2	4	1	4
V	1	2	1	1	2	5	2	1	3	2

- C=A*B
- klasicky: $c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$
  - *složitost*
- D&C: pro n mocniny 2

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j}$$

  - složitost: T(n)=8T(n/2)+4(n/2)(n/2)

Násobení matic

Násobení matic

- Strassen formula pro matice 2x2:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$

$$s = P_1 + P_2$$

$$t = P_3 + P_4$$

$$u = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

$$P_1 = a \cdot (g - h)$$

$$P_2 = (a + b) \cdot h$$

$$P_3 = (c + d) \cdot e$$

$$P_4 = d \cdot (f - e)$$

$$P_5 = (a + d) \cdot (e + h)$$

$$P_6 = (b - d) \cdot (f + h)$$

$$P_7 = (a - c) \cdot (e + g)$$

  - složitost po zobecnění: T(n)=7T(n/2)+18(n/2)(n/2)

- $A*x=b$
  $A=(1..n \times 1..n)$, $x=(x_1 \ldots x_n)$, $b=(b_1 \ldots b_n)$
- přeurčená soustava:
  $A=(1..m \times 1..n)$, $x=(x_1 \ldots x_n)$, $b=(b_1 \ldots b_m)$
  - často při optimalizačních úlohách
  - řešení: soustava $A^T*A*x=A^T*b$
- řešení soustavy
  - Gaussova eliminace, LU rozklad, numericky

Soustava lineárních rovnic

- Gaussova eliminace (naivní bez pivotace)
  - nechť zaokrouhlujeme na 5 desetiných míst
  - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$,
  - eliminujeme položku a_{21}, tj. $a_{2i} = a_{2i} - a_{1i} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$
    - co se stane, když a_{11} bude nulové?
  - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$
  - eliminujeme položku a_{31}, tj. $a_{3i} = a_{3i} - a_{1i} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}$
  - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$

Soustava lineárních rovnic

- eliminujeme položku a_{32}, tj. $a_{3i} = a_{3i} - a_{2i} \cdot \frac{a_{32}}{a_{22}}$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 0 & 15005 & 15004 \end{array}\right)$
- zpětnou substitucí dostáváme řešení: [0.99993, -1.5, -0.35]

- Gaussova eliminace s pivotací
  - nechť zaokrouhlujeme na 5 desetiných míst
  - v každém kroce nejprve nalezneme řádek s maximální hodnotou (v abs. hodnotě) a prohodíme ho s aktuálním (pivotace)

Soustava lineárních rovnic

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array}\right)$,
- největší hodnota z |10|, |-3|, |5| je |10|, tj. první řádek je pivotem a eliminujeme položky a_{21} a a_{31}
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array}\right)$
- největší hodnota z |-0.001| a |-4.5| je |-4.5|, tzn. třetí řádek je pivotem, prohodíme tedy řádky 2 a 3
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array}\right)$
- eliminujeme položku a_{32}

Soustava lineárních rovnic

- $\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.002 & 6.002 \end{pmatrix}$
- zpětnou substitucí dostáváme řešení: [0, 1, 1]
- řešení zcela odlišné od řešení bez pivotace
- správné (přesné) řešení: [0, 1, 1]
- pivotace neřeší problém dělení nulou!

- složitost Gaussovo eliminace?
  - dopředná fáze: n-1 kroků, $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2i^2 - 3i + 1$
  - zpětná substituce: n kroků, $T(n) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1$
  - celkem: $T(n) = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{8n}{3} - 1 \equiv \theta(n^3)$

Soustava lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic

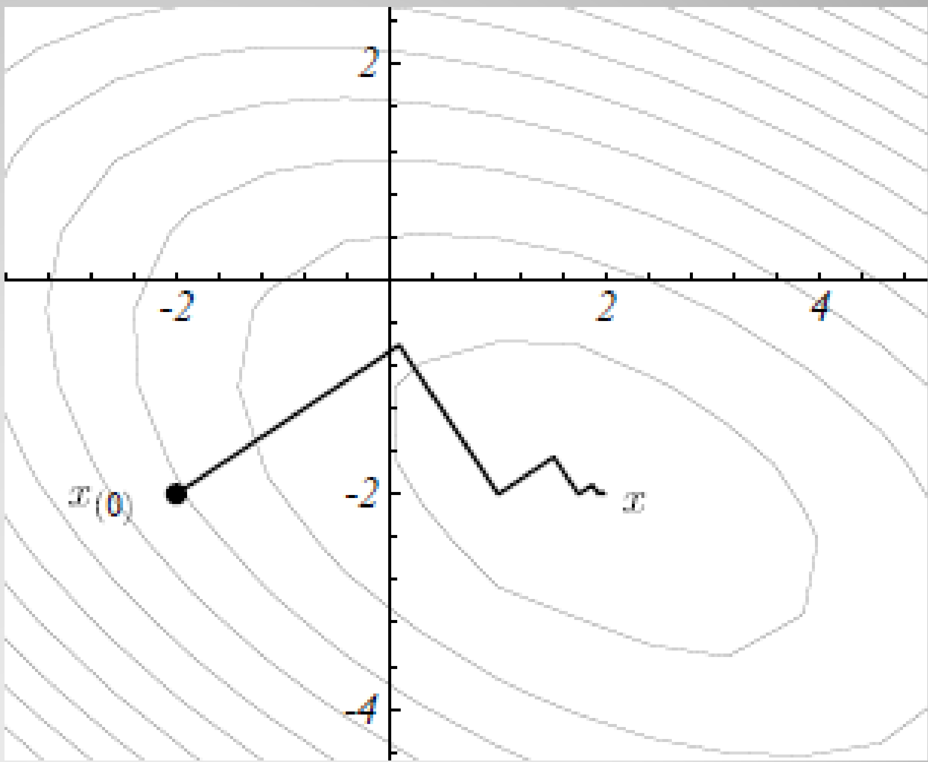
- LU rozklad
  - A=P*L*U, kde L je dolní a U horní trojúhelníková matice a P popisuje permutace řádků
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$
  - L členy odpovídají multiplikátorům z Gaussova eliminačního procesu
  - U odpovídá matici na konci eliminace
  - $A \cdot x = b \rightarrow P \cdot L \cdot U \cdot x = b \rightarrow P \cdot L \cdot (U \cdot X) = b$
  - řeším soustavu $P \cdot L \cdot y = b$ – jen zpětná substituce
  - řeším soustavu $U \cdot x = y$ – jen zpětná substituce
  - složitost: horší než GE, protože jsou třeba dvě substituce
    - význam, pokud potřebuji vyřešit soustavu pro více vektorů pravých stran (b), tj. např. vyhlazení bodů v prostoru

- numerická metoda vázaných gradientů
  - (conjugate gradients)
  - pro zadaný odhad řešení $x_{(0)}$ hledá iterativně skutečné řešení ve směru největšího spádu
  - pro zvolené počáteční řešení $x_{(0)}$ máme chybu: $r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$, skutečné řešení je někde v přibližném směru $r_{(0)}$, tj. nové přesnější řešení $x_{(1)} = x_{(0)} + \alpha_{(0)} \cdot r_{(0)}$, kde $\alpha_{(0)}$ je délka kroku
  - opakujeme zpřesnění tak dlouho, dokud chyba $r_{(i)}$ není zanedbatelná, přičemž délku kroku zkracujeme tak, jak se k výsledku přibližujeme

Soustava lineárních rovnic

Soustava (ne)lineárních rovnic

- problém: velmi často jdeme dlouho blbě, než se to spraví (tj. moc kroků)
  - řešení: korekce směru (jdeme cikcak) - $p_{(i)}$



◦ pseudokód:

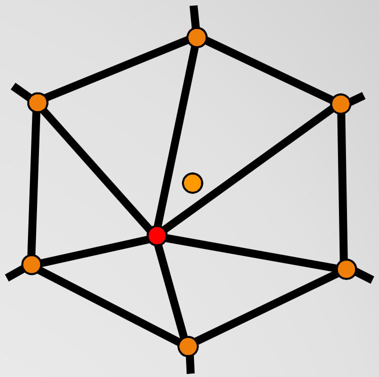
1. $p_{(0)} = r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$
2. for (i = 0; i < max počet kroků; i++)
   1. $\alpha_{(i)} = \frac{{r_{(i)}}^T \cdot r_{(i)}}{{p_{(i)}}^T \cdot A \cdot p_{(i)}}$
   2. $x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} \cdot p_{(i)}$
   3. $r_{(i+1)} = b - A \cdot x_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} \cdot A \cdot p_{(i)}$
   4. if ($r_{(i+1)}$ is "sufficiently small„) return $x_{(i+1)}$
   5. $\beta_{(i)} = \frac{{r_{(i+1)}}^T \cdot r_{(i+1)}}{{r_{(i)}}^T \cdot r_{(i)}}$, $p_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i)} \cdot p_{(i)}$
3. return error;

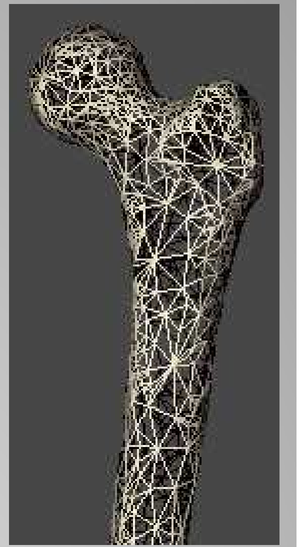
Soustava lineárních rovnic

Laplacianovské vyhlazení

- 3D objekty reprezentovány trojúhelníkovou sítí
- matice L
  - popisuje přenos energie mezi vrcholy, tj. vzájemné vztahy mezi vrcholy
  - např. L_{ij}=-1 pro i=j, 1/d je-li vrchol v_i spojen hranou s v_j, 0 jinde
- triviální řešení: LX=0
- optimalizační řešení:

$$\begin{pmatrix} L \\ w \cdot I \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ w \cdot X_0 \end{pmatrix}$$





Laplacianovské vyhlazení