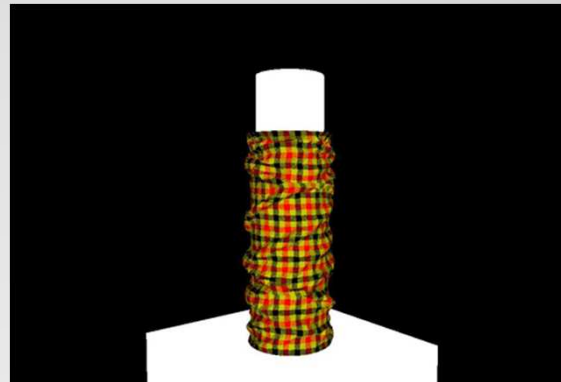
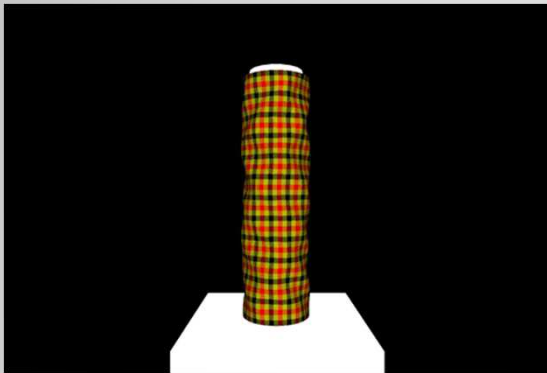


KIV/ZEP - 2011

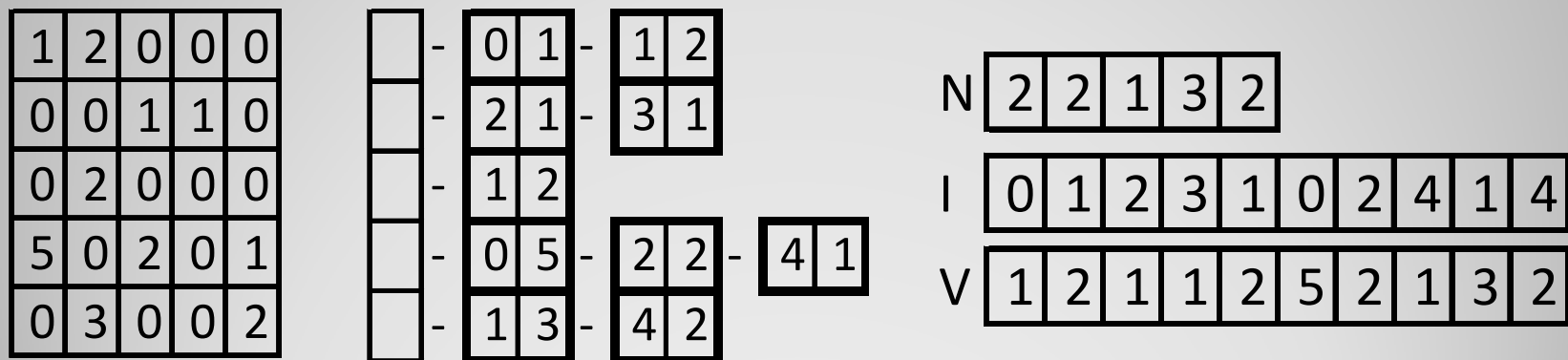
Násobení matic,
řešení soustav lineárních i nelineárních rovnic

- mnoho problémů vede na řešení soustavy lineárních nebo nelineárních rovnic
 - transformace z RGB na YCbCr, radiozitivní řešení, masivní systém pružin (látka), detekce kolizí, proložení funkce zadanými body, ...
 - základem bývá násobení matic



Motivace

- Běžné matice
 - vícerozměrné vs. jednorozměrné pole
 - *zpracování obrázků a volumetrických dat*
- Řídké matice
 - velký počet prvků konstantní (nulové)
 - spojový seznam (dvourozměrný)
 - několik jednorozměrných polí



Matice - reprezentace

- $C = A * B$
- klasicky: $c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$
 - složitost
- D&C: pro n mocniny 2

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j}$$

- složitost: $T(n) = 8T(n/2) + 4(n/2)(n/2)$

Násobení matic

- Strassen formula pro matice 2x2:

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$

$$s = P_1 + P_2$$

$$t = P_3 + P_4$$

$$u = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

- složitost po zobecnění:

$$T(n) = 7T(n/2) + 18(n/2)(n/2)$$

$$P_1 = a \cdot (g - h)$$

$$P_2 = (a + b) \cdot h$$

$$P_3 = (c + d) \cdot e$$

$$P_4 = d \cdot (f - e)$$

$$P_5 = (a + d) \cdot (e + h)$$

$$P_6 = (b - d) \cdot (f + h)$$

$$P_7 = (a - c) \cdot (e + g)$$

Násobení matic

- $A \cdot x = b$

$A = (1..n \times 1..n), x = (x_1 \dots x_n), b = (b_1 \dots b_n)$

- přeurlčená soustava:

$A = (1..m \times 1..n), x = (x_1 \dots x_n), b = (b_1 \dots b_m)$

- často při optimalizačních úlohách

- řešení: soustava $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$

- řešení soustavy

- Gaussova eliminace, LU rozklad, numericky

Soustava lineárních rovnic

- Gaussova eliminace (naivní bez pivotace)
 - necht' zaokrouhlujeme na 5 desetinných míst
 - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right),$
 - eliminujeme položku a_{21} , tj. $a_{2i} = a_{2i} - a_{1i} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}}$
 - co se stane, když a_{11} bude nulové?
 - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right)$
 - eliminujeme položku a_{31} , tj. $a_{3i} = a_{3i} - a_{1i} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}}$
 - $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right)$

Soustava lineárních rovnic

- eliminujeme položku a_{32} , tj. $a_{3i} = a_{3i} - a_{2i} \cdot \frac{a_{32}}{a_{22}}$

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 0 & 15005 & 15004 \end{array} \right)$$

- zpětnou substitucí dostáváme řešení:
[0.99993, -1.5, -0.35]
- Gaussova eliminace s pivotací
 - necht' zaokrouhlujeme na 5 desetinných míst
 - v každém kroce nejprve nalezneme řádek s maximální hodnotou (v abs. hodnotě) a prohodíme ho s aktuálním (pivotace)

Soustava lineárních rovnic

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2.099 & 6 & 3.901 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{array} \right),$

- největší hodnota z $|10|$, $|-3|$, $|5|$ je $|10|$, tj. první řádek je pivotem a eliminujeme položky a_{21} a a_{31}

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{array} \right)$

- největší hodnota z $|-0.001|$ a $|-4.5|$ je $|-4.5|$, tzn. třetí řádek je pivotem, prohodíme tedy řádky 2 a 3

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.001 & 6 & 6.001 \end{array} \right)$

- eliminujeme položku a_{32}

Soustava lineárních rovnic

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.002 & 6.002 \end{array} \right)$
- zpětnou substitucí dostáváme řešení: $[0, 1, 1]$
- řešení zcela odlišné od řešení bez pivotace
- správné (přesné) řešení: $[0, 1, 1]$
- pivotace neřeší problém dělení nulou!
- složitost Gaussovo eliminace?
 - dopředná fáze: $n-1$ kroků, $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2i^2 - 3i + 1$
 - zpětná substituce: n kroků, $T(n) = \sum_{i=1}^n 2i - 1$
 - celkem: $T(n) = \frac{2n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{8n}{3} - 1 \equiv \theta(n^3)$

Soustava lineárních rovnic

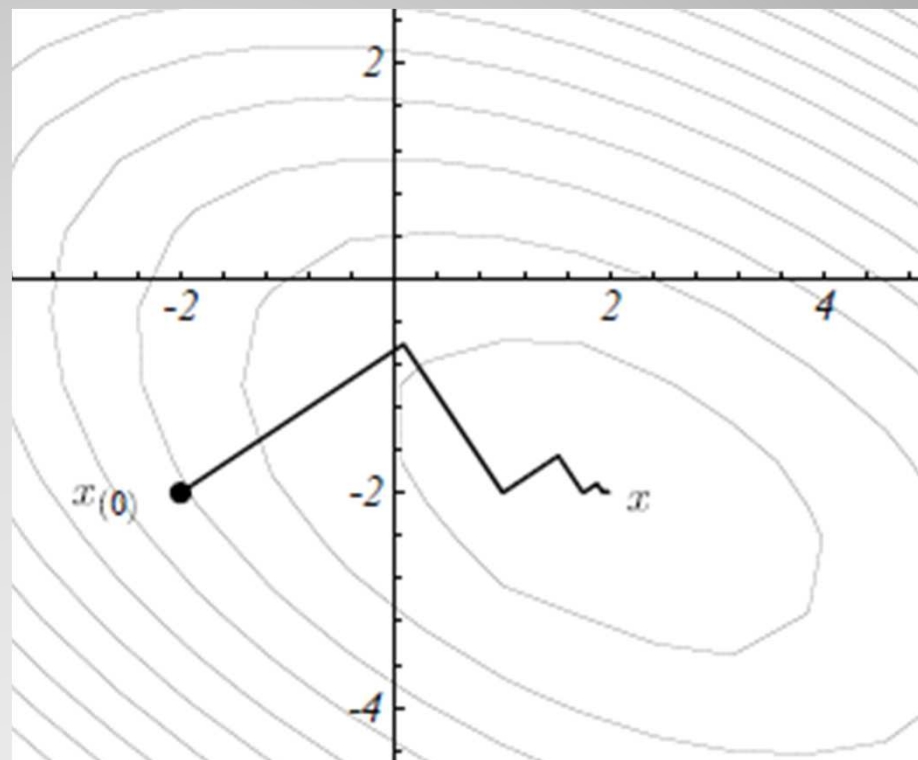
- LU rozklad
 - $A = P \cdot L \cdot U$, kde L je dolní a U horní trojúhelníková matice a P popisuje permutace řádků
 - $$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix}$$
 - L členy odpovídají multiplikátorům z Gaussova eliminačního procesu
 - U odpovídá matici na konci eliminace
 - $A \cdot x = b \rightarrow P \cdot L \cdot U \cdot x = b \rightarrow P \cdot L \cdot (U \cdot X) = b$
 - řeším soustavu $P \cdot L \cdot y = b$ – jen zpětná substituce
 - řeším soustavu $U \cdot x = y$ – jen zpětná substituce
 - složitost: horší než GE, protože jsou třeba dvě substituce
 - význam, pokud potřebuji vyřešit soustavu pro více vektorů pravých stran (b), tj. např. vyhlazení bodů v prostoru

Soustava lineárních rovnic

- numerická metoda vázaných gradientů
 - (conjugate gradients)
 - pro zadaný odhad řešení $x_{(0)}$ hledá iterativně skutečné řešení ve směru největšího spádu
 - pro zvolené počáteční řešení $x_{(0)}$ máme chybu: $r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$, skutečné řešení je někde v přibližném směru $r_{(0)}$, tj. nové přesnější řešení $x_{(1)} = x_{(0)} + \alpha_{(0)} \cdot r_{(0)}$, kde $\alpha_{(0)}$ je délka kroku
 - opakujeme zpřesnění tak dlouho, dokud chyba $r_{(i)}$ není zanedbatelná, přičemž délku kroku zkracujeme tak, jak se k výsledku přibližujeme

Soustava lineárních rovnic

- problém: velmi často jdeme dlouho blbě, než se to spraví (tj. moc kroků)
 - řešení: korekce směru (jdeme cikcak) - $p_{(i)}$



Soustava (ne)lineárních rovnic

◦ pseudokód:

1. $p_{(0)} = r_{(0)} = b - A \cdot x_{(0)}$

2. for (i = 0; i < max počet kroků; i++)

1. $\alpha_{(i)} = \frac{r_{(i)}^T \cdot r_{(i)}}{p_{(i)}^T \cdot A \cdot p_{(i)}}$

2. $x_{(i+1)} = x_{(i)} + \alpha_{(i)} \cdot p_{(i)}$

3. $r_{(i+1)} = b - A \cdot x_{(i+1)} = r_{(i)} - \alpha_{(i)} \cdot A \cdot p_{(i)}$

4. if ($r_{(i+1)}$ is "sufficiently small,,) return $x_{(i+1)}$

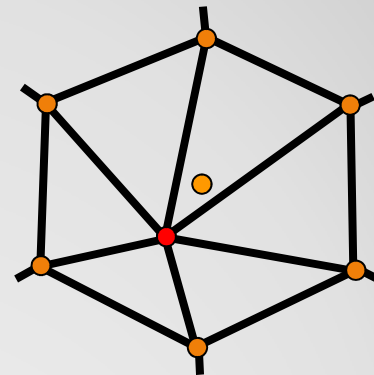
5. $\beta_{(i)} = \frac{r_{(i+1)}^T \cdot r_{(i+1)}}{r_{(i)}^T \cdot r_{(i)}}$, $p_{(i+1)} = r_{(i+1)} + \beta_{(i)} \cdot p_{(i)}$

3. return error;

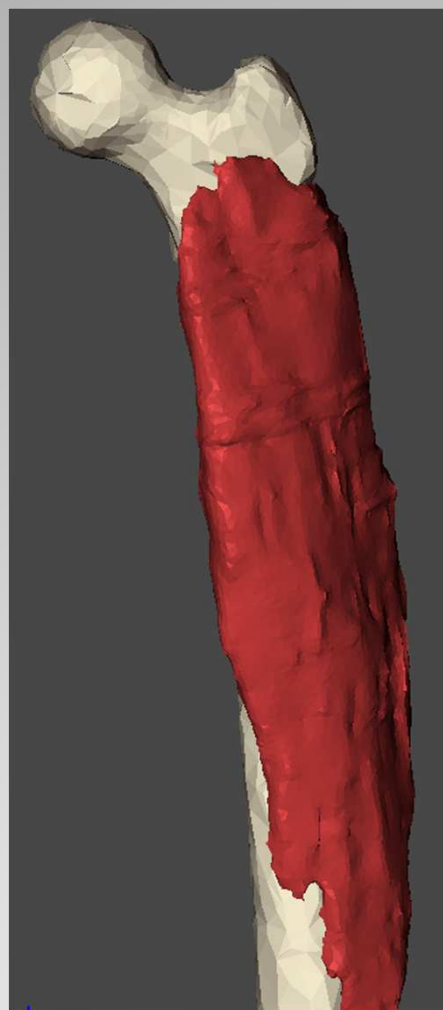
Soustava lineárních rovnic

- 3D objekty reprezentovány trojúhelníkovou sítí
- matice L
 - popisuje přenos energie mezi vrcholy, tj. vzájemné vztahy mezi vrcholy
 - např. $L_{ij} = -1$ pro $i=j$, $1/d$ je-li vrchol v_i spojen hranou s v_j , 0 jinde
- triviální řešení: $LX=0$
- optimalizační řešení:

$$\begin{pmatrix} L \\ w \cdot I \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ w \cdot X_0 \end{pmatrix}$$



Laplacianovské vyhlazení



Laplacianovské vyhlazení