ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Semestrální práce z KIV/VSP

Markovské náhodné procesy a systémy hromadné obsluhy

Martin Sloup, A08N0111P

msloup@students.zcu.cz

20.12.1984, zadání č. 9

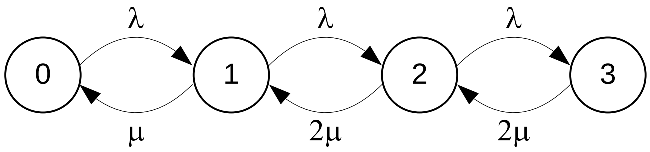
Zadání:

Vytvořte markovský model pro elementární SHO typu M/M/2 (parametry λ = 10.0, μ = 6.0) s délkou fronty omezenou na 1. Z modelu určete pravděpodobnosti, že přicházející požadavek:

- bude obsloužen bez čekání ve frontě,
- nebude vůbec obsloužen, tj. nevstoupí do SHO, protože se nevejde do fronty.

Vypracování

Podle Kendallovy klasifikace má náš model 2 identické kanály. A ze zadání víme, že fronta má velikost 1. Zamyšlením získáme markovský diagram z Obrázku 1.



Obrázek 1 - Markovský diagram

Diagram na obrázku nám popisuje následující stavy:

- 0 – Oba kanály jsou prázdné
- 1 – Jeden z kanálů pracuje, fronta je prázdná
- 2 – Oba kanály pracují, fronta je prázzndá
- 3 – Oba kanály pracují, fronta je plná

U stavů 2 a 3 při dokončení práce si vybíráme z 2 možných kanálů, proto zde je uvedena intenzita 2μ (= 12). Intenzita přicházejících požadavků zde bude λ (= 10). U prvního stavu je intenzita dokončené práce μ (= 6), protože vybíráme jen z jednoho kanálu.

Pro tento diagram sestavíme rovnice pravděpodobnosti stavů:

$$
\begin{aligned}
p_0&:\quad 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 = -10p_0 + 6p_1 \\
p_1&:\quad 0 = -\lambda p_1 - \mu p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0 = 10p_0 - 16p_1 + 12p_2 \\
p_2&:\quad 0 = -\lambda p_2 - 2\mu p_2 + 2\mu p_3 + \lambda p_1 = 10p_1 - 22p_2 + 12p_3 \\
p_3&:\quad 0 = -2\mu p_3 + \lambda p_2 = 10p_2 - 12p_3 \\
&\quad 1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3
\end{aligned}
$$

Rovnici vypočítáme vyjádřením jedné proměnné z rovnice a jejím dosazením do jiné rovnice, atd… Práci si lze ulehčit např. použitím Matlabu:

```
>> [-10 6 0 0; 10 -16 12 0; 0 10 -22 12; 0 0 10 -12; 1 1 1 1]\[0 0 0 0 1]

ans =
    0.191829
    0.319716
    0.26643
    0.222025
```

Dostaneme tak:

$$p_0 \doteq 0{,}1918$$
$$p_1 \doteq 0{,}3197$$
$$p_2 \doteq 0{,}2664$$
$$p_3 \doteq 0{,}2220$$

Pravděpodobnost, že požadavek bude obsloužen bez čekání, vypočítáme součtem pravděpodobností stavů 0 a 1, tj. stavů, kdy před vstupem požadavku ani jeden z kanálů nepracuje nebo, jeden z kanálu pracuje:

$$p_{bez\ čekání} = p_0 + p_1 = 0{,}1918 + 0{,}3197 = 0{,}5115$$

Pravděpodobnost, že požadavek nebude obsloužen je totožná s pravděpodobností stavu 3, tj., že oba kanály pracují a fronta je plná.

$$p_{nebude\ \ obslou\ žen} = 0{,}2220$$

Ověření výsledků pomocí program Markov2

Ověření výsledků bylo provedeno pomocí následujícího zdrojového kódu:

```
module MM2 [4];
#define size 4
#define lambda 10.0
#define mu 6.0

for (i; 0; size-2){
    [i]-> lambda [i+1];
}

[1]->mu [0];
for (i; 1; size-2){
    [i+1]->2 * mu [i];
}
```

Programu Markov2 byl položen dotaz:

```
load "MM2" as buf
define size := 4;
select p[i] as pi from buf for i := 0 to size-1
```

Výsledkem tohoto dotazu byli limitní pravděpodobnosti stavů:

```
       pi
 0.191829
 0.319716
  0.26643
 0.222025
```

Závěr

Dle zadání jsme určili pravděpodobnost, kdy bude požadavek obsloužen bez čekání (0,5115) a i pravděpodobnost, kdy požadavek nebude zpracován, z důvodu plné fronty (0,2220). Tyto hodnoty byly ověřeny pomocí programu Markov2.