FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

KIV/VSP

Spolehlivost

Tomáš Krásný
krasnyt@ntis.zcu.cz
A14N0133P

08. 11. 2015

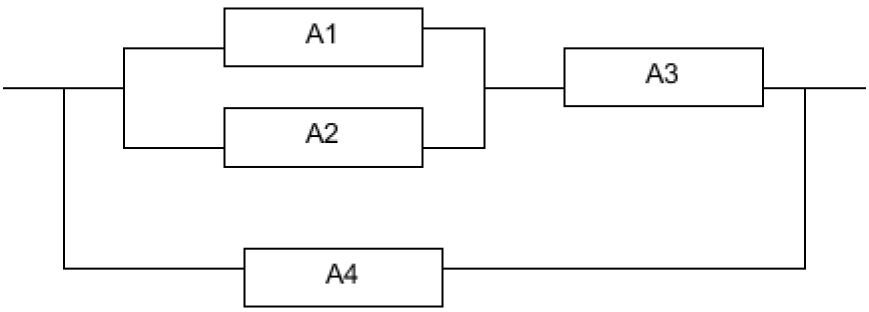
Zadání

Neobnovovaný počítačový systém složený ze čtyř prvků-počítačů je ze spolehlivostního hlediska popsán statickým modelem:

S = ((A_1 par A_2) ser A_3) par A_4

Jsou dány konstantní intenzity poruch prvků A_1 až A_4 jako λ_1 až λ_4. Určete symbolicky (tj. jako vzorec) pravděpodobnost bezporuchového provozu R(t) a střední dobu bezporuchového provozu T_s daného systému. Dále si zvolte nějaké (realistické) hodnoty intenzit poruch a vypočítejte požadované veličiny též numericky.

Model systému



Řešení

$Q(t) - \text{pravděpodobnost poruchy (dist. funkce)}$
$R(t) - \text{pravděpodobnost bezporuchového stavu (dist. funkce)}$
- z toho vyplývá

$$R(t) = 1 - Q(t)$$

- hustota pravděpodobnosti poruchy je potom

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

- intenzita poruch $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - Q(t)}$$

- intenzita poruch $\lambda(t)$ není pravděpodobnost – může přesáhnout 1

Díky empiricky zjištěné „vanové“ křivce intenzity poruch lze po nějakou dobu považovat λ za konstantu, potom

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

a tedy

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

jsou distribuční funkce exponenciálního rozdělení a

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

je hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení.

Střední doba do první poruchy (MTTF) je určena jako

$$T_s = \int_0^\infty R(t) dt$$

a tedy

$$T_s = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda},$$

ale jen pro konstantní λ!

Protože model je složený z více sériových a paralelních zapojení, je nutné je vyřešit samostatně.

Jsou-li prvky zapojeny sériově, musíme znát $R_i(t)$ pro každý prvek, protože porucha jednoho prvku rozbije celý systém:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

a jsou-li λ_i konstantní, pak

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} = e^{\lambda t}, kde\ \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Pro střední dobu poruchy pak platí

$$T_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{1}{\lambda}$$

V případě paralelního zapojení rozbije porucha všech prvků celý systém. Stačí, aby jeden z nich fungoval. Potřebuji tedy znát $Q_i(t)$ pro každý prvek:

$$Q(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t)$$

a tedy

$$R(t) = 1 - Q(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - R_i(t)\right)$$

Známe-li vztahy pro sériové a paralelní zapojení, vytvoříme si vzorec pro celkové $R(t)$.
$Q_{12} = Q_1 Q_2$
Z toho potřebuji vyjádřit R_{12}, neboť to je sériově spojené s A_3
$Q_{12} = (1 - R_1)(1 - R_2)$
$R_{12} = 1 - Q_{12} = 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)$
To nyní sériově spojím s A_3.
$R_{123} = R_{12} R_3 = \big(1 - (1 - R_1)(1 - R_2)\big) R_3$
To celé je nyní paralelně s A_4, proto musím R_{123} *převést na* Q_{123}.
$R_{123} = 1 - Q_{123}$
$Q_{123} = 1 - R_{123} = 1 - \big(1 - (1 - R_1)(1 - R_2)\big) R_3$
To nyní vynásobím s Q_4 a dostanu celkové Q_{1234}.
$Q_{1234} = Q_{123} Q_4$
$Q_{1234} = (1 - \big(1 - (1 - R_1)(1 - R_2)\big) R_3)(1 - R_4)$
Chci zjistit pravděpodobnost bezporuchovosti celkového systému R_{1234}:
$R_{1234} = 1 - Q_{1234}$
$R_{1234} = 1 - (1 - \big(1 - (1 - R_1)(1 - R_2)\big) R_3)(1 - R_4)$
Což po roznásobení vyjde:
$R_{1234} = R_1 R_3 - R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 - R_1 R_4 R_3 + R_1 R_2 R_3 R_4 - R_2 R_3 R_4 + R_4$

Pro exponenciální doby poruch platí $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$.
Po rozepsání:
$$R(t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_2+\lambda_3)t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} - e^{-(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)t} + e^{-\lambda_4 t}$$

Známe tedy celkové $R(t)$, které když nyní zintegrujeme od 0 do ∞, získáme požadované T_s:

$$T_s = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} - \frac{1}{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} + \frac{1}{\lambda_4}$$

Konkrétně zvolené hodnoty mohou vypadat takto:
$\lambda_1 = 1 \cdot 10^{-6} h^{-1}$
$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-6} h^{-1}$
$\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-6} h^{-1}$
$\lambda_4 = 4 \cdot 10^{-6} h^{-1}$

Po dosazení:
$$T_s = \frac{3950000}{9} = 438888{,}9\ h^{-1}$$