FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

KIV/VSP

Markovské náhodné procesy a systémy hromadné obsluhy

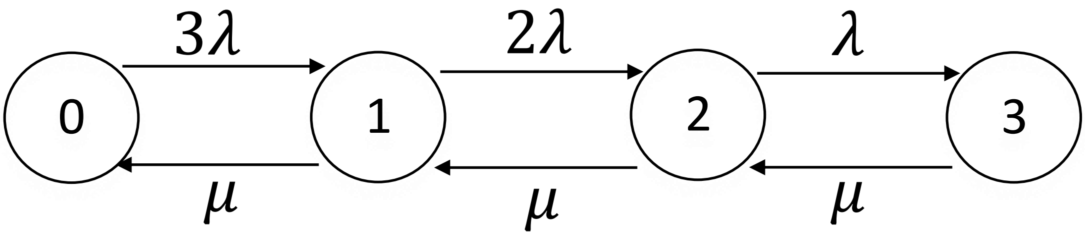
Tomáš Krásný
krasnyt@ntis.zcu.cz
A14N0133P

3. 11. 2015

Zadání

Vytvořte markovský model pro n = 3 vlákna využívající jednu kritickou sekci. Vlákna fungují podle stejného programu a realizují výpočet v nekonečné smyčce, která se skládá z lokálního výpočtu a z výpočtu v kritické sekci. Doba lokálního výpočtu má exponenciální rozdělení s parametrem λ = 1. Doba výpočtu v kritické sekci má rovněž exponenciální rozdělení ale s parametrem μ = 2, režijní čas synchronizačních operací zanedbáváme. Z modelu vypočítejte střední frekvenci cyklu výpočtu vlákna (je pro všechna vlákna stejná) a porovnejte ji s případem, kdy obě uvedené dílčí doby výpočtu vláken jsou pevné (nenáhodné) a rovné střední hodnotě zadaného exponenciálního rozdělení.

Graf přechodů



Význam stavů:

0: (všechny) 3 vlákna provádějí lokální výpočet
1: 2 vlákna provádějí lokální výpočet, 1 vlákno je v kritické sekci (KS)
2: 1 vlákno provádí lokální výpočet, 1 vlákno je v KS a 1 vlákno čeká
3: žádné vlákno nepočítá lokálně, 1 vlákno je v KS a 2 vlákna čekají

Na základě grafu přechodů lze vytvořit soustavu rovnic.

Soustava rovnic

$$0 = -3\lambda p_0 + \mu p_1$$
$$0 = 3\lambda p_0 - (2\lambda + \mu)p_1 + \mu p_2$$
$$0 = 2\lambda p_1 - (\lambda + \mu)p_2 + \mu p_3$$
$$0 = \lambda p_2 - \mu p_3$$

Jelikož jsou rovnice lineárně závislé (jejich součet dá 0), musíme k jejich vyřešení použít tzv. normalizační podmínku, kterou nahradíme libovolnou rovnici. Tato podmínka je ve tvaru:

$$1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$

Po nahrazení například 3. rovnice a po dosazení známých hodnot, získáváme soustavu rovnic v tomto tvaru:

$$
\begin{aligned}
0 &= -3p_0 + 2p_1 \\
0 &= 3p_0 - (2+2)p_1 + 2p_2 \\
1 &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \\
0 &= p_2 - 2p_3
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu lze dále postupně upravovat:

$$
\begin{aligned}
0 &= -3p_0 + 2p_1 \\
0 &= 3p_0 - (2+2)p_1 + 2p_2 \\
1 &= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 \\
\mathbf{0} &= \boldsymbol{p_2 - 2p_3} && \rightarrow \boldsymbol{p_2 = 2p_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \boldsymbol{-3p_0 + 2p_1} && \rightarrow \boldsymbol{p_0 = \tfrac{2}{3}p_1} \\
0 &= 3p_0 - 4p_1 + 4p_3 \\
1 &= p_0 + p_1 + 3p_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \boldsymbol{-2p_1 + 4p_3} && \rightarrow \boldsymbol{p_1 = 2p_3} \\
1 &= \tfrac{5}{3}p_1 + 3p_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \tfrac{10}{3}p_3 + 3p_3 \\
p_3 &= \tfrac{3}{19}
\end{aligned}
$$

A po zpětném dosazování získáváme výsledky:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{12}{57} = 0.210526 \\
p_1 &= \frac{6}{19} = 0.315789 \\
p_2 &= \frac{6}{19} = 0.315789 \\
p_3 &= \frac{3}{19} = 0.157895
\end{aligned}
$$

Střední frekvence návratových hran

To jsou takové hrany, které reprezentují ukončení cyklu vlákna neboli výstup z kritické sekce. Hodnoty jednotlivých frekvenci se nakonec zprůměrují, abychom dostali střední hodnotu frekvence dokončení cyklu.

$$f_1 = p_1\mu = 0.315789 \cdot 2 = 0.631578$$
$$f_2 = p_2\mu = 0.315789 \cdot 2 = 0.631578$$
$$f_3 = p_3\mu = 0.157895 \cdot 2 = 0.31579$$
$$f = \frac{1.578946}{3} \cong 0.526315 \cdot s^{-1}$$

Trvání cyklu vlákna při pevné době výpočtů (bez čekání) je $1.5s$ $(1 + 0.5)$.
Z toho lze vyjádřit frekvenci:

$$f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}s^{-1}$$

Poměr trvání cyklu bez čekání a cyklu s čekáním potom je:

$$\frac{f}{f'} = 0.526315 \cdot \frac{3}{2} \cong 0.79$$

Závěr

Úloha byla ve finále docela jednoduchá. Nejtěžší je pochopit danou problematiku, rozumět významu stavů a jednotlivých hran mezi nimi. Sestavit a vyřešit soustavu rovnic z grafu bylo poté jednoduché. Menší problém mi dělalo pochopení požadavků na frekvenci. Za pomoci menší konzultace jsem již frekvence dopočítal.