ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Semestrální práce z KIV/VSP

Sítě front

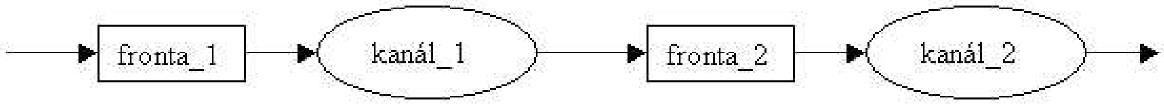
Martin Sloup, A08N0111P

msloup@students.zcu.cz

20.12.1984, zadání č. 2

Zadání

Pro zadanou otevřenou síť front vypočítejte odhad hodnot L_q a T_q. Časové intervaly mezi vstupy požadavků mají exponenciální rozdělení s parametrem $\boldsymbol{\lambda}$ = 0.5, oba kanály obsluhy mají gaussovsky rozdělenou dobu obsluhy se středními hodnotami $T_{s_1} = 1$, $T_{s_2} = 1{,}33$.



Dále určete střední frekvenci výstupního toku požadavků.

Vypracování

Ze zadání zajisté vyplívá, že se jedná o případ SHO označený v Kendallově klasifikaci jako M/G/1. Pokud se zamyslíme nad zadání, narazíme na dva problémy. První z nich je, že neznáme koeficient variace doby obsluhy C_s pro výpočet střední délky fronty SHO M/G/1 :

$$L_w = \frac{\varrho^2}{2(1-\varrho)}(1 + C_s^2)$$

Pro gaussovskou dobu obsluhy se variance doby obsluhy pohybuje v rozmezí $0 < C_s < 1$. $C_s = 0$ odpovídá shodné (nenáhodné) době obsluhy (tj. M/D/1) a střední délka fronty L_w vyjde přibližně dvakrát menší než pro SHO M/M/1. Pokud budeme uvažovat nejhorší případ, tj. $C_s = 1$, jedná se o variantu SHO M/M/1.

Ze střední délky fronty se již dají jednoduchým způsobem spočítat hodnoty L_q (střední celkový počet požadavků v SHO):

$$L_q = L_w + L_s = L_w + m \cdot \lambda \cdot T_s$$ [1]

A pomocí Littleový vztahů i T_q (střední doba průchodu požadavků elementárním SHO – střední doba odezvy):

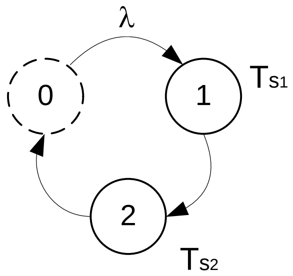
$$T_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Druhým problémem je, že pro učení celkového T_q obou SHO je zapotřebí znát celkové L_q. To je možné spočítat použitím Jacksonového teorému:

- Všechny toky požadavků z okolí do sítě mají poissonovský charakter.
- Všechny obslužné uzly mají exponenciální rozdělení doby obsluhy se střední hodnotou T_{s_i}.
- Po ukončení obsluhy v uzlu i přechází požadavek zcela náhodně do dalšího uzlu j (tj. s pravděpodobností p_{ij}), přitom přechod se uskuteční bez zpoždění.

[1] V našem případě je počet kanálů 1, tedy $m = 1$.

Z toho vyplívá, že celkové L_q lze spočítat jen pro SHO M/M/1. Proto L_q a T_q spočítáme pro nejhorší případ (tj. M/M/1) s vědomím, že výsledné hodnoty pro SHO M/G/1 budou nižší. Nyní již tedy výpočet pro SHO M/M/1.



Obrázek 1 - Markovská reprezentace našeho SHO

Nejprve vypočítáme tok uzly:

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 p_{01} = \lambda = 0{,}5$$
$$\Lambda_2 = \Lambda_1 p_{12} = \lambda = 0{,}5$$

Následně i zatížení:

$$\varrho_1 = \Lambda_1 T_{s_1} = \lambda T_{s_1} = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$$
$$\varrho_2 = \Lambda_2 T_{s_2} = \lambda T_{s_2} = 0{,}5 \cdot 1{,}33 = 0{,}665$$

Platí podmínka stacionarity, tj. $\varrho < 1$. Spočteme L_q (střední celkový počet požadavků v SHO) pro každý uzel. Nejdříve však odvodíme tento vzorec použitím střední délky fronty L_w, variance doby obsluhy $C_s = 1$ pro SHO M/M/1 a vzorce $\varrho = \lambda T_s$:

$$L_q = \frac{\varrho^2}{2(1-\varrho)}(1 + C_s^2) + \lambda T_s = \frac{\varrho^2}{1-\varrho} + \varrho = \frac{\varrho}{1-\varrho}$$
$$L_{q_1} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} = \frac{0{,}5}{1-0{,}5} = 1$$
$$L_{q_2} = \frac{\varrho_2}{1-\varrho_2} = \frac{0{,}665}{1-0{,}665} = 1{,}985$$

Použitím Jacksonova teorému vypočítáme L_q celého našeho SHO:

$$L_q = L_{q_1} + L_{q_2} = 1 + 1{,}985 = 2{,}985$$

Pomocí jednoho z Littleových vzorců získáme T_q (střední dobu odezvy):

$$T_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2{,}985}{0{,}5} \doteq 5{,}970$$

Nyní již zbývá vypočítat střední frekvenci výstupního toku. Tu vypočítáme z převrácené hodnoty střední doby obsluhy (v sekundách) druhého uzlu:

$$\mu = \frac{1}{T_{s_2}} = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}752 Hz$$

Závěr

Cílem bylo vypočítat hodnoty L_q, T_q a μ pro SHO M/G/1. Pro neznalost hodnoty variance doby obsluhy (C_s) jsme provedli výpočet hodnot pro nejhorší případ, tj. pro SHO typu M/M/1. Hodnoty pro M/G/1 budou tedy nižší (pro μ bude vyšší) než námi vypočítané pro nejhorší případ.

Tedy přesněji:

$$L_q(pro\ \ M/G/1) < 2{,}985$$
$$T_q(pro\ \ M/G/1) < 5{,}970$$
$$\mu(pro\ \ M/G/1) > 0{,}752Hz$$