



ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI

# Výkonnost a spolehlivost číslicových systémů

Úloha 2 (opravená verze)  
Příklady na markovské modely a elementární SHO

Zadání 9

Jan Kupka (A01165)  
[kupka@students.zcu.cz](mailto:kupka@students.zcu.cz)

# 1. Zadání

## Obecné

Pro každý z dále uvedené množiny příkladů:

- nakreslete graf přechodů markovského modelu (vždy se jedná o model bez absorbčních stavů),
- graf komentujte (význam stavů a přechodů),
- napište soustavu rovnic využitelnou pro určení limitních pravděpodobností stavů modelu,
- limitní p-ti stavů číselně vypočítejte z daných číselných parametrů modelu s využitím programu MARKOV,
- z vypočítaných limitních p-tí stavů vypočítejte číselně další veličiny dle zadání příslušného příkladu.

**Poznámka:** Pro parametry příkladů (typicky frekvence  $\lambda$ ,  $\mu$ ) nejsou většinou zadány fyzikální jednotky. Proto si dle charakteru příkladu nějaké přiměřené zvolte, příkladně [1/s], [1/hod], [1/rok] ap.

## Zadání 9

Do bufferu s neomezenou kapacitou přicházejí zprávy, doba mezi příchodem zpráv je náhodná a má exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda = 0.9$ . Zprávy jsou z bufferu vybírány (pokud tam nějaké jsou) opět náhodně, doba mezi po sobě jdoucími výběry zpráv je též náhodná a má exponenciální rozdělení s parametrem  $\mu = 1.0$ . S využitím markovského modelu určete:

- střední počet zpráv, které se v bufferu nachází,
- kolik procent času při dlouhodobém sledování bude buffer prázdný,
- jak často (průměrná perioda) se buffer úplně vyprázdní.

**Poznámka:** Pro numerický výpočet pomocí nástroje MARKOV počet stavů modelu nějak (rozumně) omezte.

## 2. Řešení – analytické

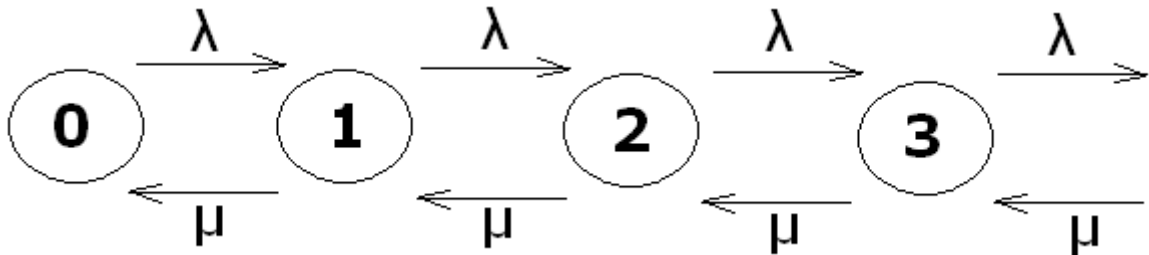
Obecný graf přechodů markovského modelu:

Stavy reprezentují počet zpráv v bufferu.

Přechod směrem vpravo znamená příchod nové zprávy.

Přechod směrem vlevo znamená výběr zprávy.

Díky nekonečnému bufferu bude počet stavů nekonečný.



Z markovského modelu získáme následující rovnice:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = \lambda p_0 - \mu p_1 - \lambda p_1 + \mu p_2$$

$$0 = \lambda p_1 - \mu p_2 - \lambda p_2 + \mu p_3$$

...

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + \dots$$

1. rovnice:

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda / \mu) p_0 = p_1$$

dosadíme :  $\rho = \lambda / \mu$

$$\mathbf{p_1 = \rho p_0}$$

2. rovnice:

$$\mu (p_1 - p_2) = \lambda (p_0 - p_1)$$

$$p_1 - p_2 = \rho (p_0 - p_1)$$

dosadíme :  $p_1 = \rho p_0$

$$\rho p_0 - p_2 = \rho (p_0 - \rho p_0)$$

$$\mathbf{p_2 = \rho^2 p_0}$$

3. rovnice:

$$\mu (p_2 - p_3) = \lambda (p_1 - p_2)$$

$$p_2 - p_3 = \rho (p_1 - p_2)$$

dosadíme :  $p_2 = \rho^2 p_0$  a  $p_1 = \rho p_0$

$$\rho^2 p_0 - p_3 = \rho (\rho p_0 - \rho^2 p_0)$$

$$\mathbf{p_3 = \rho^3 p_0}$$

atd.

Řešení soustavy rovnic:

$$p_k = \rho^k \cdot p_0 = \rho^k \cdot (1 - \rho)$$

Jednotlivé pravděpodobnosti:

$$p_0 = (1 - \rho) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$p_1 = \rho^1 p_0 = 0,9 * 0,1 = 0,09$$

$$p_2 = \rho^2 p_0 = 0,81 * 0,1 = 0,081$$

$$p_3 = \rho^3 p_0 = 0,729 * 0,1 = 0,0729$$

$$p_4 = \rho^4 p_0 = 0,6561 * 0,1 = 0,0656$$

$$p_5 = \rho^5 p_0 = 0,5905 * 0,1 = 0,0591$$

$$p_6 = \rho^6 p_0 = 0,5314 * 0,1 = 0,0531$$

$$p_7 = \rho^7 p_0 = 0,4783 * 0,1 = 0,0478$$

$$p_8 = \rho^8 p_0 = 0,4305 * 0,1 = 0,0431$$

$$p_9 = \rho^9 p_0 = 0,3874 * 0,1 = 0,0387$$

### 3. Řešení – program Markov

Zdrojový kód programu (pro 10 stavů):

```
module Buffer[50];
#define pocet 10
#define mi1 0.9
#define mi2 1.0

for (i ;0; pocet-2){
    [i]->mi1 [i+1];
}

for (i; 0; pocet-2){
    [i+1]->mi2 [i];
}
```

Výsledky (pro 10 stavů):

$$p_0 = 0,1535$$

$$p_1 = 0,1382$$

$$p_2 = 0,1244$$

$$p_3 = 0,1119$$

$$p_4 = 0,1007$$

$$p_5 = 0,0907$$

$$p_6 = 0,0816$$

$$p_7 = 0,0734$$

$$p_8 = 0,0661$$

$$p_9 = 0,0595$$

Výsledky (pro 50 stavů):

$$p_0 = 0,1005$$

$$p_1 = 0,0905$$

$$p_2 = 0,0814$$

$$p_3 = 0,0733$$

$$p_4 = 0,0659$$

$$p_5 = 0,0594$$

$$p_6 = 0,0534$$

$$p_7 = 0,0481$$

$$p_8 = 0,0433$$

$$p_9 = 0,0389$$

...

## 4. Řešení – další veličiny

**Střední počet zpráv, které se v bufferu nachází:**

$$L_w = L_q - L_s$$

$$L_q = (\rho / (1 - \rho)) = 9$$

$$L_s = \rho = 0,9$$

$$L_w = 9 - 0,9 = 8,1$$

**Kolik procent času při dlouhodobém sledování bude buffer prázdný:**

$$p_0 = 0,1 = 10 \%$$

**Jak často (průměrná perioda) se buffer úplně vyprázdní:**

$$f_{ij} = p_i \lambda_{ij}$$

$$f = p_1 \mu = 0,09 * 1 = 0,09$$

$$T_f = 1 / f = 1/0,09 = 11,11$$

## 5. Závěr

Porovnání hodnot, které poskytuje program, s vypočtenými hodnotami.

Stav	Výpočet	Markov (10 stavů)	Markov (50 stavů)
0	0,1000	0,1535	0,1005
1	0,0900	0,1382	0,0905
2	0,0810	0,1244	0,0814
3	0,0729	0,1119	0,0733
4	0,0656	0,1007	0,0659
5	0,0591	0,0907	0,0594
6	0,0531	0,0816	0,0534
7	0,0478	0,0734	0,0481
8	0,0431	0,0661	0,0433
9	0,0387	0,0595	0,0389

Hodnoty vypočítané programem se blíží k ručně vypočítaným hodnotám při zvyšování počtu stavů.