5. Funkce náhodných veličin a náhodných vektorů

5.1 Spojité náhodné veličiny

V této části se budeme zabývat problematikou transformace náhodné veličiny tak , jak jsme již několikrát zmínili v předchozím textu. Nejdříve uvedeme dvě základní věty o substituci v integrálním počtu. Důkazy těchto vět lze najít v každé učebnici integrálního počtu.

Věta 5.1

Nechť **X** je náhodná veličina a **Y** = h(X) , kde h je ryze monotónní funkce všude diferencovatelná. Nechť **f** je hustota náhodná veličina **X** , potom funkce

$$g(y) = f\left[h^{-1}(y)\right].\left|\left(h^{-1}(y)\right)'\right| \qquad (5.1)$$

je hustota náhodné veličiny **Y** = h(**X**).

Věta 5.2

Nechť $\mathbb{X}$ = (X_1 , X_2 ,…,X_n) je spojitý náhodný vektor , který má sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f\left(x_1,...,x_n\right)$. Nechť dále $h:\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$ je regulární zobrazení. Potom má náhodný vektor $\mathbb{Y}$ = h($\mathbb{X}$) sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$g\left(y_1,...,y_n\right) = f\left[h_1^{-1}\left(y_1,...,y_n\right),...,h_n^{-1}\left(y_1,...,y_n\right)\right].\left|Jac\left(h\right)\right|, \qquad (5.2)$$

kde $Jac\left(h\right)$ je Jakobián zobrazení h.

Příklad 5.1

1. Nechť **X** je náhodná veličina , a , b ∈ $\mathbb{R}_1$, a ≠ 0. **Y** = a . **X** + b. Potom podle (5.1) je

$$g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right).\frac{1}{|a|} \qquad (5.3)$$

Jestliže bude například **X** = N(μ , σ^2) a zvolíme – li $Y = \frac{1}{\sigma}.X - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma}$ získáme $g(y) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{y^2}{2}}.|\sigma| = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{y^2}{2}}, y \in \mathbb{R}_1$, ale tato hustota je , jak dobře víme, hustotou rozdělení N(0,1).

2. Jestliže není funkce h z věty 4.1 ryze monotónní na intervalu (a , b) , lze ve většině praktických případů tento interval rozložit na disjunktní podmnožiny , na nichž je již h monotónní a můžeme na ně použít větu 4.1.

Nechť **Y** = $\mathbf{X^2}$ **,** **F** je distribuční funkce **náhodné veličiny** X a **f** je její hustota. Označme **G** distribuční funkci náhodné veličiny **Y**. Potom jestliže je y > 0 :

$$G\left(y\right) = P\left(Y < y\right) = P\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right), \qquad (5.4)$$

pro y ≤ 0 je zjevně $G\left(y\right) = 0$. Hledáme – li vztah mezi hustotami máme pro y > 0:

$$g\left(y\right) = \frac{1}{2.\sqrt{y}}.\left(f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right), \qquad (5.5)$$

pro ostatní hodnoty je $g(y) = 0$.

Pokračujeme – li v tomto případě a zvolíme za náhodnou veličinu **X** = N(0,1) , získáme náhodnou veličinu **Y** = $\chi^2(1)$ s následující hustotou :

$$g : y \mapsto \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi . y}} . e^{-\frac{y}{2}} & , y > 0 \\ 0 & , y \le 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Jestliže je $\mathbb{X}=(X_1,\ldots,X_a)$ je náhodný vektor se sdruženou hustotou pravděpodobnosti f a **Y** = h($\mathbb{X}$) je náhodná veličina (h : $\mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{R}_1$ je borelovské zobrazení), potom můžeme stanovit distribuční funkci **G** náhodné veličiny **Y** takto :

$$G(y) = P(Y \le y) = \int_{h(x_1,\ldots,x_n) \le y} \ldots \int f(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \ldots dx_n \, , \tag{5.7}$$

důkaz tohoto tvrzení je proveden v [2]. Toto tvrzení bude základem pro naši další práci.

Zkoumejme nyní případ , kdy funkce h je funkcí dvou proměnných a je rovna součtu svých argumentů. Tedy **Y** = **X₁** + **X₂** , budeme opět předpokládat, že sdružená hustota pravděpodobnosti je rovna **f** , hustoty jednotlivých náhodných veličin $\mathbf{X_i}$ jsou rovny f_i a jejich distribuční funkce jsou rovny $\mathbf{F_i}$ **.** Dále budeme předpokládat, že hustota náhodné veličiny **Y** je rovna **g** a její distribuční funkce je rovna **G** . Potom můžeme využít předchozího vztahu :

$$G(y) = P(Y \le y) = \iint_{x_1+x_2 \le y} f(x_1,x_2) dx_1 dx_2 = \int_{=\infty}^{+\infty} \left(\int_{=\infty}^{y=x_2} f(x_1,x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{=\infty}^{+\infty} \left(\int_{=\infty}^{y=x_1} f(x_1,x_2) dx_2 \right) dx_1 \, .$$

Jestliže budou navíc náhodné veličiny $\mathbf{X_1}$ **a** $\mathbf{X_2}$ nezávislé , platí podle věty vztah $f(x_1,x_2) = f_1(x_1).f_2(x_2)$ a můžeme tedy zjednodušit předchozí vztah takto:

$$G(y) = \int_{=\infty}^{+\infty} F_1(y-x_2).f_1(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1).F_2(y-x_2) dx_2 \, , \tag{5.8}$$

odtud můžeme odvodit vztah pro hustotu **g**:

$$g(y) = \int_{=\infty}^{+\infty} f_1(y-x_2).f_1(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1).f_2(y-x_2) dx_2 \tag{5.9}$$

Pomocí předchozího vztahu se v matematice definuje tzv. **konvoluce** funkcí , která hraje významnou roli například v teorii distribucí , a označuje se $g = f_1 * f_2 = f_1 * f_2$ .Protože případ součtu nezávislých náhodných veličin se vyskytuje v teorii pravděpodobnosti velmi často vyřešíme několik základních případů součtu nezávislých náhodných veličin.

Příklad 5.2:

a) Nechť tedy je $\mathbf{X_1 = N(\mu_1 , \sigma_1^2)}$ **a** $\mathbf{X_2 = N(\mu_2 , \sigma_2^2)}$**.** Podle předchozího vztahu (5.9) je hustota součtu rovna:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{(y-x_2-\mu_1)^2}{2.\sigma_1}} . \frac{1}{\sigma_2.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2.\sigma_2}} dx_2 = \frac{1}{\sigma_1.\sigma_2.2.\pi} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-x_2-\mu_1)^2}{2.\sigma_1}} . e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2.\sigma_2}} dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1.\sigma_2.2.\pi} . e^{-\left\{ \frac{(y-\mu_1)^2}{2.\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2.\sigma_2^2} \right\}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_2^2 . \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) - 2.x_2 . \left(\frac{\mu_1 - y}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right)}{2}} dx_2 = \frac{1}{\sigma_1.\sigma_2.2.\pi} . e^{-\left\{ \frac{(y-\mu_1)^2}{2.\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{2.\sigma_2^2} \right\}} . e^{\frac{\left(\frac{\mu_1 - y}{\sigma_1^2} - \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} \right)^2}{2.\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)}} .$$

$$. \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2}} . \sqrt{2.\pi}} . e^{-\frac{(y-\mu_1-\mu_2)^2}{2.(\sigma_1^{\,2} + \sigma_2^{\,2})}}$$

Výsledkem je tedy hustota rozdělení $N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$. Znamená to , že množina nezávislých náhodných veličin typu normální rozdělení je uzavřená vůči operaci sčítání náhodných veličin. Zároveň si všimněme, že střední hodnota součtu náhodných veličin je skutečně rovna součtu středních hodnot a dokonce rozptyl součtu těchto náhodných veličin je roven součtu rozptylů (nezávislost náhodných veličin).

b) Nechť tedy dále je **X_1 = R(0 , 1)** a **X_2 = R(0,1),** dvě nezávislé náhodné veličiny typu rovnoměrné rozdělení na intervalu <0 , 1>. Budeme vyšetřovat hustotu **g** součtu těchto náhodných veličin. K vyčíslení opět použijeme vztah (5.9) .

$g(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(y-x_2\right).f_2\left(x_2\right)dx_2$, kde uvedené hustoty jsou totožné a rovné hustotě rovnoměrného rozdělení na intervalu <0 , 1>. Tato hustota je rovna nule vně intervalu <0 , 1>, proto musí být hodnoty y - x_2 a x_2 prvky tohoto intervalu, aby mohla být výsledná hustota **g** různá od nuly. Tedy musí platit

$$y-x_2\in\langle 0,1\rangle \quad\wedge\quad x_2\in\langle 0,1\rangle \quad\Rightarrow$$

$$0\le y-x_2\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad x_2\le y\le 1+x_2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(0\le x_2\le 1\right)\wedge\left(y-1\le x_2\le y\right)$$

Odtud vyplývá, že jestliže y < 0 funkční hodnota hustoty f_2 je rovna nule (podle předchozích nerovností), tedy i hodnota hustoty **g** v tomto bodě. Jestliže zvolíme y>2 , je naopak funkční hodnota f_1 v bodě y-x_2 jistě rovna nule na integračním oboru, tedy je opět hustota **g** v tomto bodě rovna nule.

Je nutno vyšetřit funkci **g** na intervalu < 0 , 2 >.

1. Zvolíme nejdříve y∈< 0 , 1 >. $f_1\left(y-x_2\right)=\begin{cases}1, & y-x_2\in\langle 0,1\rangle\Rightarrow x_2\in\langle 0,y\rangle\\ 0, & jinak\end{cases}$, tedy

$$g(y)=\int_0^y 1dx_2=y \tag{5.10}$$

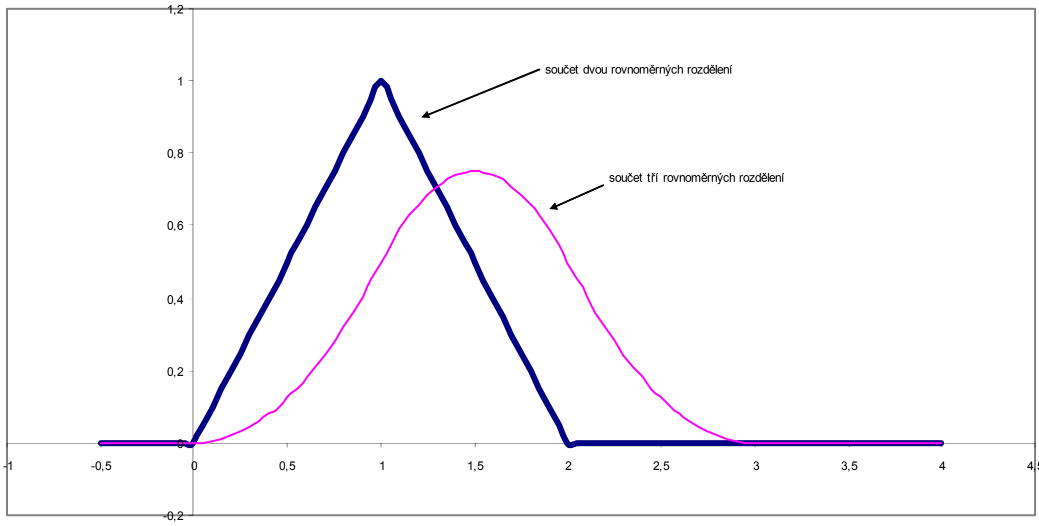
2. Zvolíme y ∈ < 1 , 2 >. $f_2\left(x_2\right)=\begin{cases}1, & x_2\in\langle y-1,1\rangle\\ 0, & jinak\end{cases}$, tedy

$$g(y)=\int_{y-1}^{1} 1dx_2=2-y \tag{5.11}$$

Takovémuto rozdělení se říká **Simpsonovo rozdělení**. Pokud bychom provedli dokonce konvoluci tří rovnoměrných rozdělení na intervalu <0,1> , získali bychom rozdělení s hustotou:

$$g: y\mapsto\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{y^2}{2}, & y\in<0,1)\\ -y^2+3.y-\dfrac{3}{2}, & y\in<1,2)\\ \dfrac{y^2-6.y+9}{2} & y\in<2,3)\\ 0, & y\in<3,+\infty)\end{cases} \tag{5.12}$$

Grafy hustot těchto rozdělení jsou uvedeny dále.



Nechť **X**=**N(0,1)** , zvolme **Y = 2.X** .Potom podle vztahu   je hodnota **G** distribuční funkce rovna:

$$G(y) = P(Y < y) = P(2.X < y) = P\left(X < \frac{y}{2}\right) = \Phi\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow$$

$$g(y) = \frac{1}{2}.f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{y^2}{8}}\right) = \frac{1}{2.\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{y^2}{8}} , \qquad (5.13)$$

toto je ale hustota rozdělení **N(0,2).** Ověřte sami , že jestliže **X = N(** μ **,** σ^2 **)** a **Y = a . X** , potom náhodná veličina **Y = N(a.**μ **, a.**σ^2 **).**

Provedeme –li aplikaci vztahu (5.3). na rovnoměrné rozdělení R(0,1) na intervalu <0,1> dostáváme následující výslednou hustotu náhodné veličiny **Y = a.X** :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{a}, & x \in \langle 0, a \rangle \\ 0, & jinak \end{cases} ,$$

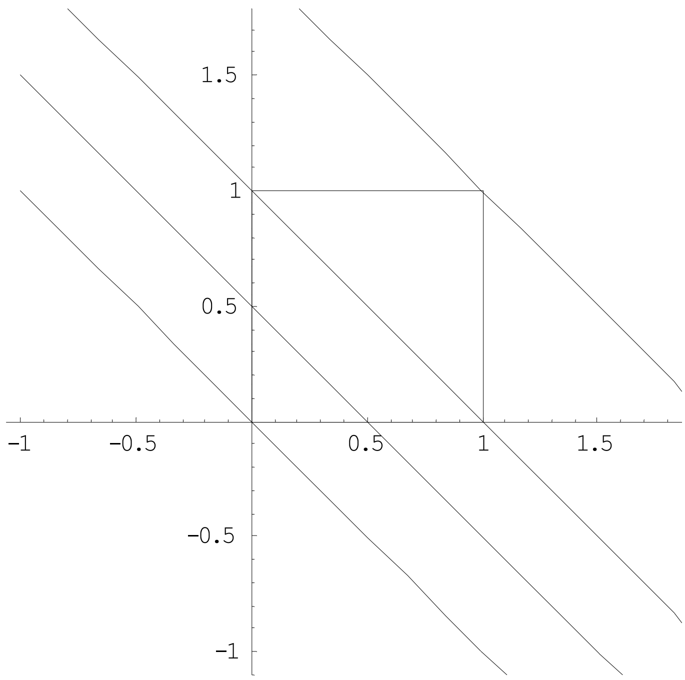
vidíme , že hodnota hustoty se s rostoucím a bodově přibližuje k nulové funkci.

V dalším si ukážeme druhý možný způsob výpočtu distribučních funkcí a hustot lineárních kombinací nezávislých náhodných veličin. Řešení budeme přímo ukazovat na dvou příkladech.

Příklad 5.3:

1. **Y =** $\mathbf{X_1}$ **+** $\mathbf{X_2}$ **,** kde $\mathbf{X_i}$ je rovnoměrné rozdělení na intervalu <0 , 1>. Je zřejmé, že hustota součtu je nenulová jen na kartézském součinu množin , na kterých jsou nenulové původní hustoty $\mathbf{f_i}$ **.** Tedy hustota **Y** je nenulová na množině <0,1> x <0,1> .

Na této množině je nutně její hodnota podle věty rovna **1** . Distribuční funkci určíme tak, že budeme postupně podle vztahu (5.9) počítat plochy, které jsou vytnuty v uvedeném čtverci.



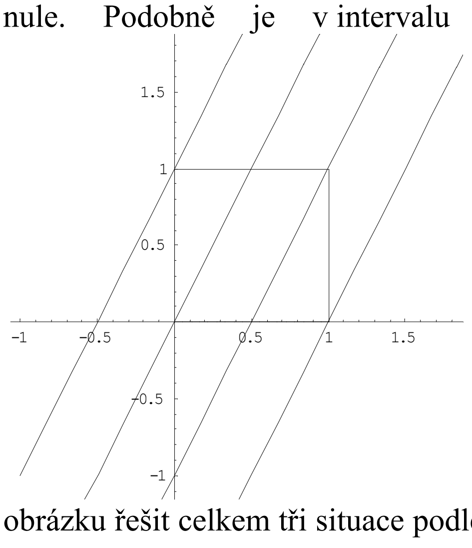
Podle obrázku je zřejmé, že hodnota distribuční funkce **G** je v intervalu (- ∞, 0) rovna nule a podobně hodnota v intervalu (2 , +∞) je rovna 1. Je tedy nutno vyřešit hodnoty v intervalu < 0 , 2 >. Rozdělme řešení na dva možné případy:

a. Hodnota y ∈ < 0 , 1 > . Potom je plocha, která je vytnuta přímkami $\mathbf{x_1 + x_2 = y}$ vždy trojúhelník . Jeho plocha je v závislosti na hodnotě y dána výrazem $\frac{y^2}{2}$.

b. Hodnota y ∈ (1 , 2 >. Potom je plocha vytknutá přímkami $\mathbf{x_1 + x_2 = y}$ složena z pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 1 a z lichoběžníku. Její plocha je tedy v závislosti na hodnotě y rovna výrazu $\frac{y^2}{2} - (y-1)^2$, po úpravě získáme vztah $-\frac{y^2}{2} + 2.y - 1$.

Chceme – li získat hodnoty hustoty **g** náhodné veličiny **Y** stačí výše uvedené výsledky derivovat , zjistíme stejné hodnoty jako v předchozím postupu.

2. Nechť $\mathbf{Y = 2.X_1 - X_2}$ **.** Na obrázku dále jsou uvedeny přímky, které nás budou zajímat. Je zřejmé, že hodnota distribuční funkce **G** náhodné veličiny **Y** je v intervalu (-∞ , -1) rovna nule. Podobně je v intervalu (2, +∞) rovna 1 .



Budeme tedy podle obrázku řešit celkem tři situace podle hraniční přímky $\mathbf{2 . x_1 - x_2 = y}$:

a. $y \in \langle -1,0), \quad G(y) = \dfrac{(1+y)^2}{4}$

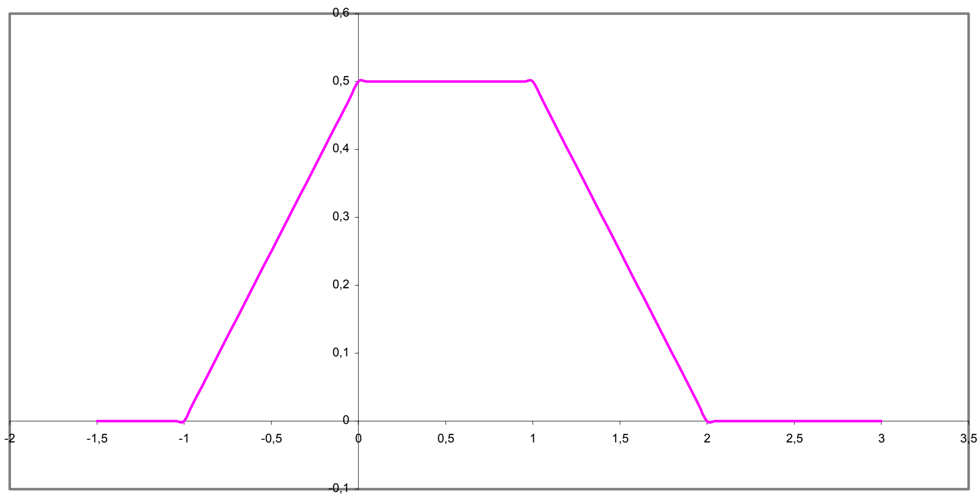
b. $y \in \langle 0,1), G(y) = \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{4}$

c. $y \in \langle 1,2\rangle, \quad G(y) = 1 - \dfrac{(2-y)^2}{4} = \dfrac{4.y - y^2}{4}$

Pokud bychom chtěli získat hodnoty hustoty **g** náhodné veličiny **Y** museli bychom výše uvedené vztahy derivovat (v bodech v nichž derivace existuje a získali bychom následující předpis:

$$g : y \mapsto \begin{cases} 0, & y \in (-\infty,-1) \\ \dfrac{1+y}{2}, & y \in \langle -1,0) \\ \dfrac{1}{2}, & y \in \langle 0,1) \\ 1 - \dfrac{y}{2}, & y \in \langle 1,2\rangle \\ 0, & y \in (2,+\infty) \end{cases} , \tag{5.14}$$

graf dané hustoty je zobrazen dále.



Vyšetřujme další zajímavý případ **Y** $= \dfrac{X_1}{X_2}$, kde $\mathbf{X_1}$ a $\mathbf{X_2}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž navíc bude $\mathbf{f_2(x_2) = 0}$ pro $\mathbf{x_2 < 0}$. Podle vztahu (5.7) je stanovena hodnota distribuční funkce **Y** takto :

$$G(y) = \iint\limits_{\frac{x_1}{x_2} \le y} f_1(x_1).f_2(x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x_2 . y} f_1(x_1)\,dx_1 \right) dx_2 = \int_0^{+\infty} F_1(x_2.y).f_2(x_2)\,dx_2 \,, \tag{5.15}$$

odtud již můžeme odvodit hodnotu hustoty **g** náhodné veličiny **Y** :

$$g(y) = \int_0^{+\infty} x_2.f_1(x_2.y).f_2(x_2)\,dx_2 \,. \tag{5.16}$$

Tyto vztahy dále využijeme při studiu **Studentova a Fischer – Snedecorova** rozdělení.

Definice 5.1
Nechť s>0 . Funkci **Γ** definovanou vztahem

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}.e^{-x}dx \tag{5.17}$$

nazýváme **Gamma** funkcí.

Definice 5.2
Nechť p>0 a q>0 . Funkci **B** definovanou vztahem

$$B(p,q)=\int_0^{1} x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx \tag{5.18}$$

nazveme **Beta** funkcí.

Věta 5.3
Nechť jsou s , p , q kladná reálná čísla. Potom platí“

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(s+1)=s.\Gamma(s)$
4. $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
5. $B(p,q)=B(q,p)$

Důkaz:
Důkaz věty nebudeme provádět , je uveden např. v [3].

Věta 5.4
Nechť $\mathbf{X_1}$ **, …,** $\mathbf{X_n}$ jsou nezávislé náhodné veličiny typu **N(0,1)**. Potom náhodné veličina

$$\chi^2(n)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2\ , \tag{5.19}$$

která se nazývá chý – kvadrát o n – stupních volnosti ,má rozdělení dané hustotou

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}\ . \tag{5.20}$$

Důkaz:
Celý důkaz provedeme metodou matematické indukce.
1) Nechť n=1 , potom podle je hustota rozdělení $\chi^2(1)$ rovno:

$f_1(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.2.e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.x^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{x}{2}}$, tento výraz je roven pro n=1.

2) Nechť tvrzení věty platí pro přirozené číslo k, dokážeme , že platí i pro hodnotu k+1. Podle vztahu pro konvoluci hustot náhodných veličin je hustota rozdělení $\chi^2(k+1)$ rovna:

$$f_{k+1}(x)=\left(f_1 * f_k\right)(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.(x-t)^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{(x-t)}{2}}.\frac{1}{2^{\frac{k+1}{k}}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.t^{\frac{k}{2}-1}.e^{-\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}.\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}.\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}.t^{\frac{k}{2}-1}dt=\underset{u=\frac{t}{x}}{substituce}=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}.\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}.x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}.\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}}.u^{\frac{k}{2}-1}du=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}.\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}.x^{\frac{k}{2}--}.B\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2}\right)=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}.\sqrt{\pi}.\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}.x^{\frac{k}{2}-1}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{k+1}{2}}.\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.e^{-\frac{x}{2}}.x^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Q.E.D.

Věta 5.5

Nechť $\chi^2(m)$ a $\chi^2(n)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Potom náhodná veličina **T**

$$T=\frac{\chi^2(m)}{\chi^2(n)} \tag{5.21}$$

má hustotu **v** danou vztahem

$$v(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}.u^{\frac{m}{2}-1}.(1+u)^{-\frac{m+n}{2}}, & u\geq 0\\[2ex] 0, & u<0\end{cases} \tag{5.22}$$

Důkaz:

Použijeme vztahy , podle nich je hodnota hustoty **v** pro nezáporné hodnoty rovna

$$v(u)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}.\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.(u.y)^{\frac{n}{2}-1}.y.e^{-\frac{n.y}{2}}.\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.y^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{y}{2}}dy=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}.\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\int_0^{+\infty}y^{\frac{m+n}{2}-1}.e^{-\frac{y}{2}.(1+u)}dy=$$

$$=\underset{z=\frac{y}{2}.(1+u)}{substituce}=\frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).(1+u)^{\frac{m+n}{2}}}.\int_0^{+\infty}z^{\frac{m+n}{2}-1}.e^{-z}dz=\frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).(1+u)^{\frac{m+n}{2}}}.\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)=$$

$$= \frac{1}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}.u^{\frac{m}{2}-1}.(1+u)^{-\frac{m+n}{2}}$$

Q.E.D.

Definice 5.3

Nechť m , n jsou přirozená čísla. Definujeme náhodnou veličinu

$$F = \frac{n}{m}.T\,, \tag{5.23}$$

kde T je náhodná veličina vystupující ve větě . Potom má tato náhodná veličina hustotu **h** :

$$h(y) = \frac{m}{n}.v\left(\frac{m}{n}.y\right), \tag{5.24}$$

kde **v** je hustota náhodné veličiny **T**. Rozdělení **F** se nazývá **F – rozdělení (Fisher – Snedecorovo) s (m,n) stupni volnosti.**

Věta 5.6

Nechť **X** a $\mathbf{X_1,\dots,X_n}$ jsou nezávislé náhodné veličiny typu **N(0,1).** Potom náhodná veličina

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}}, \tag{5.25}$$

má hustotu f_n danou vztahem

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n.\pi}}.\frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{5.26}$$

Důkaz:

Při důkazu využijeme vztahu pro stanovení hustoty podílu dvou nezávislých náhodných veličin uvedených ve vztahu (5.16) . Nejdříve ale musíme zjistit hustotu náhodné veličiny $U = \sqrt{\frac{W}{n}}$, kde náhodná veličina $W \sim \chi^2(n)$. Ke stanovení této hustoty použijeme větu (5.1) s volbou $h(x) = \sqrt{\frac{x}{n}}$, provedeme – li vyčíslení této hustoty dostáváme:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.n^{\frac{n}{2}}.x^{n-1}.e^{-\frac{n.x^2}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Tuto hustotu dosadíme do vztahu pro vyčíslení hustoty podílu náhodných veličin. Za náhodnou veličinu $\mathbf{X_1}$ zvolíme samozřejmě rozdělení **N(0,1)** a za náhodnou veličinu $\mathbf{X_2}$ výše uvedenou náhodnou veličinu **U**. Podle vztahu (5.16) je tedy výsledná hustota rovna:

$$f_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{x^2.t^2}{2}}.\frac{n^{\frac{n}{2}}.t^n}{2^{\frac{n}{2}-1}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.e^{-\frac{n.t^2}{2}}dt=\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2.\pi}.2^{\frac{n}{2}-1}.\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\int_0^{+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{\left(x^2+n\right)^{\frac{n+1}{2}}}.z^{\frac{n-1}{2}}.e^{-z}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi.n}}.\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Q.E.D.

Definice 5.4

Náhodná veličina uvedená v předchozí větě (5.6) se nazývá **Studentovo rozdělení s n stupni volnosti** , její hustota je stanovena vztahem (5.26).

5.2 Diskrétní náhodné veličiny

Analogie věty (5.1) je následující tvrzení.

Věta 5.7

Nechť **X** je diskrétní náhodná veličina , **h** je spojitá reálná funkce a **P** je pravděpodobnostní funkce **X** . Potom náhodná veličina **h(X)** je dána pravděpodobnostní funkcí **P(h(X)).**

Věta 5.8

Nechť $\mathbf{X_1}$ **a** $\mathbf{X_2}$ jsou nezávislé diskrétní náhodné veličiny definované pomocí svých pravděpodobnostních funkcí $\mathbf{P_1}$ a $\mathbf{P_2}$ **.** Potom je náhodná veličina $\mathbf{Y = X_1 + X_2}$ diskrétní s pravděpodobnostní funkcí definovanou takto:

$$P(x)=\begin{cases}\sum\limits_{x_{1_k}+x_{2_k}=x} p_{1_k}.p_{2_k}, kde\, x_{i_k}\ jsou & hodnoty, v\ kterých\ jsou\ příslušn\ pravděravd bnostní\ funkce\ nenulové\\ 0, \qquad jinak & \end{cases}.$$

Důkaz:

$\{\omega; Y(\omega)=x\}=\bigcup\limits_{x_1+x_č=x}\left(\{\omega; X_1(\omega)=x_1\}\cap\{\omega; X_2(\omega)=x-x_1\}\right)$, snadno lze dokázat, že všechny náhodné jevy v předchozím sjednocení jsou navzájem neslučitelné. Navíc vzhledem k nezávislosti náhodných veličin $\mathbf{X_1}$ **a** $\mathbf{X_2}$ jsou náhodné jevy v každém členu sjednocení nezávislé. Z těchto dvou tvrzení vyplývá platnost věty.

Q.E.D.

Příklady 5.4:

1. Nechť $\mathbf{X_1 = A(p)}$ a $\mathbf{X_2 = A(p)}$ jsou nezávislá alternativní rozdělení se stejným parametrem **p**. Potom náhodná veličina $\mathbf{Y = X_1 + X_2}$ je typu binomické rozdělení Bi(2,p). Je zřejmé , že pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny **Y** je nenulová jen v bodech **0 , 1 , 2**. Spočtěme tedy její hodnoty:
   0 : $P(Y=0)=P((X_1=0)\cap(X_2=0))=P(X_1=0).P(X_2=0)=(1-p).(1-p)=q^2$
   1: $P(Y=1)=P(((X_1=1)\cap(X_2=0))\cup((X_1=0)\cap(X_2=1)))=P((X_1=1)\cap(X_2=0))+$
   $+P((X_1=0)\cap(X_2=1))=p.(1-p)+(1-p).p=2.p(1-p)=2.p.q$

2: $P(Y=2)=P((X_1=1)\cap(X_2=1))=P(X_1=1).P(X_2=1)=p.p=p^2$

2. Nechť $\mathbf{X_1 = A(p)}$ a $\mathbf{X_2 = Bi(n,p)}$ jsou nezávislá rozdělení postupně alternativní s parametrem **p** a binomické s parametry **n** a **p** . Potom náhodná veličina $\mathbf{Y = X_1 + X_2}$ je typu binomické rozdělení Bi(n+1,p). Pravděpodobnostní funkce **P** náhodné veličiny **Y** je nenulová jen v bodech 0,1,…,n+1. Opět zjistíme její hodnoty:

   0: $P(Y=0)=P((X_1=0)\cap(X_2=0))=P(X_1=0).P(X_2=0)=q.\binom{n}{0}.p^0.q^n=\binom{n+1}{0}.p^0.q^{n+1}$

   $\vdots$

   k: $P(Y=k)=P((X_1=0)\cap(X_2=k))\cup((X_1=1)\cap(X_2=k-1))=q.\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}+$

   $+p.\binom{n}{k-1}.p^{k-1}.q^{n-k+1}=\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right).p^k.q^{n+1-k}=\binom{n+1}{k}.p^k.q^{n+1-k}$

   $\vdots$

   n+1: $P(Y=n+1)=P((X_1=1)\cap(X_2=n))=p.\binom{n}{n}.p^n.q^0=\binom{n+1}{n+1}.p^{n+1}.q^0$

3. Nechť $\mathbf{X_1 = Bi(n_1 ,p)}$ a $\mathbf{X_2 = Bi(n_2,p)}$ jsou nezávislá rozdělení binomická s parametry $\mathbf{n_i}$ a **p** . Potom náhodná veličina $\mathbf{Y = X_1 + X_2}$ je typu binomické rozdělení Bi($n_1 + n_2$,p). Pravděpodobnostní funkce **P** náhodné veličiny **Y** je nenulová jen v bodech 0,1,…,$n_1 + n_2$. Opět zjistíme její hodnoty:

   0: $P(Y=0)=P((X_1=0)\cap(X_2=0))=q^{n_1}.q^{n_2}=q^{n_1+n_2}=\binom{n_1+n_2}{0}.q^{n_1+n_2}$

   $\vdots$

   k: $\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}.p^i.q^{n_1-i}.\binom{n_2}{k-i}.p^{k-i}.q^{n_2-k-i}=\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n_1}{i}.\binom{n_2}{k-i}\right).p^k.q^{n_1+n_2-k}=\binom{n_1+n_2}{k}.p^k.q^{n_1+n_2-k}$

   $\vdots$

   $\mathbf{n_1+n_2}$**:** $P(Y=n_1+n_2)=P(X_1=n_1).P(X_2=n_2)=p^{n_1}.p^{n_2}=\binom{n_1+n_2}{n_1+n_2}.p^{n_1+n_2}$

4. Nechť $\mathbf{X_1 = Po(\lambda_1)}$ a $\mathbf{X_2=Po(\lambda_2)}$. Potom náhodná veličina $\mathbf{Y = X_1 + X_2}$ je typu Poissonovo rozdělení s parametrem $\boldsymbol{\lambda_1 + \lambda_2}$. Pravděpodobnostní funkce uvedených náhodných veličin jsou nenulové na množině přirozených čísel a na nule. Tedy pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny **Y** bude nenulová na stejné množině. Vyšetříme její hodnoty:

   0: $P(Y=0)=P((X_1=0)\cap(X_2=0))=P(X_1=0).P(X_2=0)=e^{-\lambda_1}.e^{-\lambda_2}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

   $\vdots$

   k:

   $$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda_1.e^{-\lambda_1}}{i!}.\frac{\lambda_2.e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}\right)=\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}.\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!}\right).e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!.(k-i)!}.\lambda_1^{\,i}.\lambda_2^{\,k-i}\right).\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}=$$

   $$=(\lambda_1+\lambda_2)^k.\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$