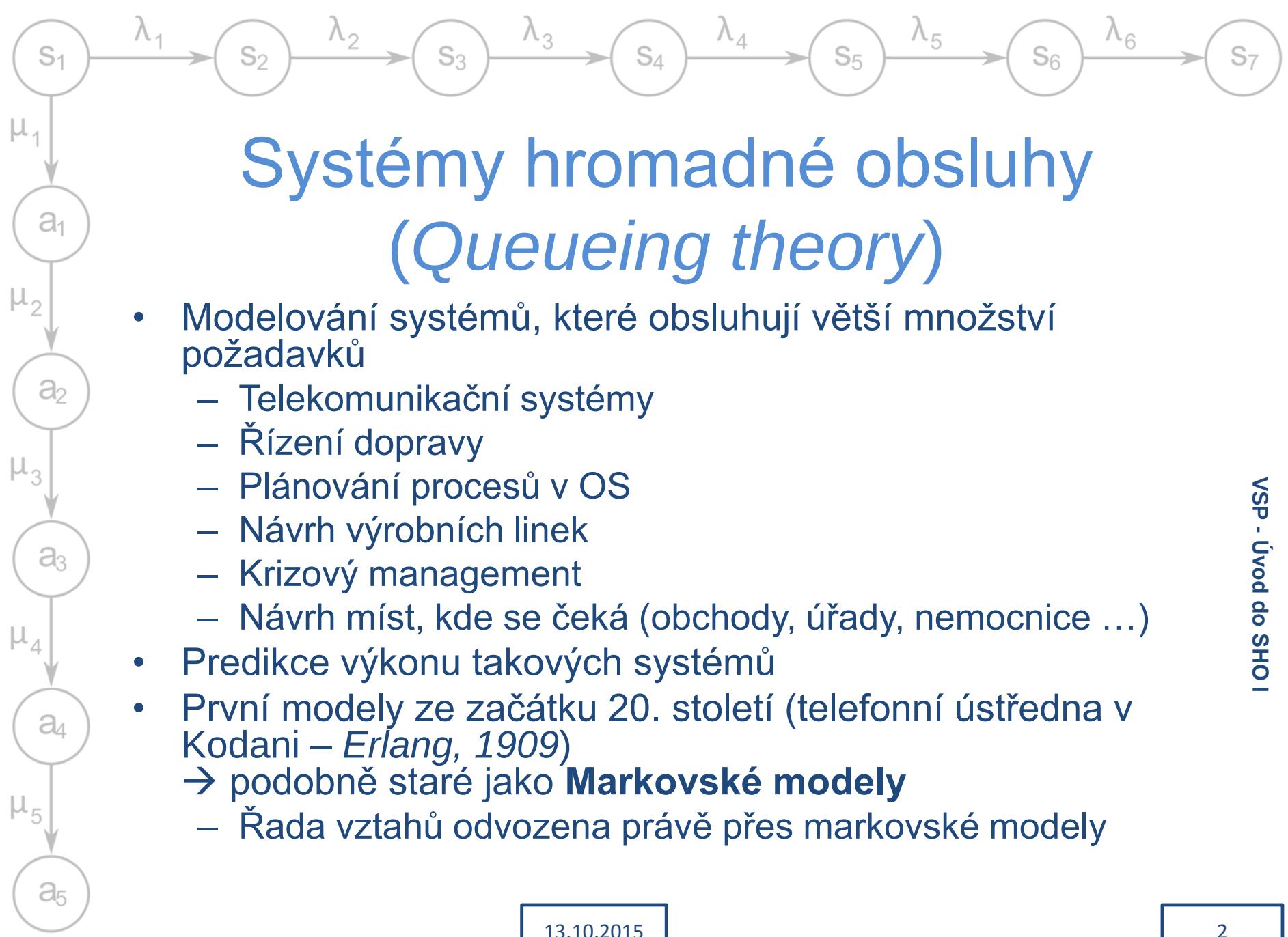
Úvod do SHO

Výkonnost a spolehlivost – KIV/VSP

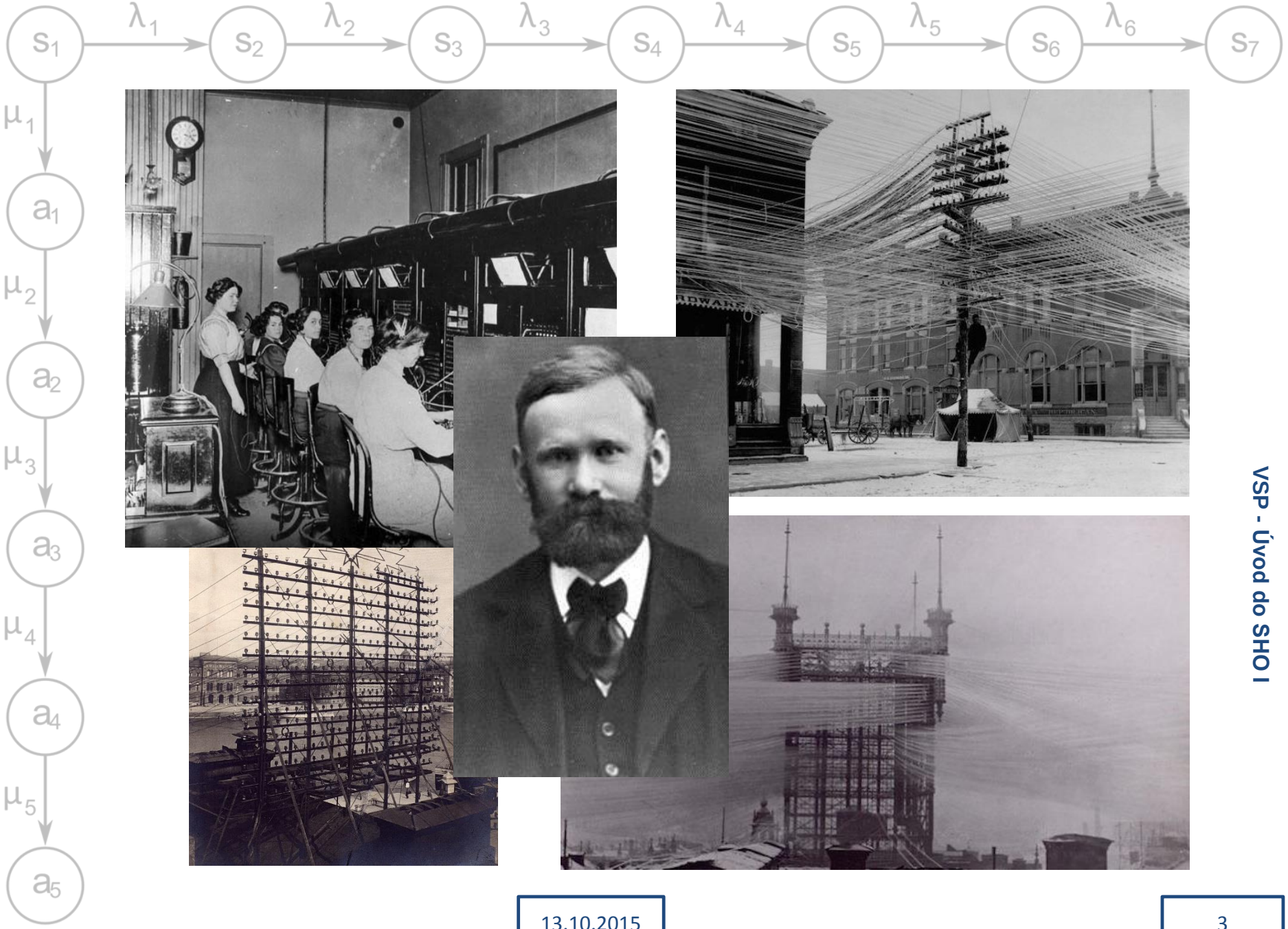
Richard Lipka

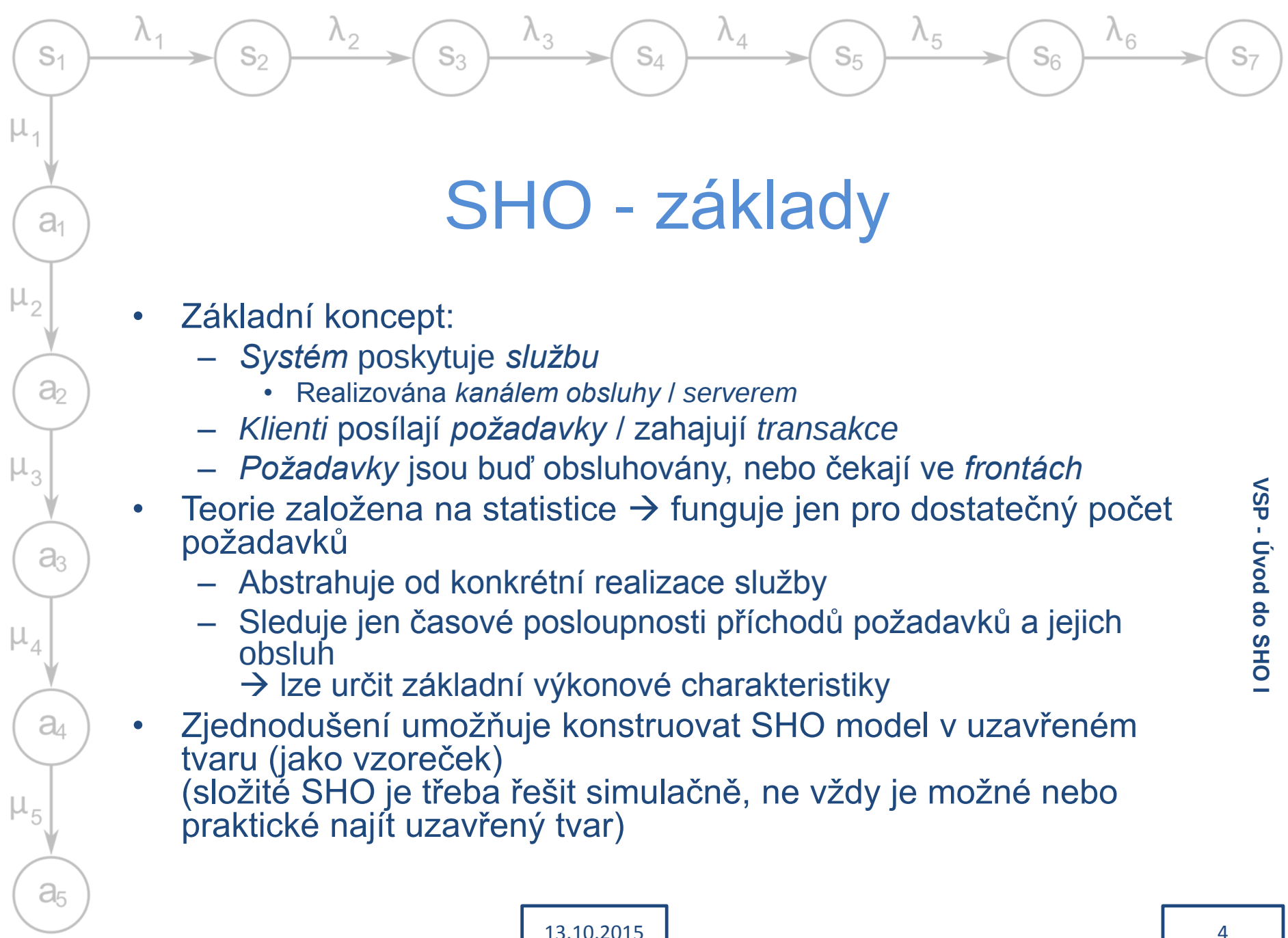
13.10.2015



Systémy hromadné obsluhy (*Queueing theory*)

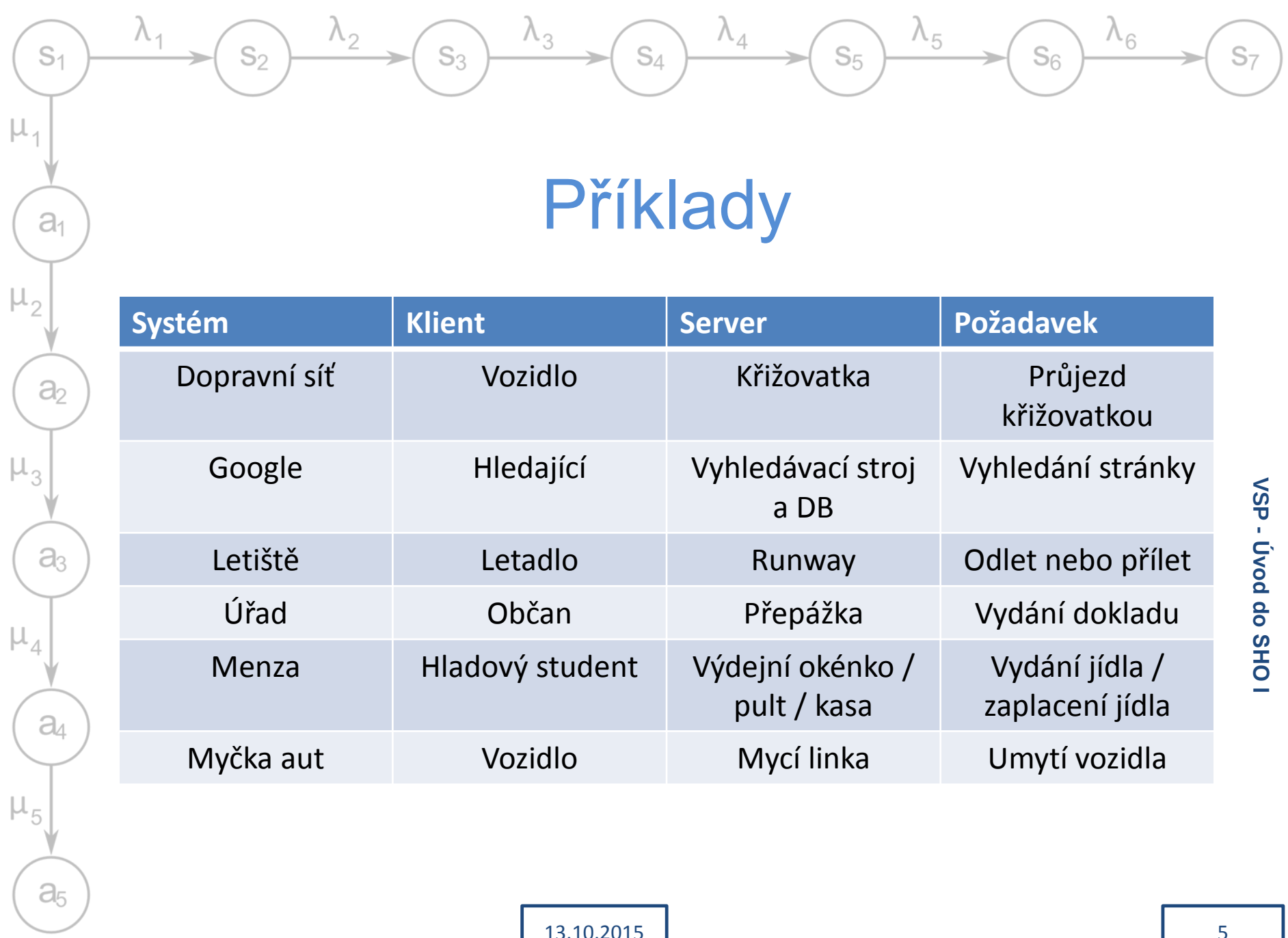
- Modelování systémů, které obsluhují větší množství požadavků
  - Telekomunikační systémy
  - Řízení dopravy
  - Plánování procesů v OS
  - Návrh výrobních linek
  - Krizový management
  - Návrh míst, kde se čeká (obchody, úřady, nemocnice …)
- Predikce výkonu takových systémů
- První modely ze začátku 20. století (telefonní ústředna v Kodani – *Erlang, 1909*)
  → podobně staré jako **Markovské modely**
  - Řada vztahů odvozena právě přes markovské modely


s1
λ1
s2
λ2
s3
λ3
s4
λ4
s5
λ5
s6
λ6
s7
μ1
a1
μ2
a2
μ3
a3
μ4
a4
μ5
a5



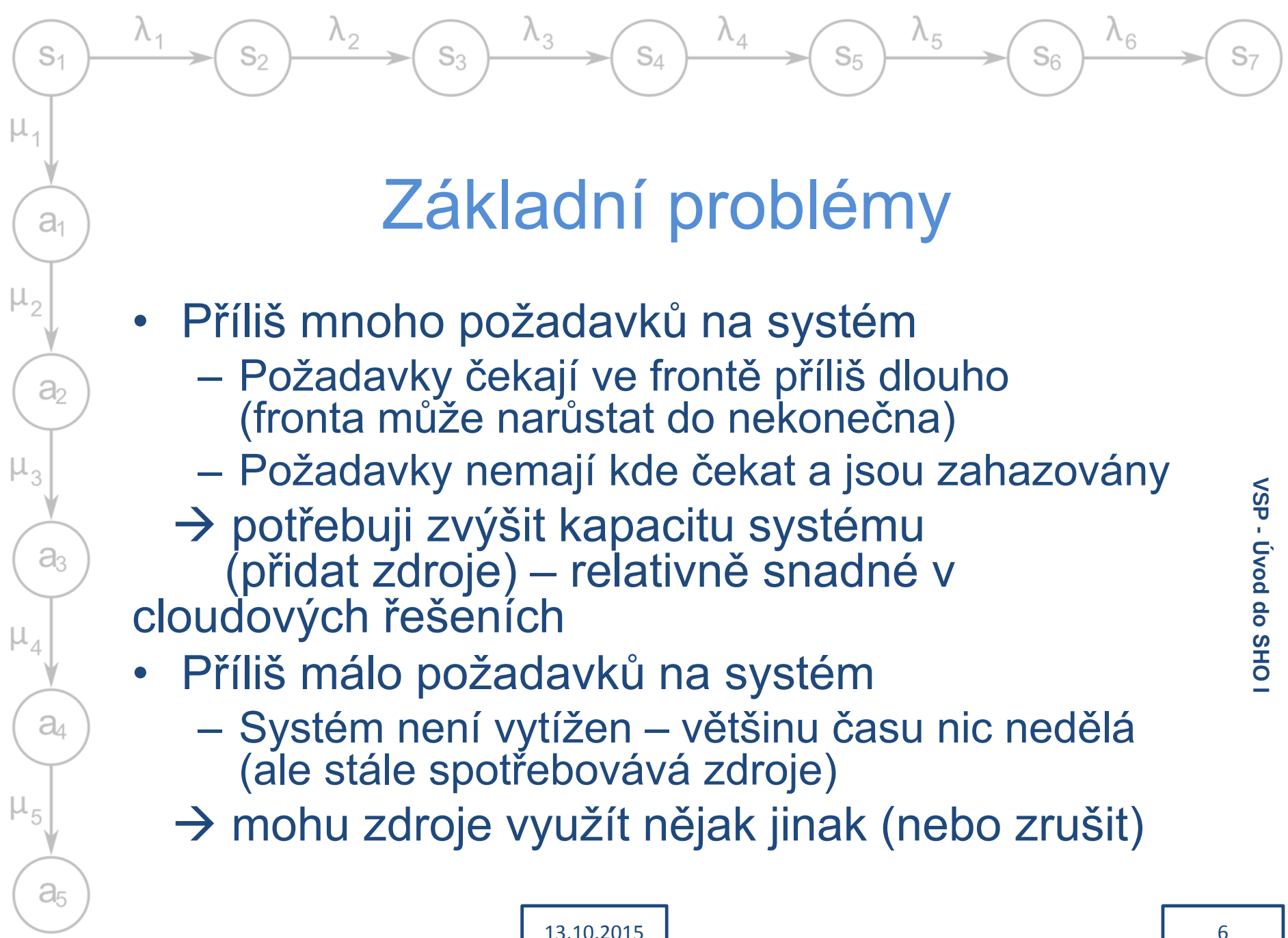
SHO - základy

- Základní koncept:
  - *Systém* poskytuje *službu*
    - Realizována *kanálem obsluhy* / *serverem*
  - *Klienti* posílají *požadavky* / zahajují *transakce*
  - *Požadavky* jsou buď obsluhovány, nebo čekají ve *frontách*
- Teorie založena na statistice → funguje jen pro dostatečný počet požadavků
  - Abstrahuje od konkrétní realizace služby
  - Sleduje jen časové posloupnosti příchodů požadavků a jejich obsluh
    → lze určit základní výkonové charakteristiky
- Zjednodušení umožňuje konstruovat SHO model v uzavřeném tvaru (jako vzoreček)
  (složité SHO je třeba řešit simulačně, ne vždy je možné nebo praktické najít uzavřený tvar)



Příklady

Systém	Klient	Server	Požadavek
Dopravní síť	Vozidlo	Křižovatka	Průjezd křižovatkou
Google	Hledající	Vyhledávací stroj a DB	Vyhledání stránky
Letiště	Letadlo	Runway	Odlet nebo přílet
Úřad	Občan	Přepážka	Vydání dokladu
Menza	Hladový student	Výdejní okénko / pult / kasa	Vydání jídla / zaplacení jídla
Myčka aut	Vozidlo	Mycí linka	Umytí vozidla

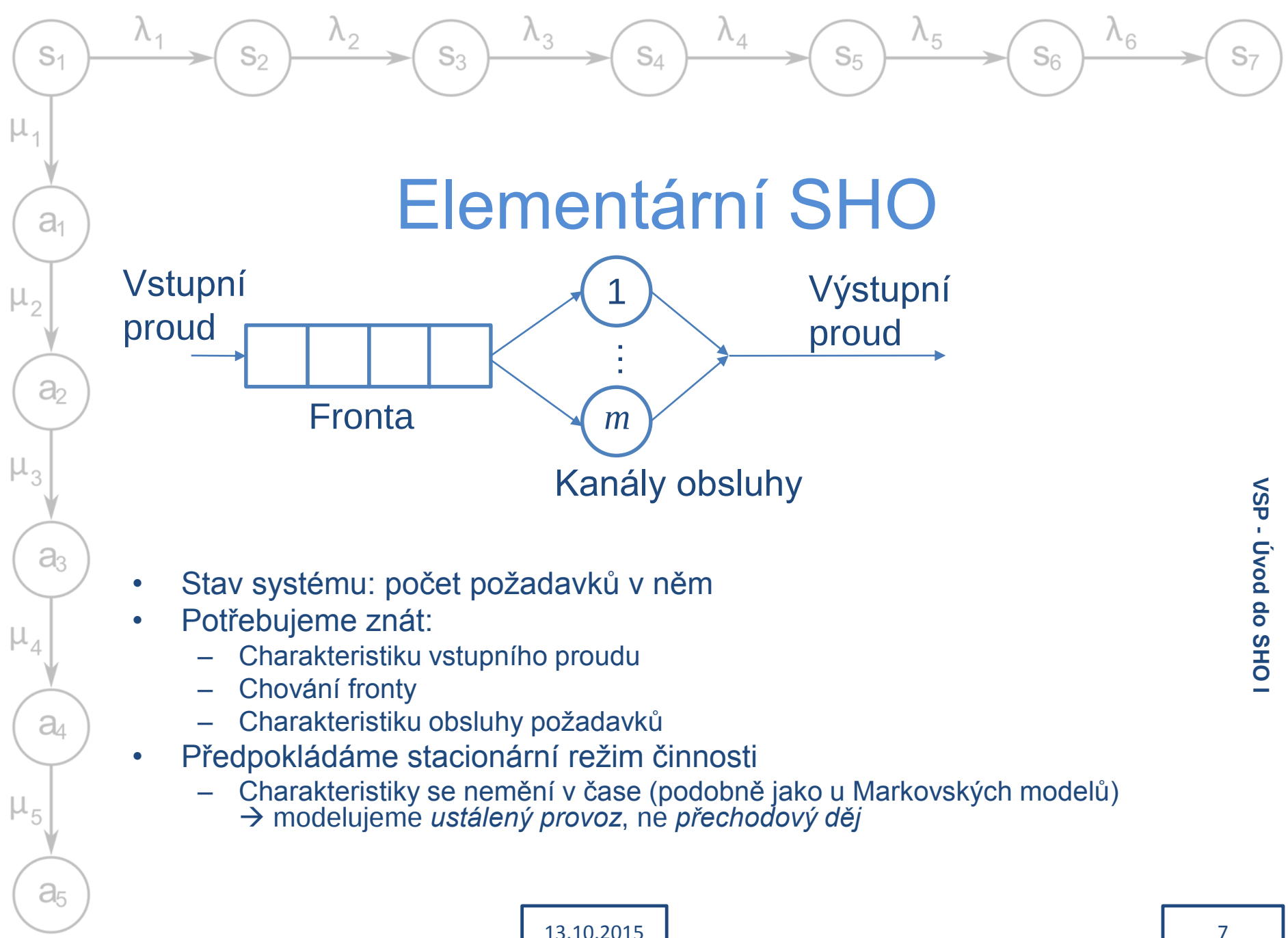


Základní problémy

- Příliš mnoho požadavků na systém
  - Požadavky čekají ve frontě příliš dlouho (fronta může narůstat do nekonečna)
  - Požadavky nemají kde čekat a jsou zahazovány

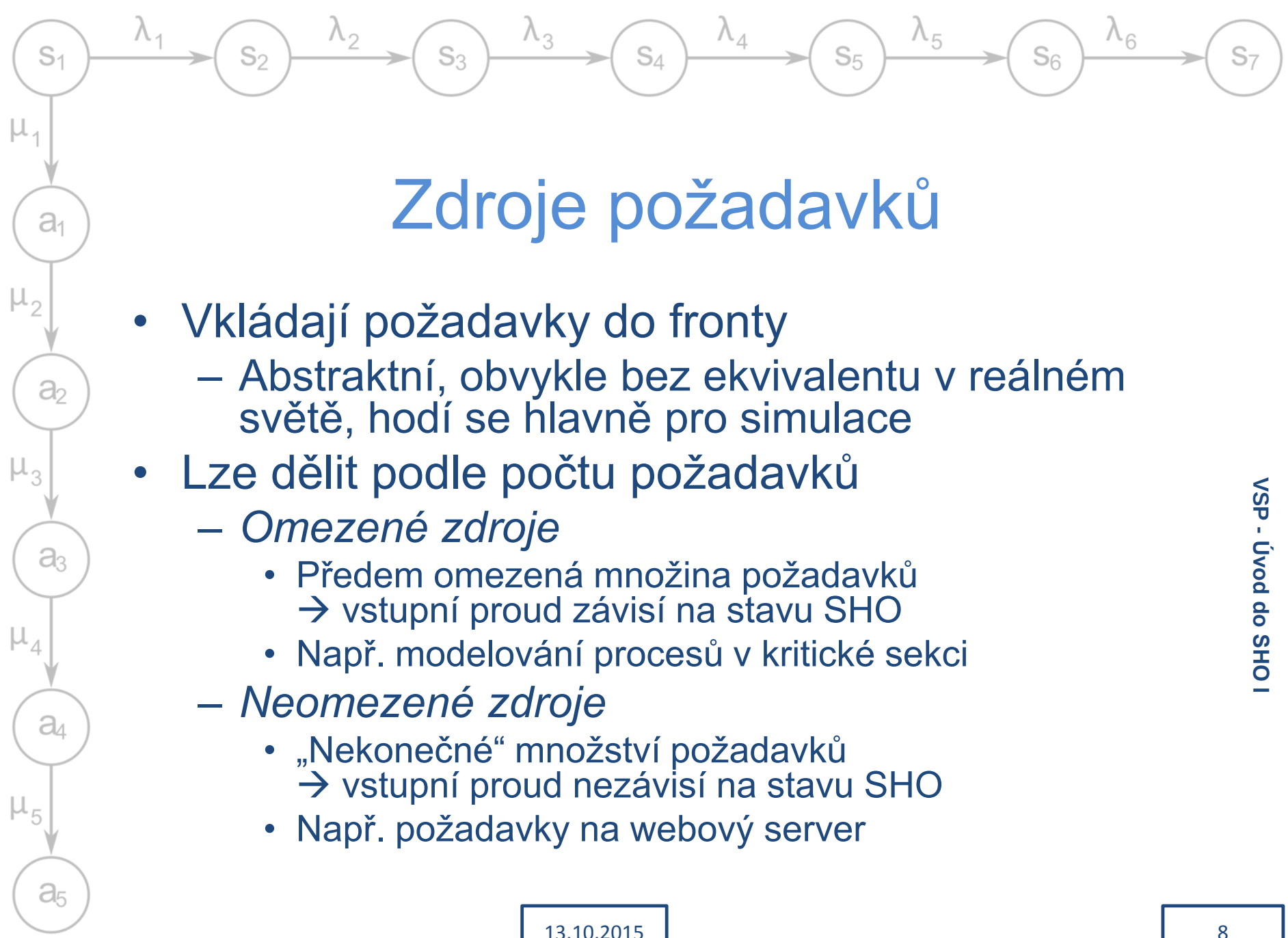
  → potřebuji zvýšit kapacitu systému (přidat zdroje) – relativně snadné v cloudových řešeních
- Příliš málo požadavků na systém
  - Systém není vytížen – většinu času nic nedělá (ale stále spotřebovává zdroje)

  → mohu zdroje využít nějak jinak (nebo zrušit)



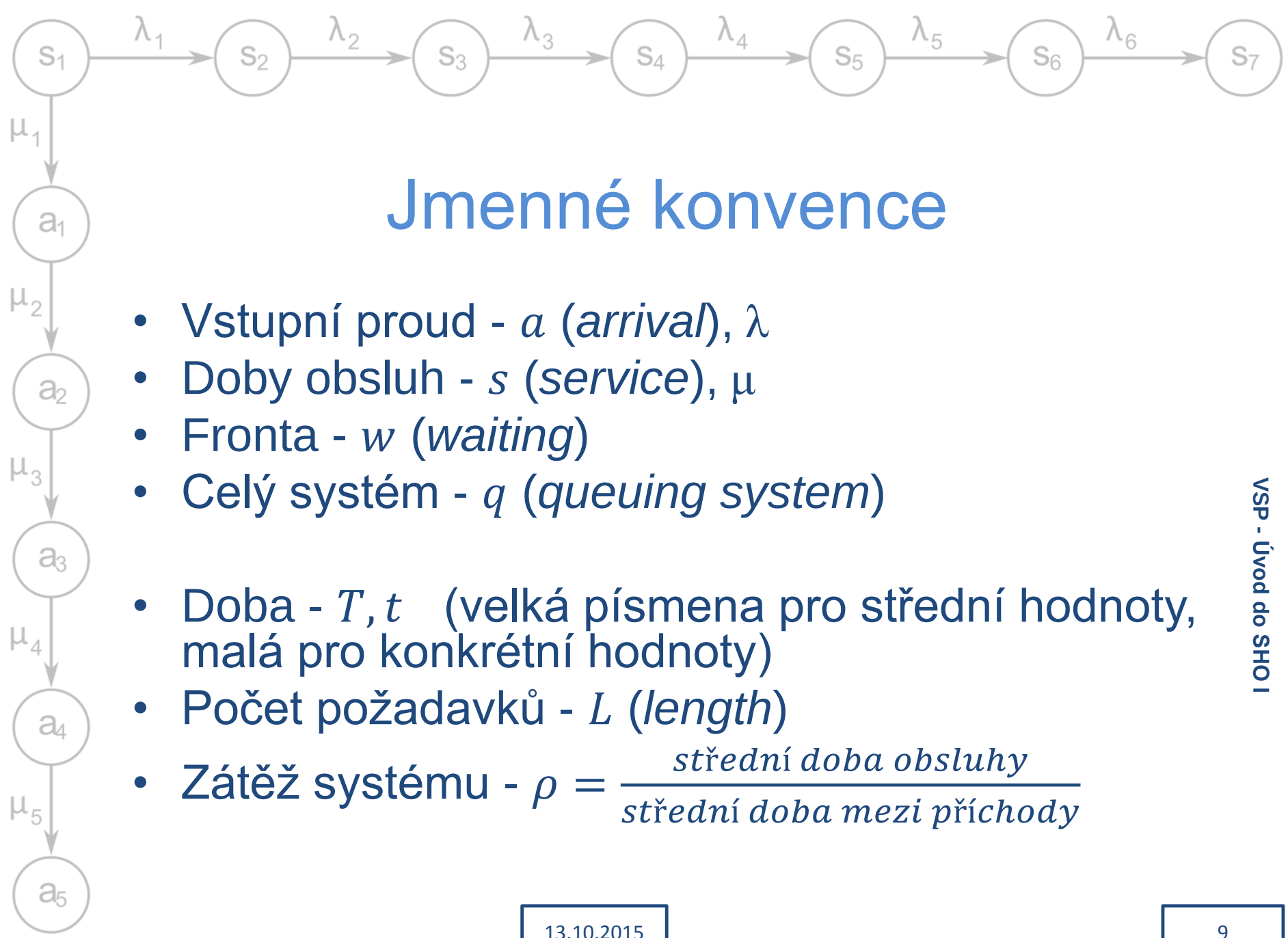
Elementární SHO

- Stav systému: počet požadavků v něm
- Potřebujeme znát:
  - Charakteristiku vstupního proudu
  - Chování fronty
  - Charakteristiku obsluhy požadavků
- Předpokládáme stacionární režim činnosti
  - Charakteristiky se nemění v čase (podobně jako u Markovských modelů)
    → modelujeme *ustálený provoz*, ne *přechodový děj*



Zdroje požadavků

- Vkládají požadavky do fronty
  - Abstraktní, obvykle bez ekvivalentu v reálném světě, hodí se hlavně pro simulace
- Lze dělit podle počtu požadavků
  - *Omezené zdroje*
    - Předem omezená množina požadavků → vstupní proud závisí na stavu SHO
    - Např. modelování procesů v kritické sekci
  - *Neomezené zdroje*
    - „Nekonečné“ množství požadavků → vstupní proud nezávisí na stavu SHO
    - Např. požadavky na webový server



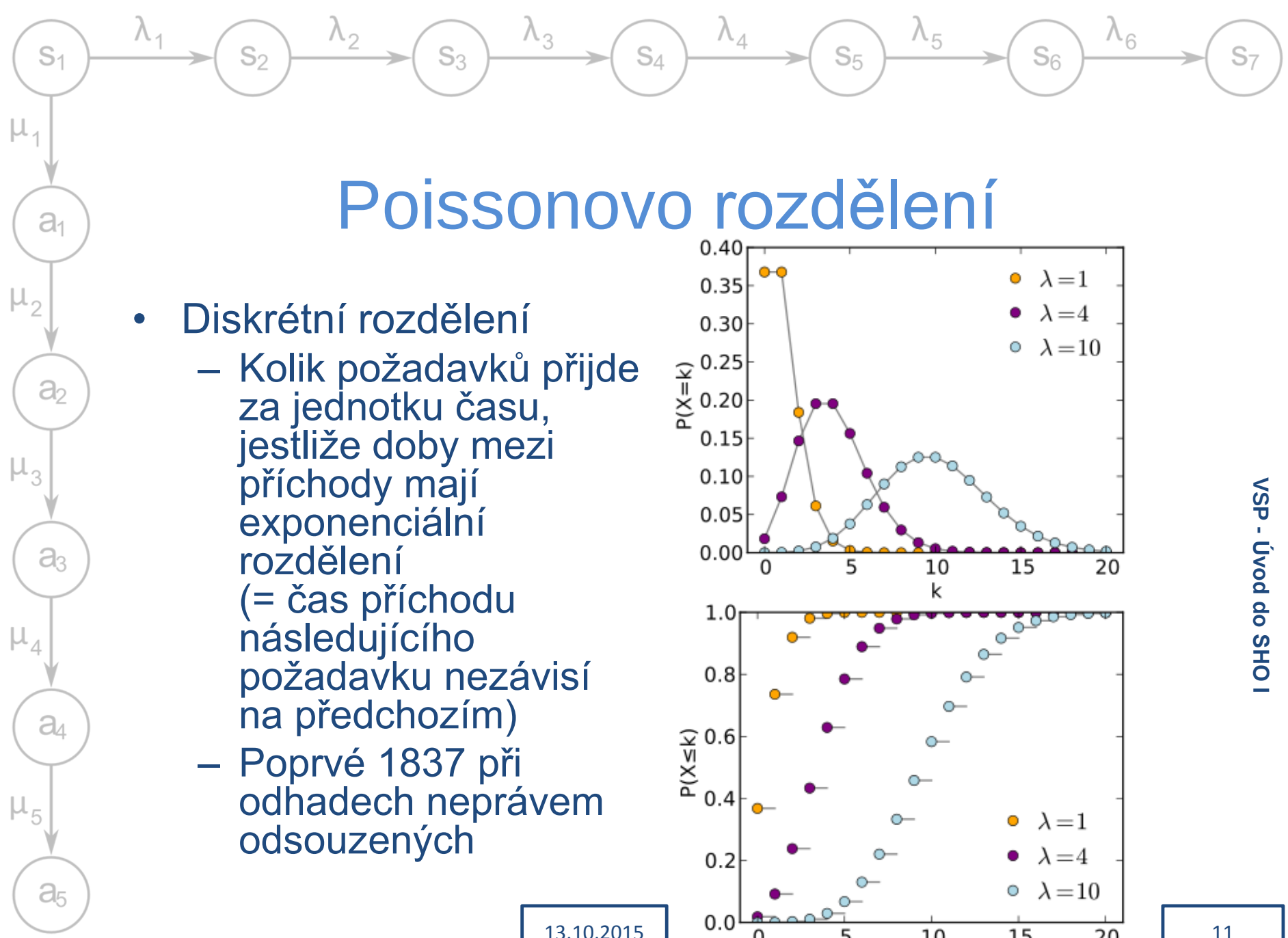
Jmenné konvence

- Vstupní proud - a (*arrival*), λ
- Doby obsluh - s (*service*), μ
- Fronta - w (*waiting*)
- Celý systém - q (*queuing system*)

- Doba - T, t (velká písmena pro střední hodnoty, malá pro konkrétní hodnoty)
- Počet požadavků - L (*length*)
- Zátěž systému - $\rho = \frac{\text{střední doba obsluhy}}{\text{střední doba mezi příchody}}$

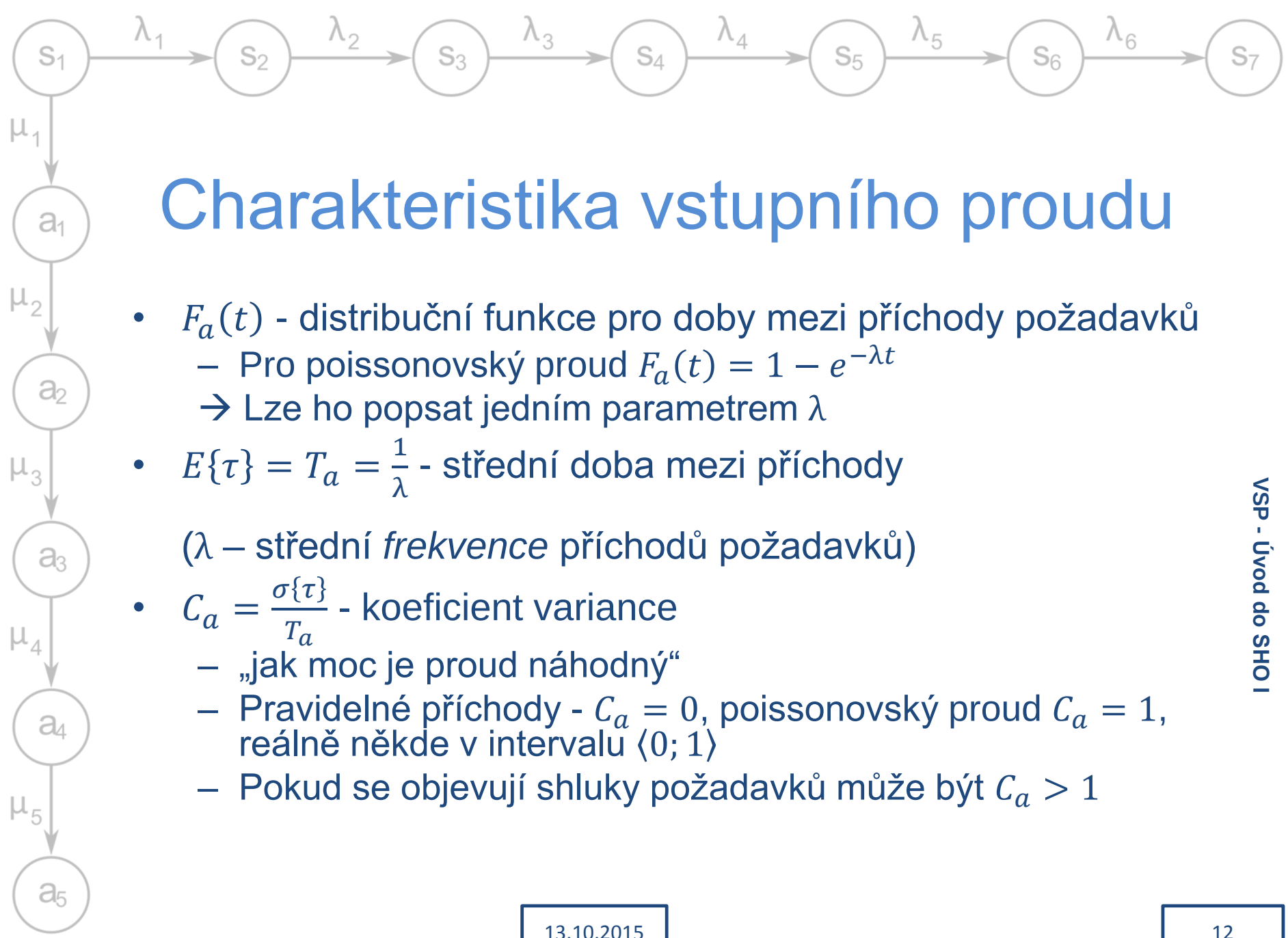
Vstupní proud

- Časová posloupnost s jakou požadavky do systému vstupují - $\{t_1 < t_2 < t_3 \ldots\}$
  - Popsán jako $\tau_k = t_k - t_{k-1}\ pro\ k \geq 1$ – interval mezi příchody (*inter-arrival time*)
  - Pokud jsou jednotlivé hodnoty τ_k statisticky nezávislé a mají stejné rozdělení, považovány za realizaci veličiny τ
- Obvyklý popis: $F_a(t) = P\{\tau \leq t\}$ nebo odpovídající $f_a(t) = \left(F_a(t)\right)'$
- Typické vstupní proudy:
  - *Poissonovský* – exponenciální rozdělení pro doby mezi příchody požadavků
    (v každém okamžiku stejná pravděpodobnost příchodu dalšího požadavku – nezáleží na tom jak dlouhá doba uběhla od posledního)
  - Gaussovský
  - Rovnoměrný – bez náhody, stejné intervaly



Poissonovo rozdělení

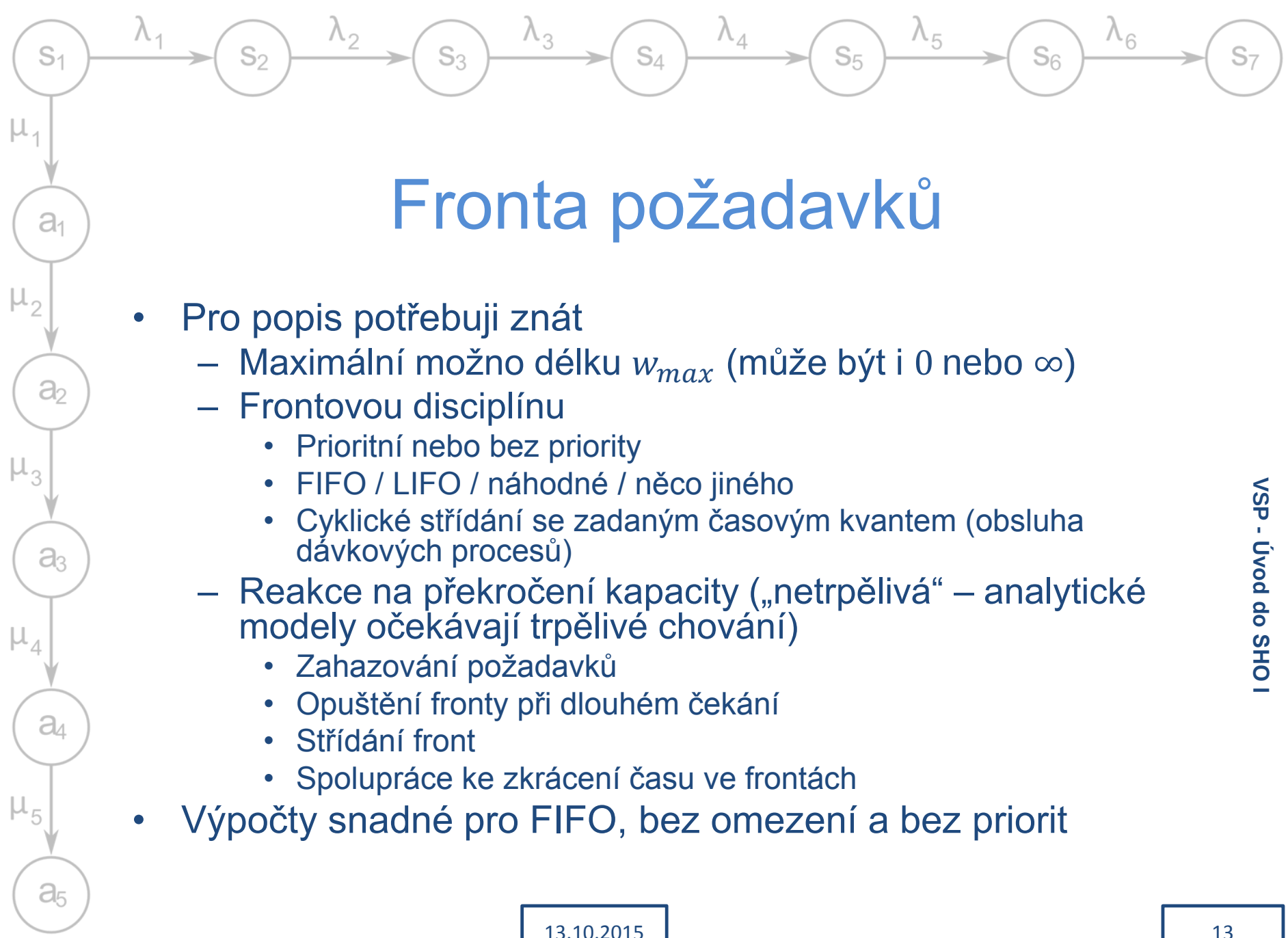
- Diskrétní rozdělení
  - Kolik požadavků přijde za jednotku času, jestliže doby mezi příchody mají exponenciální rozdělení (= čas příchodu následujícího požadavku nezávisí na předchozím)
  - Poprvé 1837 při odhadech neprávem odsouzených



Charakteristika vstupního proudu

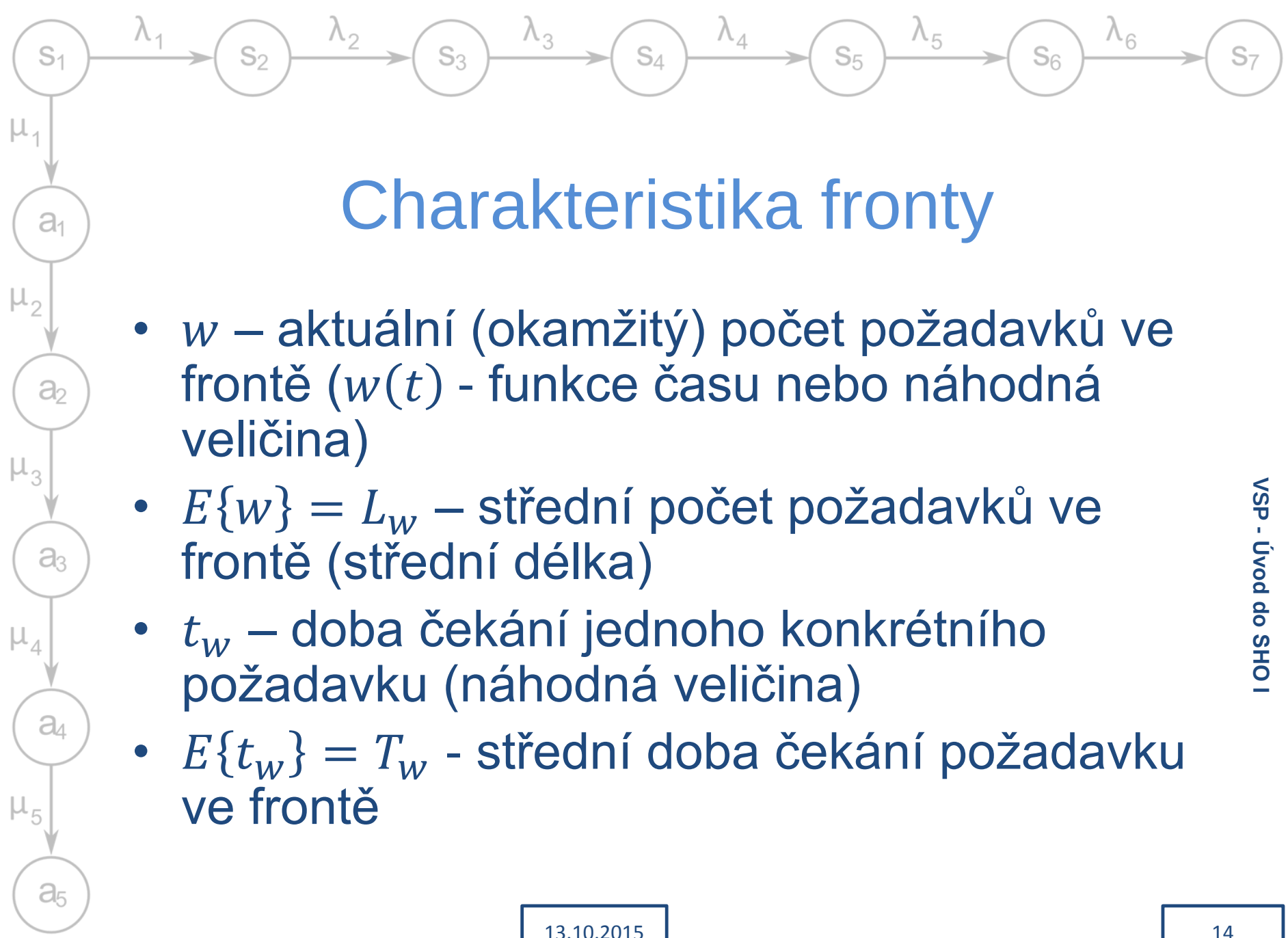
- $F_a(t)$ - distribuční funkce pro doby mezi příchody požadavků
  - Pro poissonovský proud $F_a(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
  → Lze ho popsat jedním parametrem λ
- $E\{\tau\} = T_a = \frac{1}{\lambda}$ - střední doba mezi příchody

  (λ – střední *frekvence* příchodů požadavků)
- $C_a = \frac{\sigma\{\tau\}}{T_a}$ - koeficient variance
  - „jak moc je proud náhodný“
  - Pravidelné příchody - $C_a = 0$, poissonovský proud $C_a = 1$, reálně někde v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$
  - Pokud se objevují shluky požadavků může být $C_a > 1$



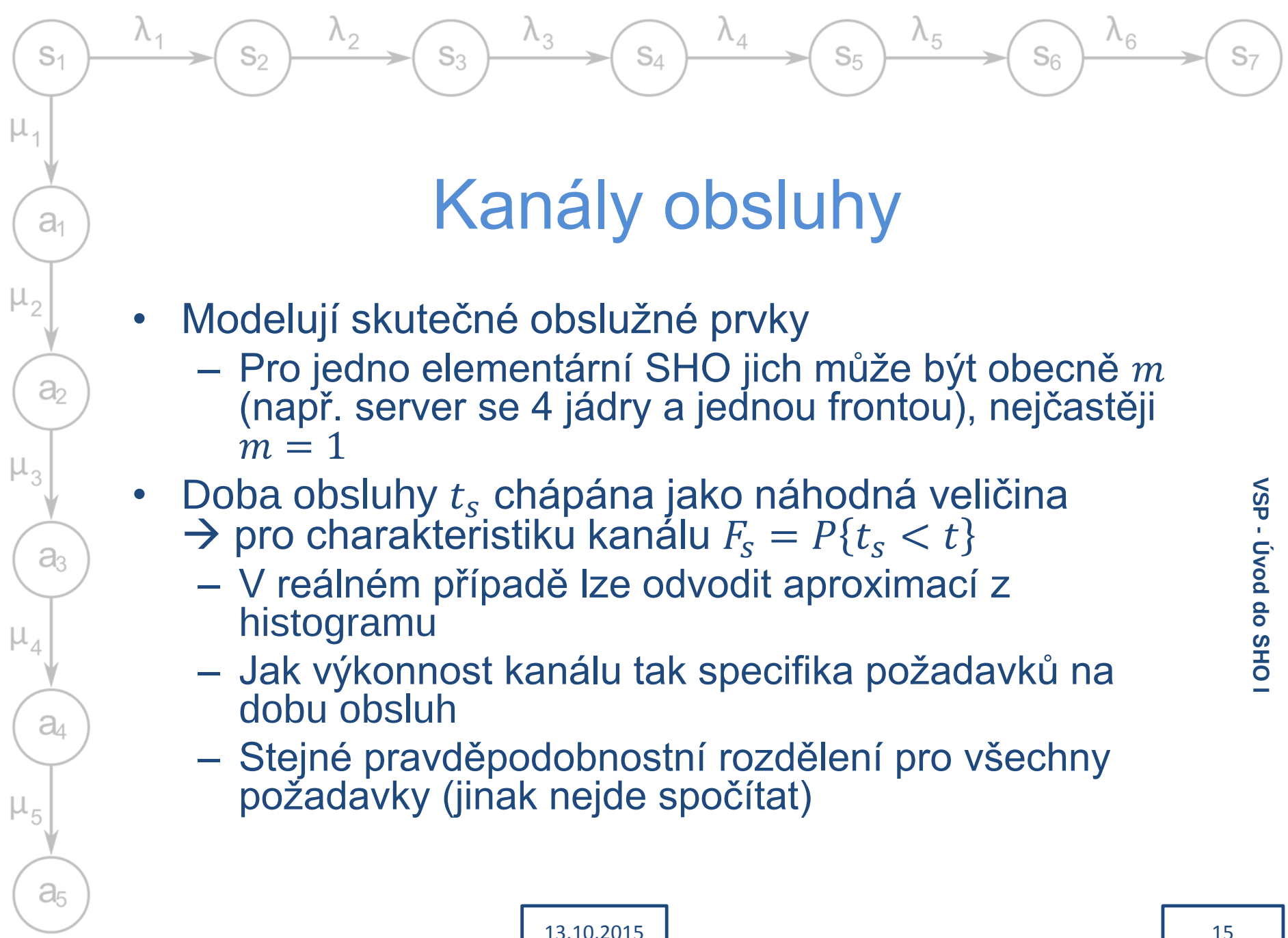
Fronta požadavků

- Pro popis potřebuji znát
  - Maximální možno délku w_{max} (může být i 0 nebo ∞)
  - Frontovou disciplínu
    - Prioritní nebo bez priority
    - FIFO / LIFO / náhodné / něco jiného
    - Cyklické střídání se zadaným časovým kvantem (obsluha dávkových procesů)
  - Reakce na překročení kapacity („netrpělivá“ – analytické modely očekávají trpělivé chování)
    - Zahazování požadavků
    - Opuštění fronty při dlouhém čekání
    - Střídání front
    - Spolupráce ke zkrácení času ve frontách
- Výpočty snadné pro FIFO, bez omezení a bez priorit



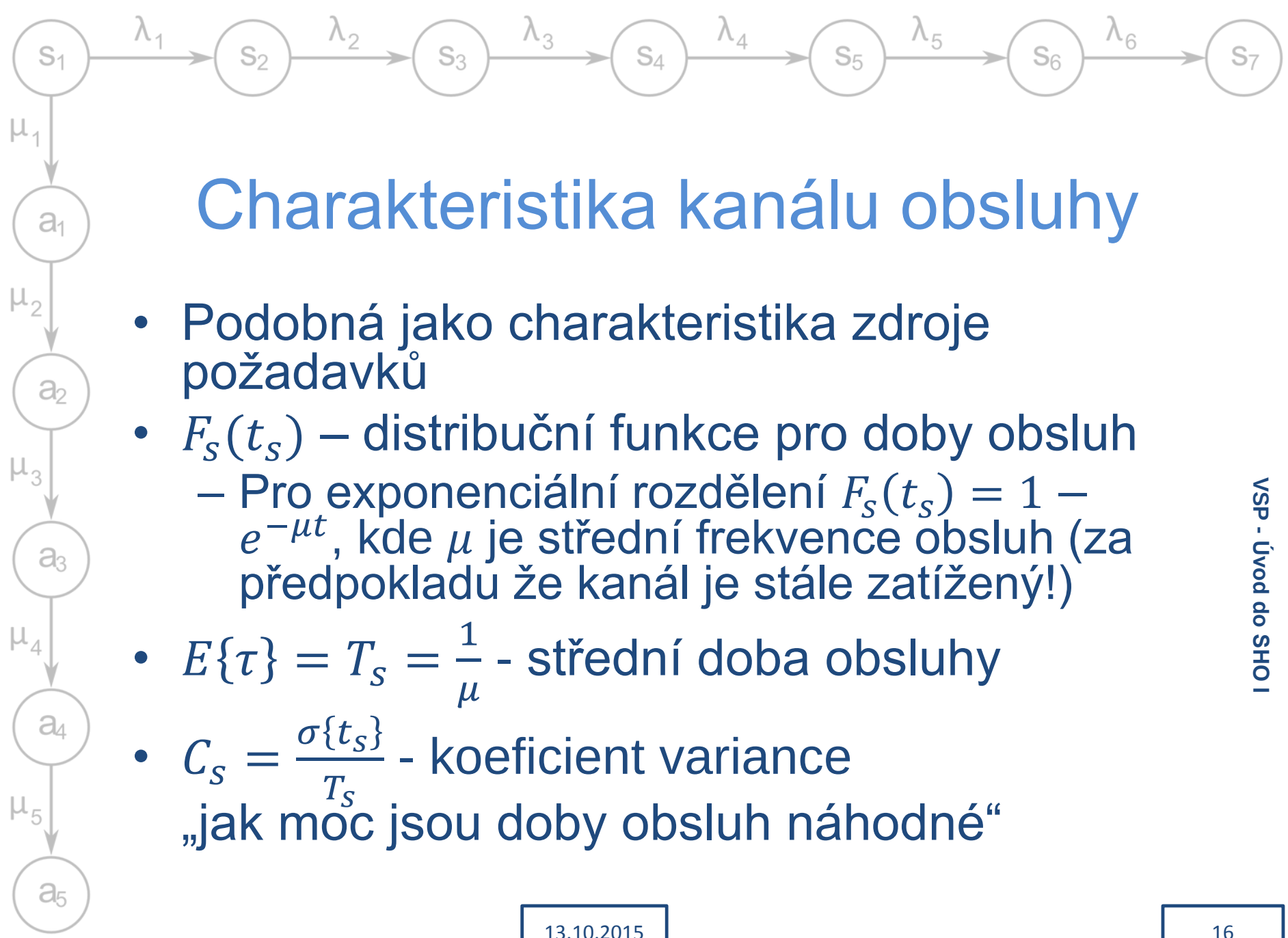
Charakteristika fronty

- w – aktuální (okamžitý) počet požadavků ve frontě ($w(t)$ - funkce času nebo náhodná veličina)
- $E\{w\} = L_w$ – střední počet požadavků ve frontě (střední délka)
- t_w – doba čekání jednoho konkrétního požadavku (náhodná veličina)
- $E\{t_w\} = T_w$ - střední doba čekání požadavku ve frontě



Kanály obsluhy

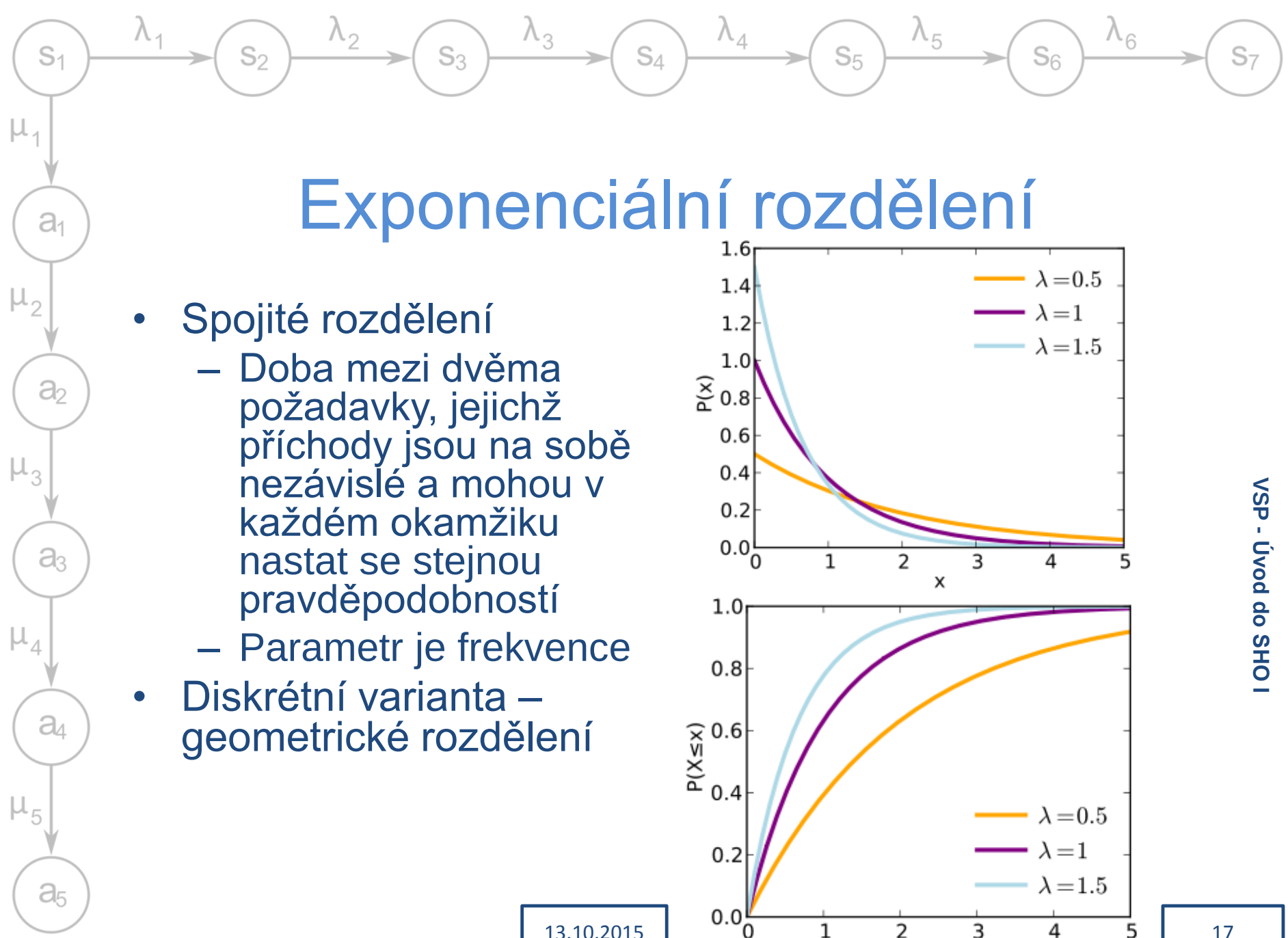
- Modelují skutečné obslužné prvky
  - Pro jedno elementární SHO jich může být obecně m (např. server se 4 jádry a jednou frontou), nejčastěji $m = 1$
- Doba obsluhy t_s chápána jako náhodná veličina → pro charakteristiku kanálu $F_s = P\{t_s < t\}$
  - V reálném případě lze odvodit aproximací z histogramu
  - Jak výkonnost kanálu tak specifika požadavků na dobu obsluh
  - Stejné pravděpodobnostní rozdělení pro všechny požadavky (jinak nejde spočítat)



Charakteristika kanálu obsluhy

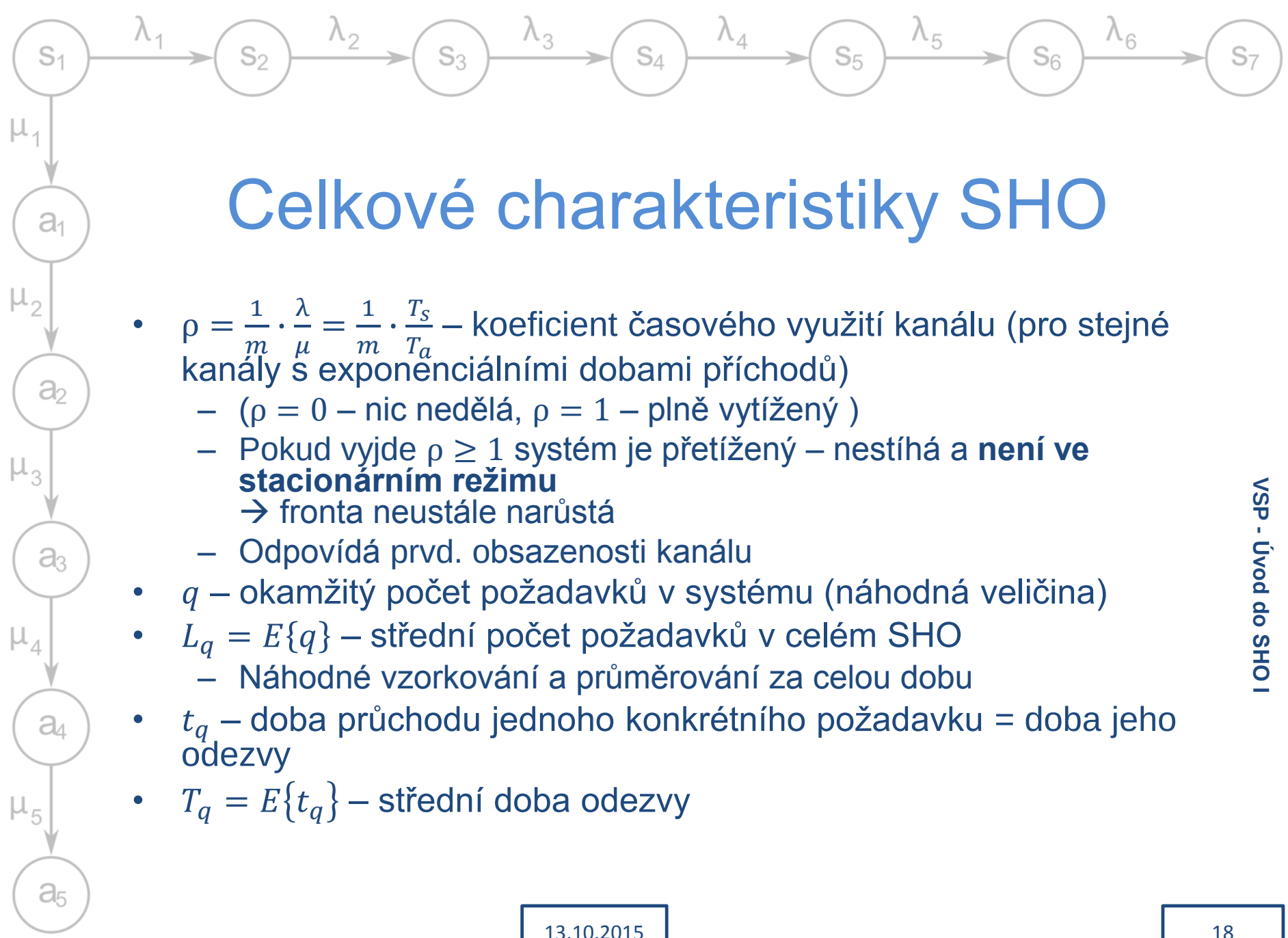
- Podobná jako charakteristika zdroje požadavků
- $F_s(t_s)$ – distribuční funkce pro doby obsluh
  - Pro exponenciální rozdělení $F_s(t_s) = 1 - e^{-\mu t}$, kde μ je střední frekvence obsluh (za předpokladu že kanál je stále zatížený!)
- $E\{\tau\} = T_s = \frac{1}{\mu}$ - střední doba obsluhy
- $C_s = \frac{\sigma\{t_s\}}{T_s}$ - koeficient variance

„jak moc jsou doby obsluh náhodné“



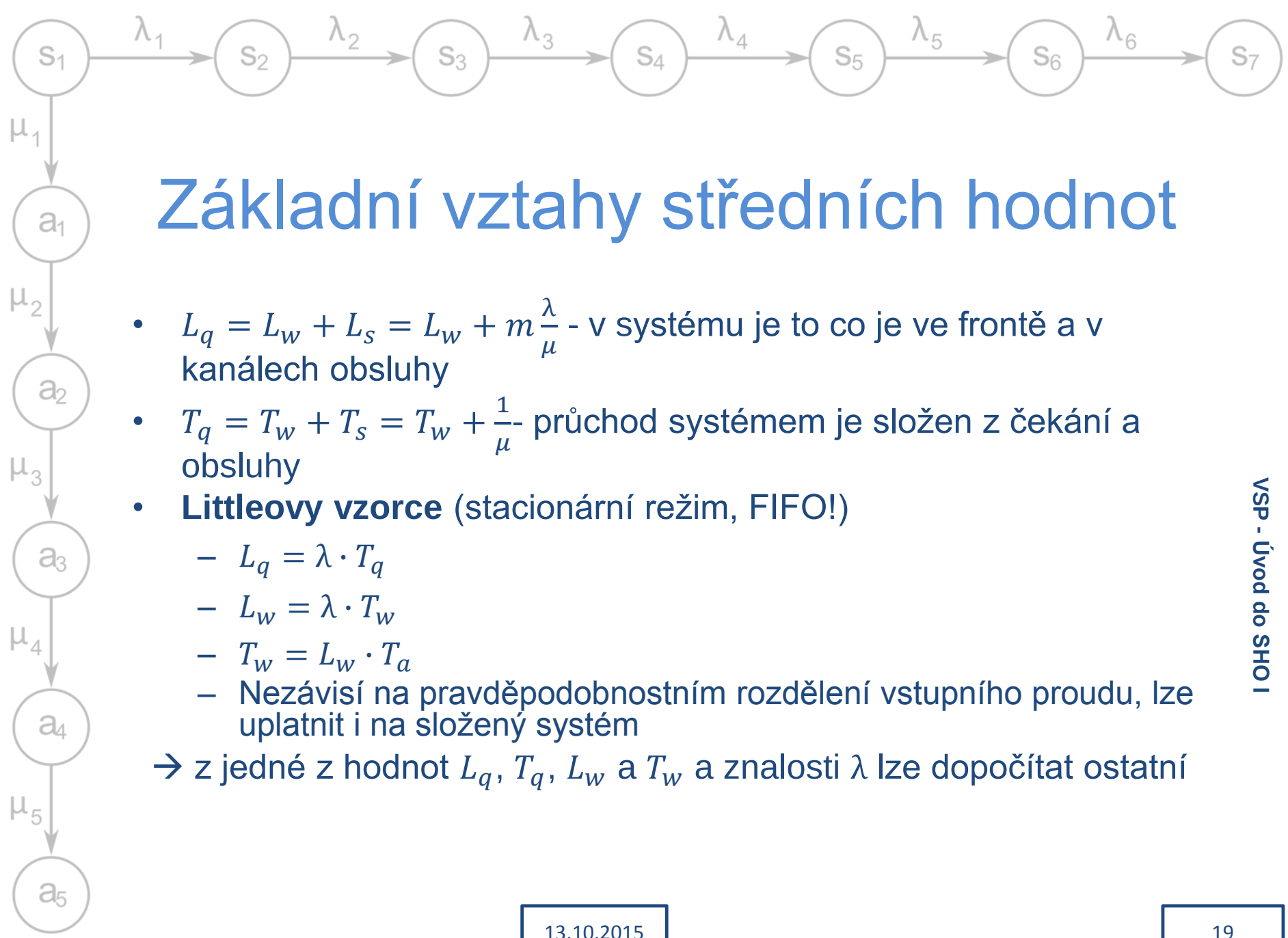
Exponenciální rozdělení

- Spojité rozdělení
  - Doba mezi dvěma požadavky, jejichž příchody jsou na sobě nezávislé a mohou v každém okamžiku nastat se stejnou pravděpodobností
  - Parametr je frekvence
- Diskrétní varianta – geometrické rozdělení



Celkové charakteristiky SHO

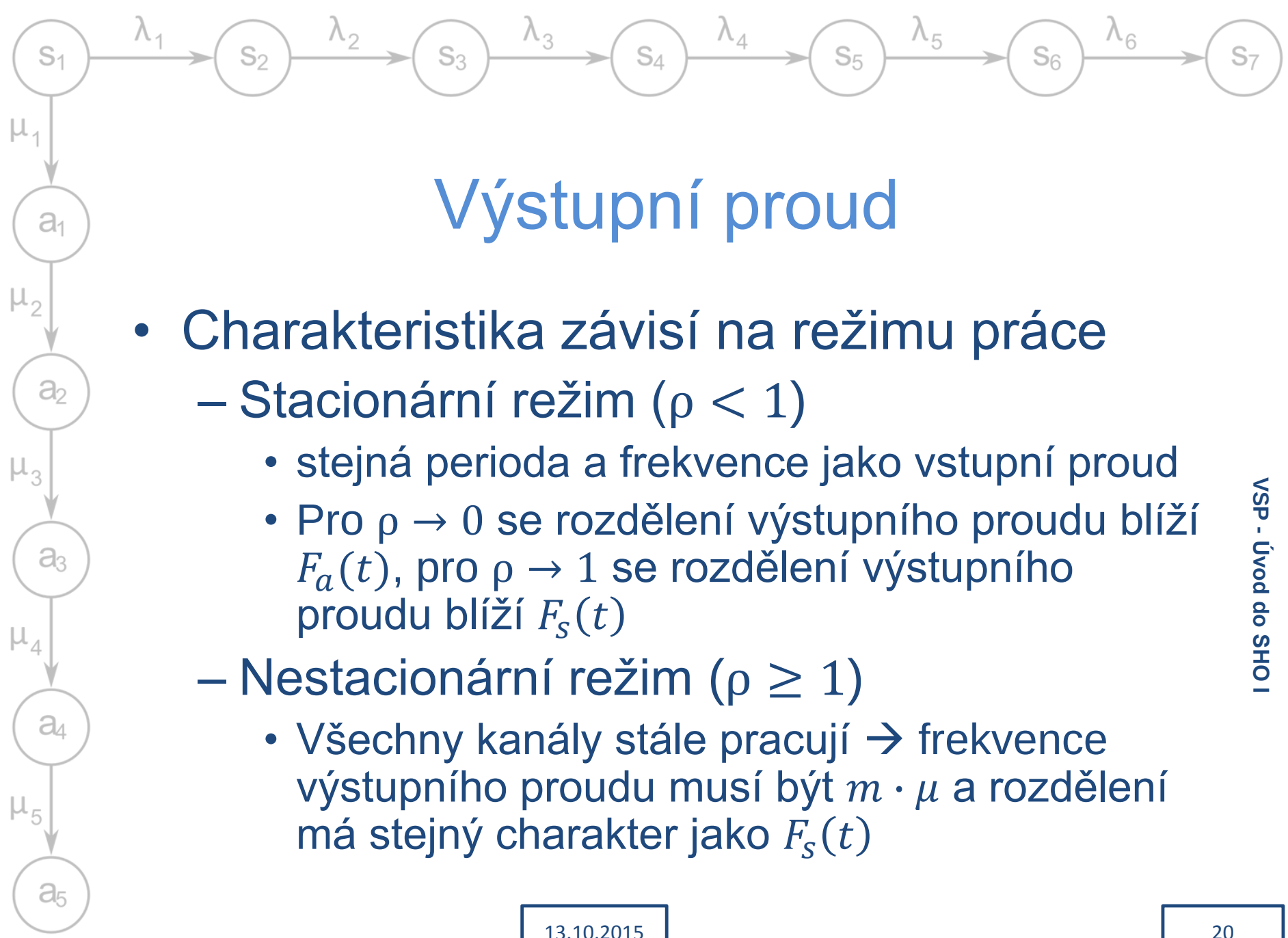
- $\rho = \frac{1}{m} \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{m} \cdot \frac{T_s}{T_a}$ – koeficient časového využití kanálu (pro stejné kanály s exponenciálními dobami příchodů)
  - ($\rho = 0$ – nic nedělá, $\rho = 1$ – plně vytížený)
  - Pokud vyjde $\rho \geq 1$ systém je přetížený – nestíhá a **není ve stacionárním režimu**
    → fronta neustále narůstá
  - Odpovídá prvd. obsazenosti kanálu
- q – okamžitý počet požadavků v systému (náhodná veličina)
- $L_q = E\{q\}$ – střední počet požadavků v celém SHO
  - Náhodné vzorkování a průměrování za celou dobu
- t_q – doba průchodu jednoho konkrétního požadavku = doba jeho odezvy
- $T_q = E\{t_q\}$ – střední doba odezvy



Základní vztahy středních hodnot

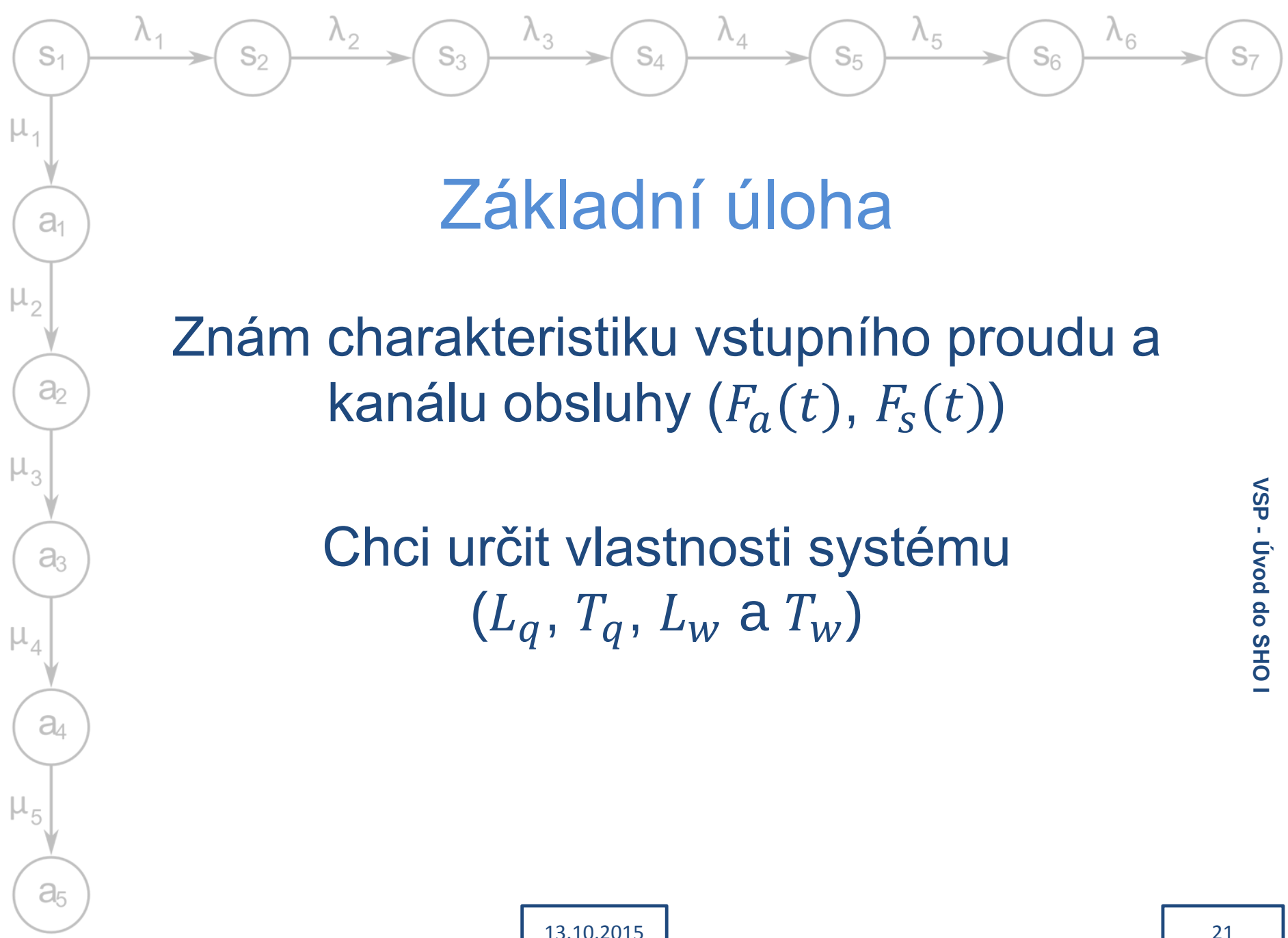
- $L_q = L_w + L_s = L_w + m\frac{\lambda}{\mu}$ - v systému je to co je ve frontě a v kanálech obsluhy
- $T_q = T_w + T_s = T_w + \frac{1}{\mu}$- průchod systémem je složen z čekání a obsluhy
- **Littleovy vzorce** (stacionární režim, FIFO!)
  - $L_q = \lambda \cdot T_q$
  - $L_w = \lambda \cdot T_w$
  - $T_w = L_w \cdot T_a$
  - Nezávisí na pravděpodobnostním rozdělení vstupního proudu, lze uplatnit i na složený systém

→ z jedné z hodnot L_q, T_q, L_w a T_w a znalosti λ lze dopočítat ostatní



Výstupní proud

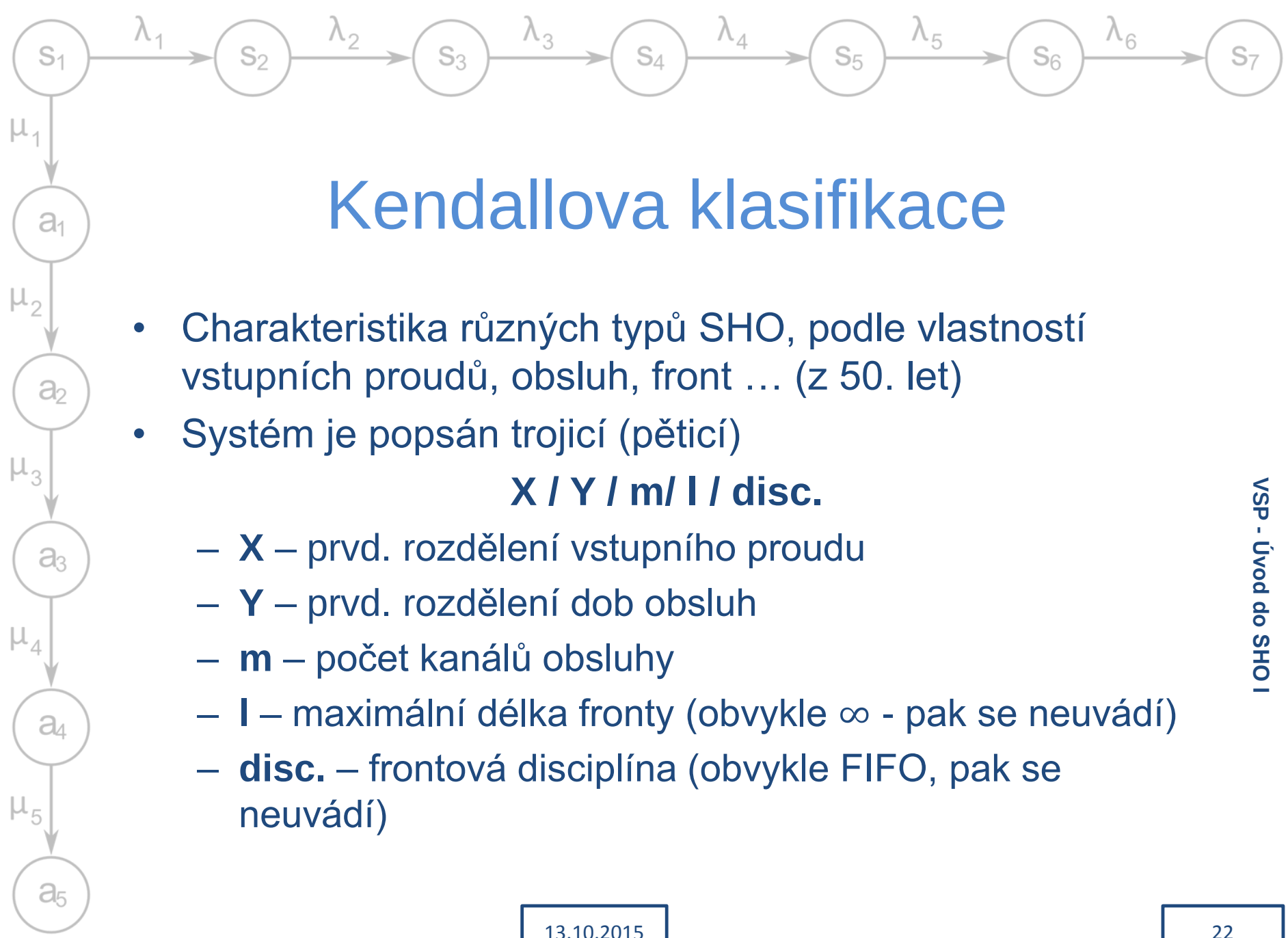
- Charakteristika závisí na režimu práce
  - Stacionární režim ($\rho < 1$)
    - stejná perioda a frekvence jako vstupní proud
    - Pro $\rho \to 0$ se rozdělení výstupního proudu blíží $F_a(t)$, pro $\rho \to 1$ se rozdělení výstupního proudu blíží $F_s(t)$
  - Nestacionární režim ($\rho \geq 1$)
    - Všechny kanály stále pracují → frekvence výstupního proudu musí být $m \cdot \mu$ a rozdělení má stejný charakter jako $F_s(t)$



Základní úloha

Znám charakteristiku vstupního proudu a kanálu obsluhy ($F_a(t)$, $F_s(t)$)

Chci určit vlastnosti systému (L_q, T_q, L_w a T_w)

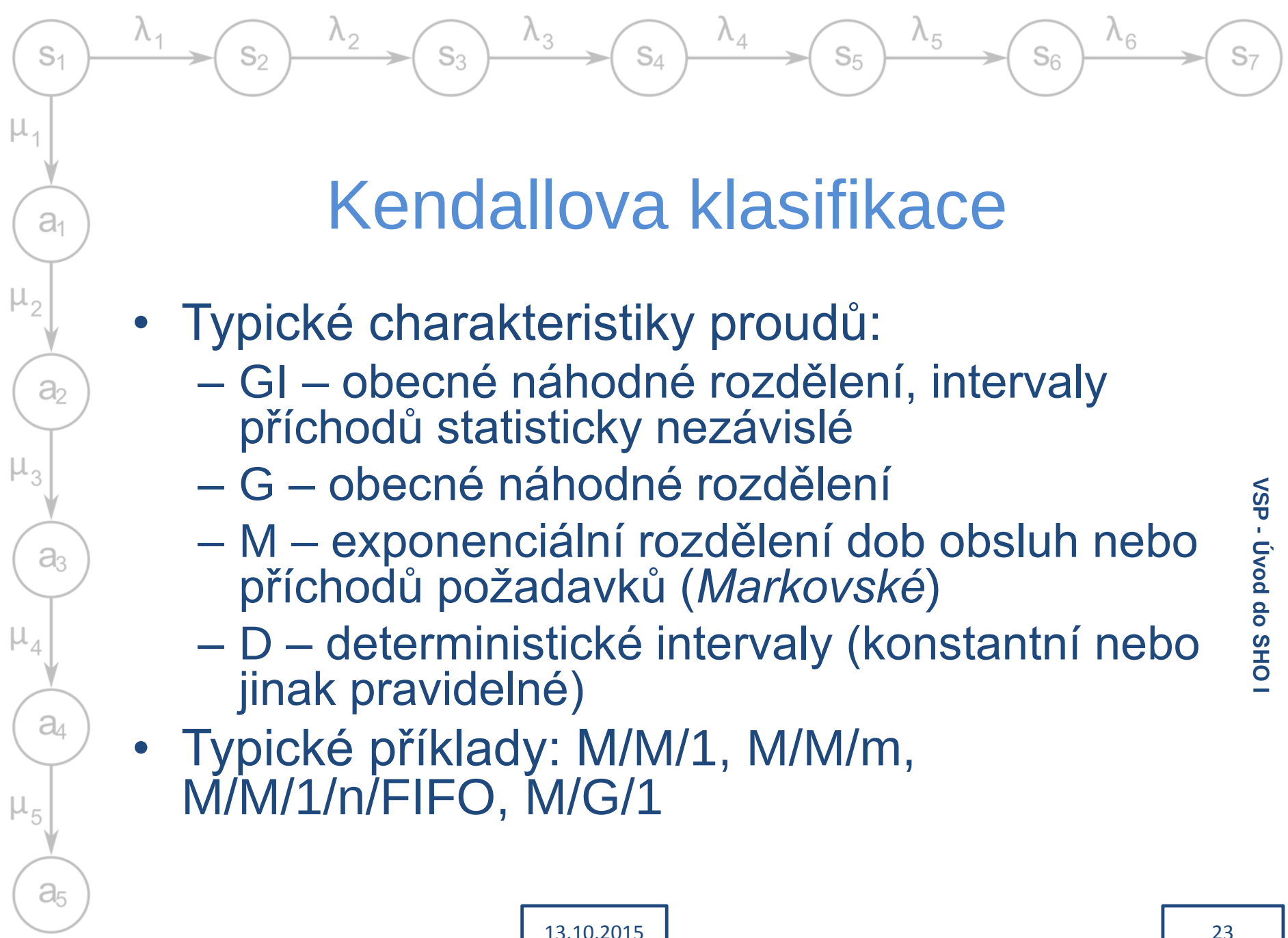


Kendallova klasifikace

- Charakteristika různých typů SHO, podle vlastností vstupních proudů, obsluh, front … (z 50. let)
- Systém je popsán trojicí (pěticí)

X / Y / m/ l / disc.

  - **X** – prvd. rozdělení vstupního proudu
  - **Y** – prvd. rozdělení dob obsluh
  - **m** – počet kanálů obsluhy
  - **l** – maximální délka fronty (obvykle ∞ - pak se neuvádí)
  - **disc.** – frontová disciplína (obvykle FIFO, pak se neuvádí)

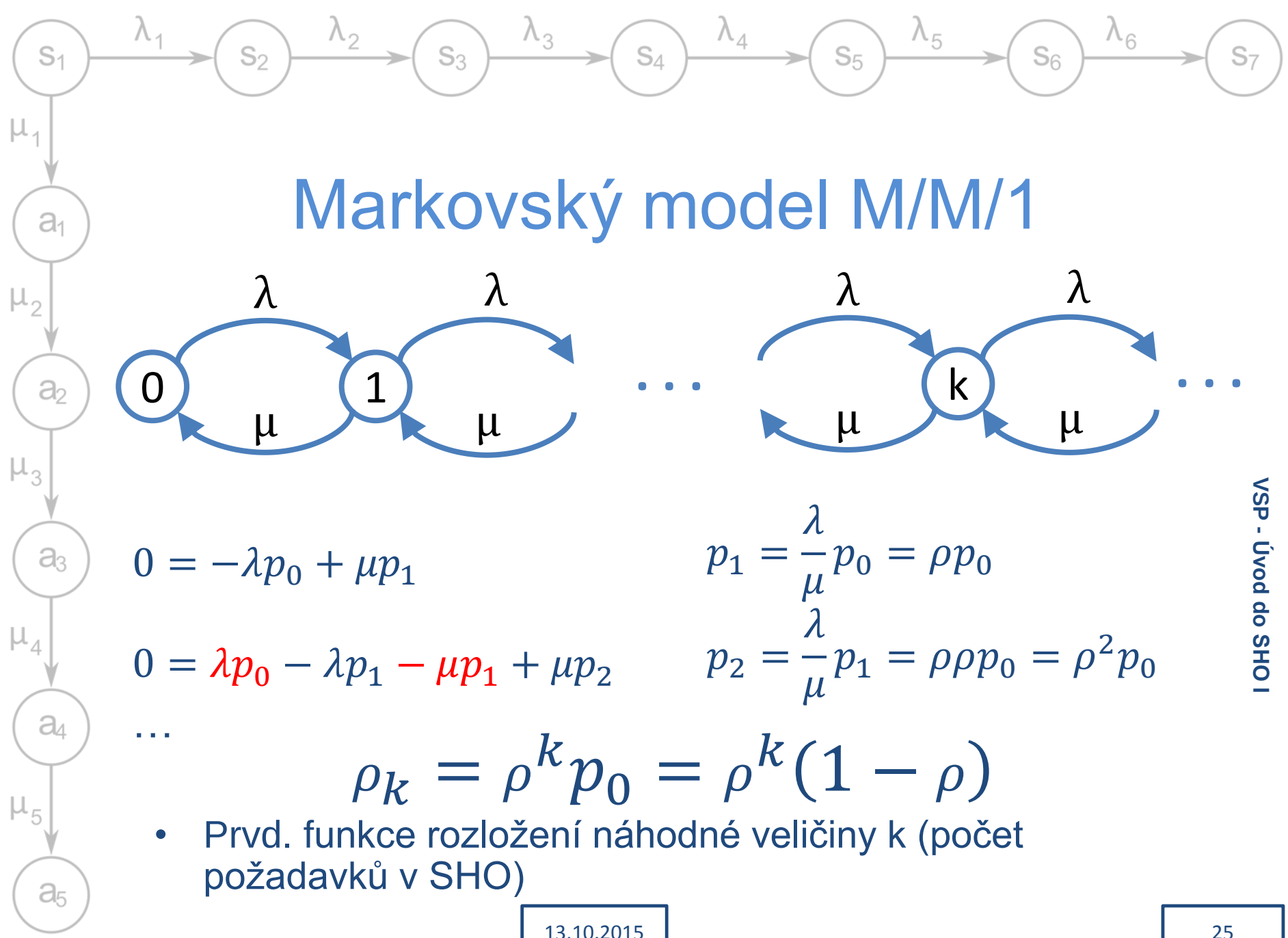


Kendallova klasifikace

- Typické charakteristiky proudů:
  - GI – obecné náhodné rozdělení, intervaly příchodů statisticky nezávislé
  - G – obecné náhodné rozdělení
  - M – exponenciální rozdělení dob obsluh nebo příchodů požadavků (*Markovské*)
  - D – deterministické intervaly (konstantní nebo jinak pravidelné)
- Typické příklady: M/M/1, M/M/m, M/M/1/n/FIFO, M/G/1

M/M/1 (/∞/FIFO)

- Nejjednodušší varianta
  - Poissonovský vstupní proud, exponenciální doby obsluhy → lze charakterizovat 2 parametry: $\frac{\lambda}{\mu}$
    - λ – střední frekvence vstupního proudu $(F_a(t) = 1 - e^{-\lambda t})$
    - μ – střední podmíněná frekvence obsluh pro $\rho < 1$ bude skutečná frekvence nižší
  - $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ → pro stacionární režim $\lambda < \mu$
  - Lze modelovat jako markovský proces



Markovský model M/M/1

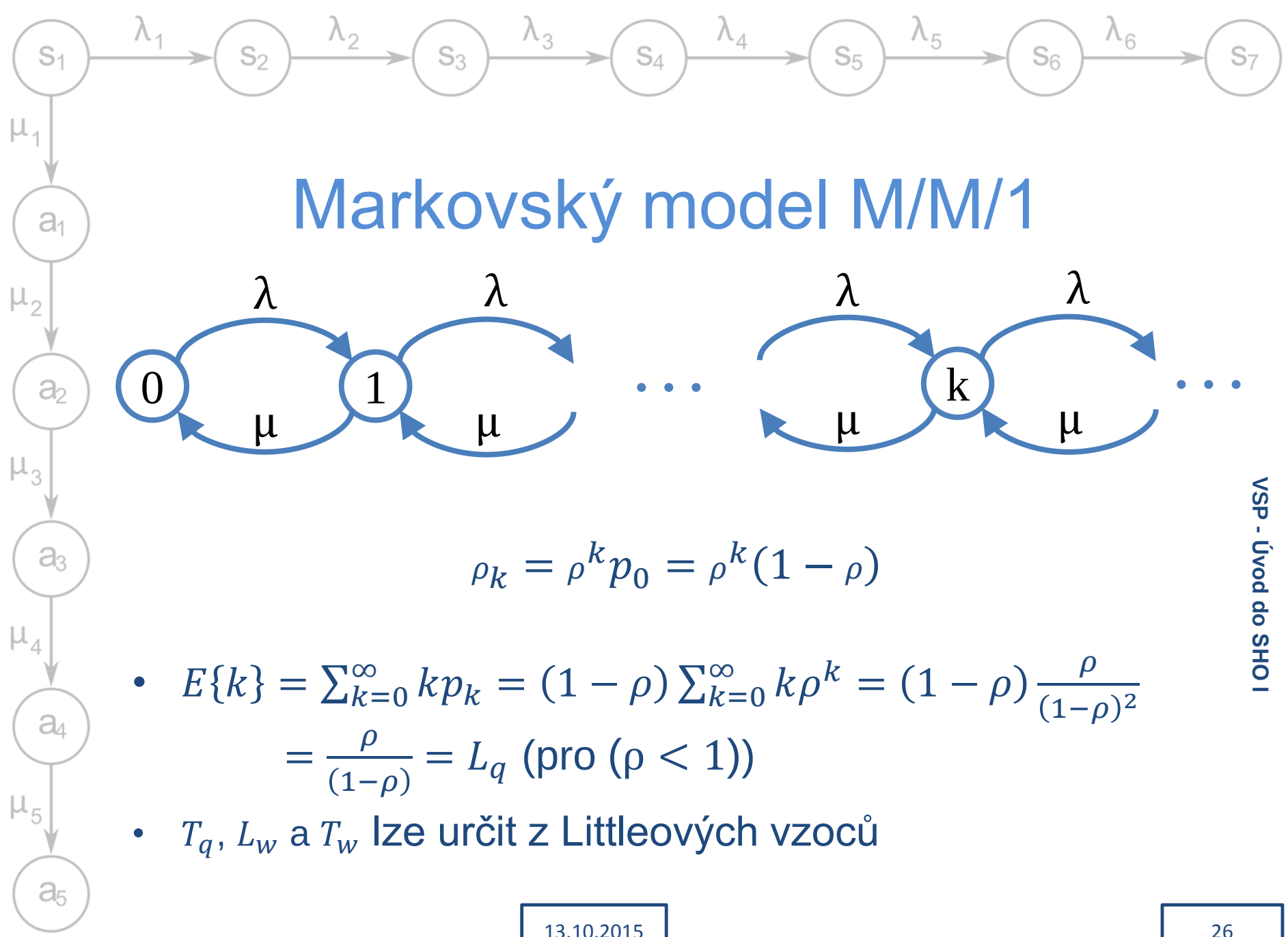
$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

$$0 = \lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + \mu p_2 \qquad p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \rho\rho p_0 = \rho^2 p_0$$

…

$$\rho_k = \rho^k p_0 = \rho^k (1 - \rho)$$

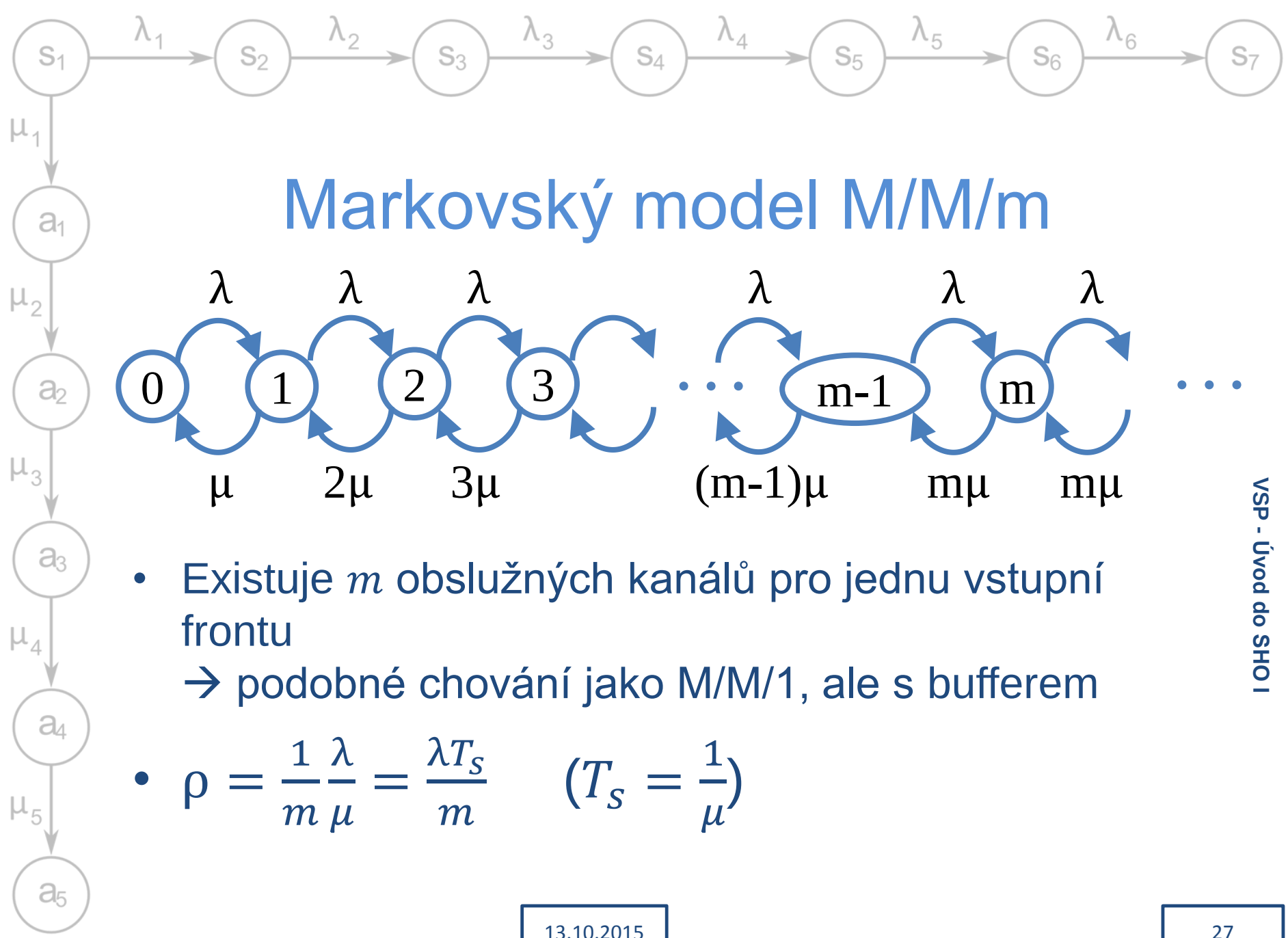
- Prvd. funkce rozložení náhodné veličiny k (počet požadavků v SHO)



Markovský model M/M/1

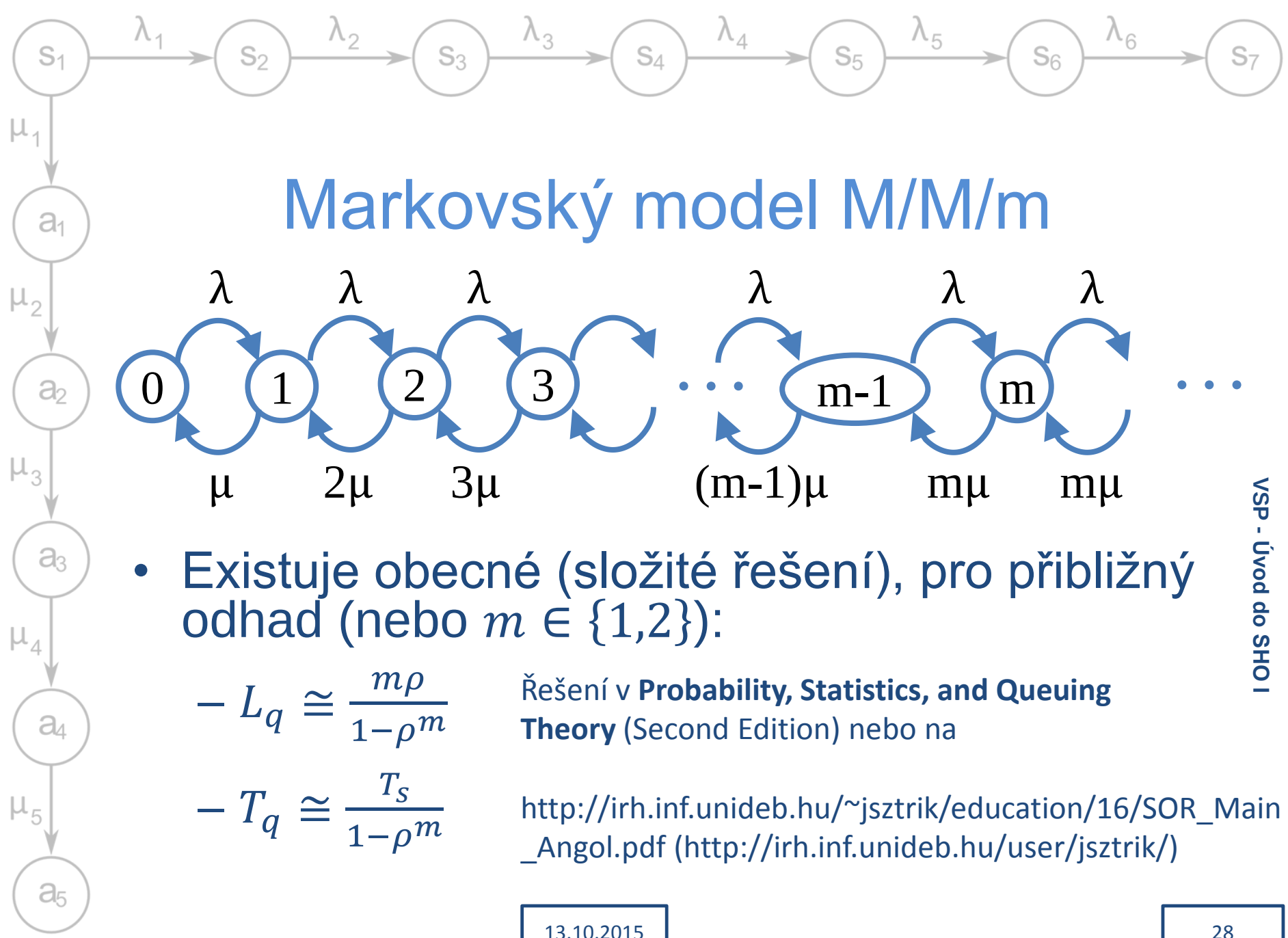
$$\rho_k = \rho^k p_0 = \rho^k (1-\rho)$$

- $E\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k \rho^k = (1-\rho) \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
  $= \frac{\rho}{(1-\rho)} = L_q$ (pro (ρ < 1))
- T_q, L_w a T_w lze určit z Littleových vzoců



Markovský model M/M/m

- Existuje m obslužných kanálů pro jednu vstupní frontu
  → podobné chování jako M/M/1, ale s bufferem
- $\rho = \frac{1}{m}\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda T_s}{m} \quad (T_s = \frac{1}{\mu})$

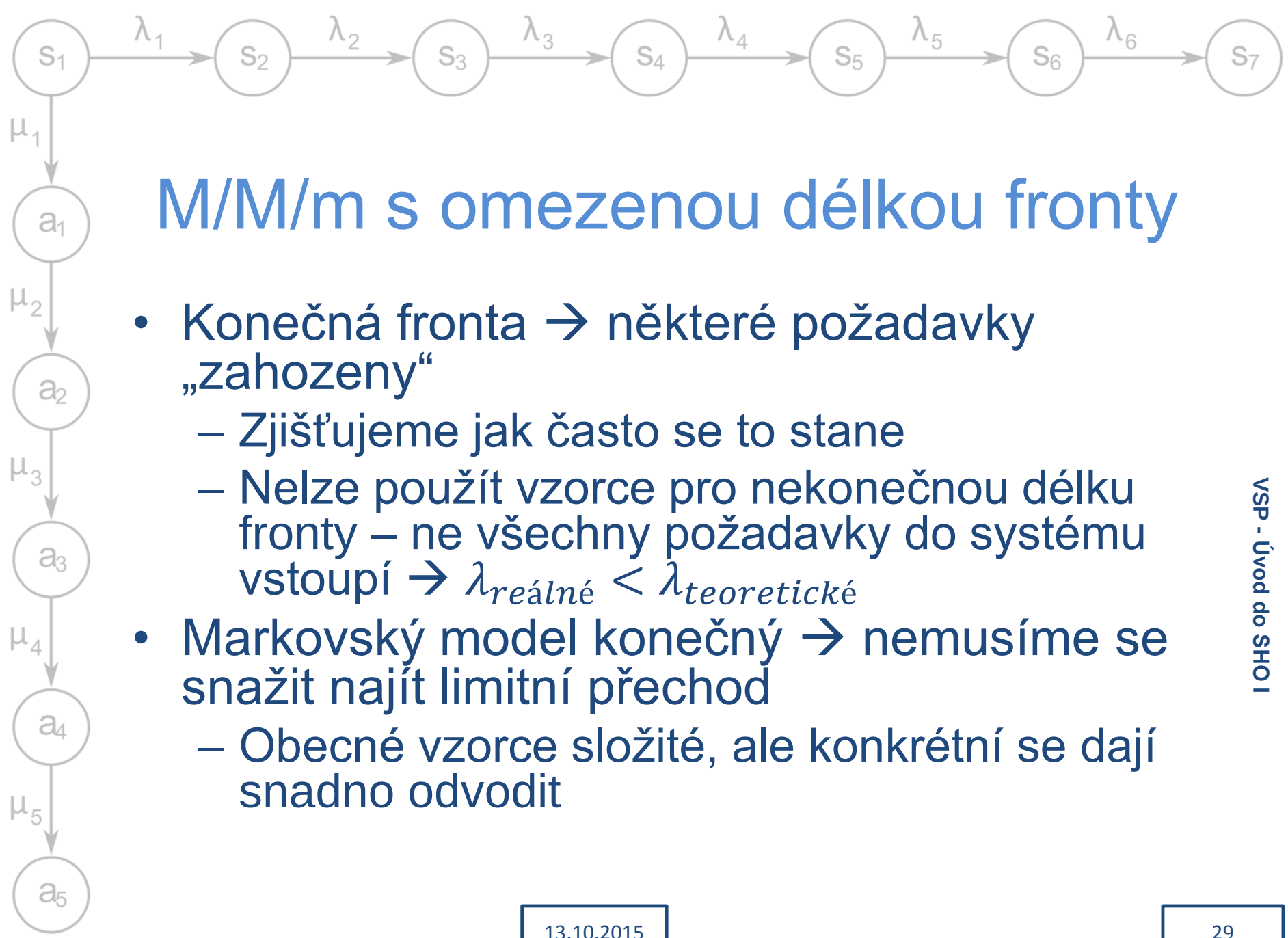


Markovský model M/M/m

- Existuje obecné (složité řešení), pro přibližný odhad (nebo $m \in \{1,2\}$):
  - $L_q \cong \frac{m\rho}{1-\rho^m}$
  - $T_q \cong \frac{T_s}{1-\rho^m}$

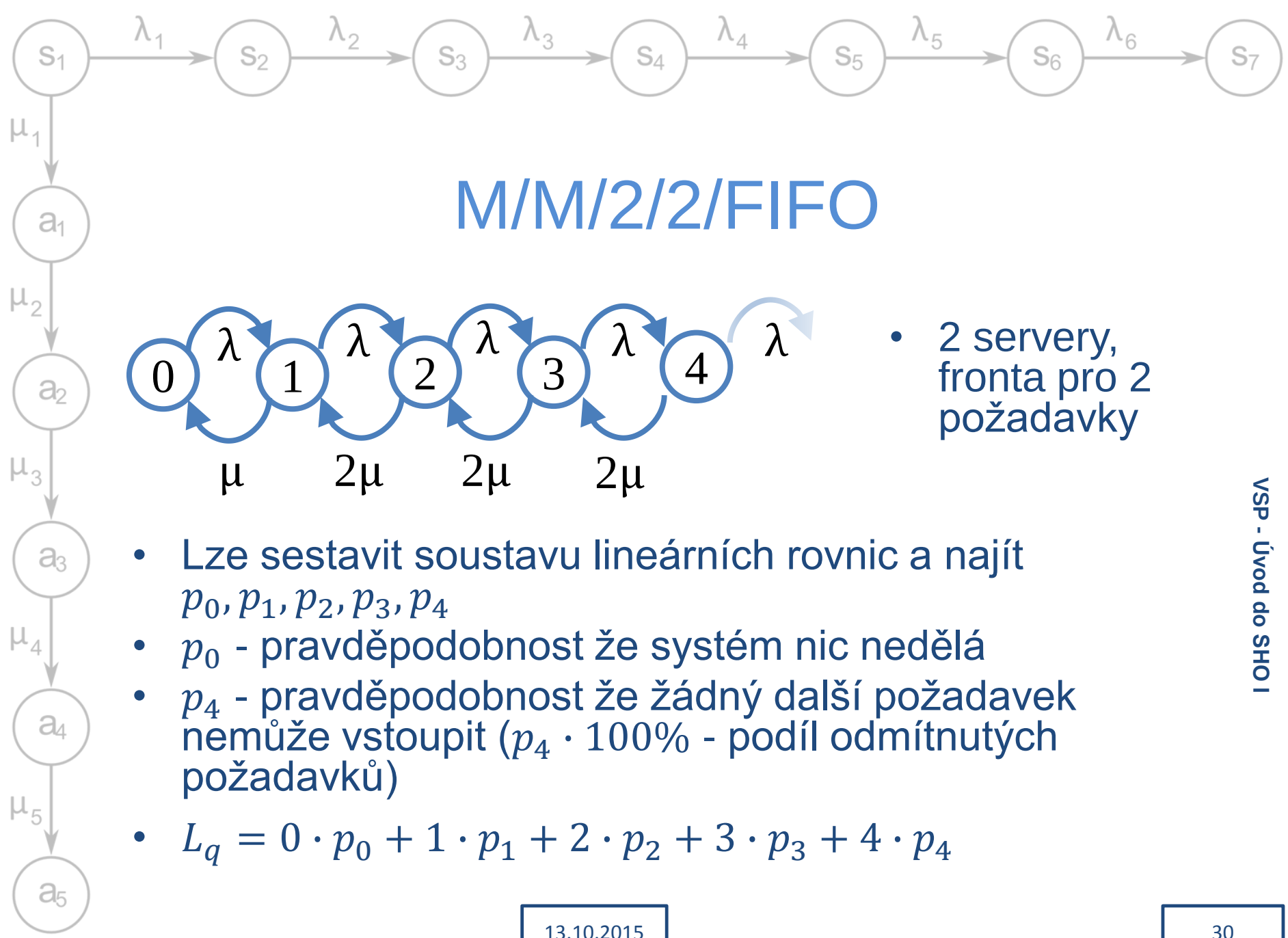
Řešení v **Probability, Statistics, and Queuing Theory** (Second Edition) nebo na

http://irh.inf.unideb.hu/~jsztrik/education/16/SOR_Main_Angol.pdf (http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/)



M/M/m s omezenou délkou fronty

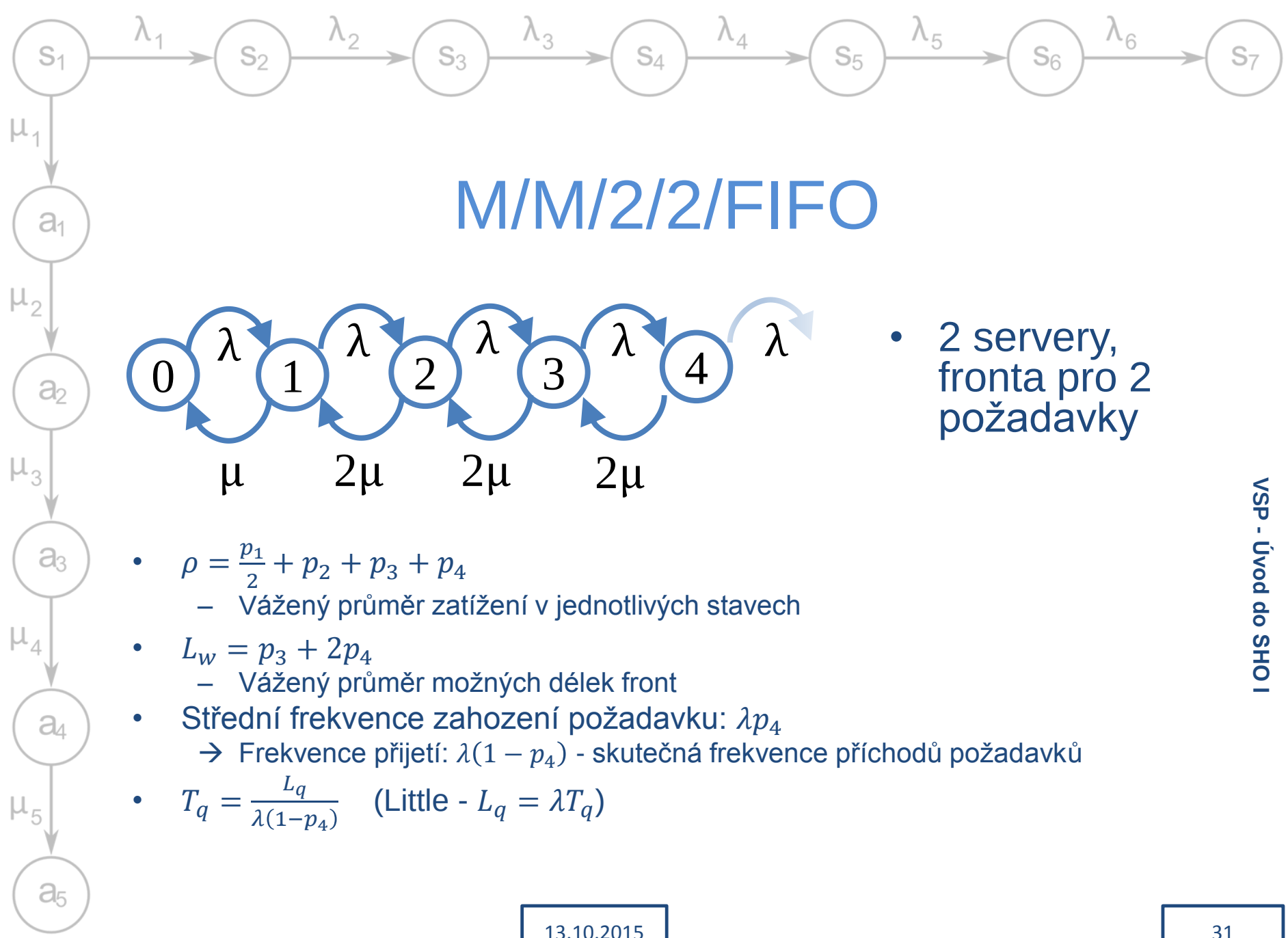
- Konečná fronta → některé požadavky „zahozeny“
  - Zjišťujeme jak často se to stane
  - Nelze použít vzorce pro nekonečnou délku fronty – ne všechny požadavky do systému vstoupí → $\lambda_{reálné} < \lambda_{teoretické}$
- Markovský model konečný → nemusíme se snažit najít limitní přechod
  - Obecné vzorce složité, ale konkrétní se dají snadno odvodit



M/M/2/2/FIFO

- 2 servery, fronta pro 2 požadavky

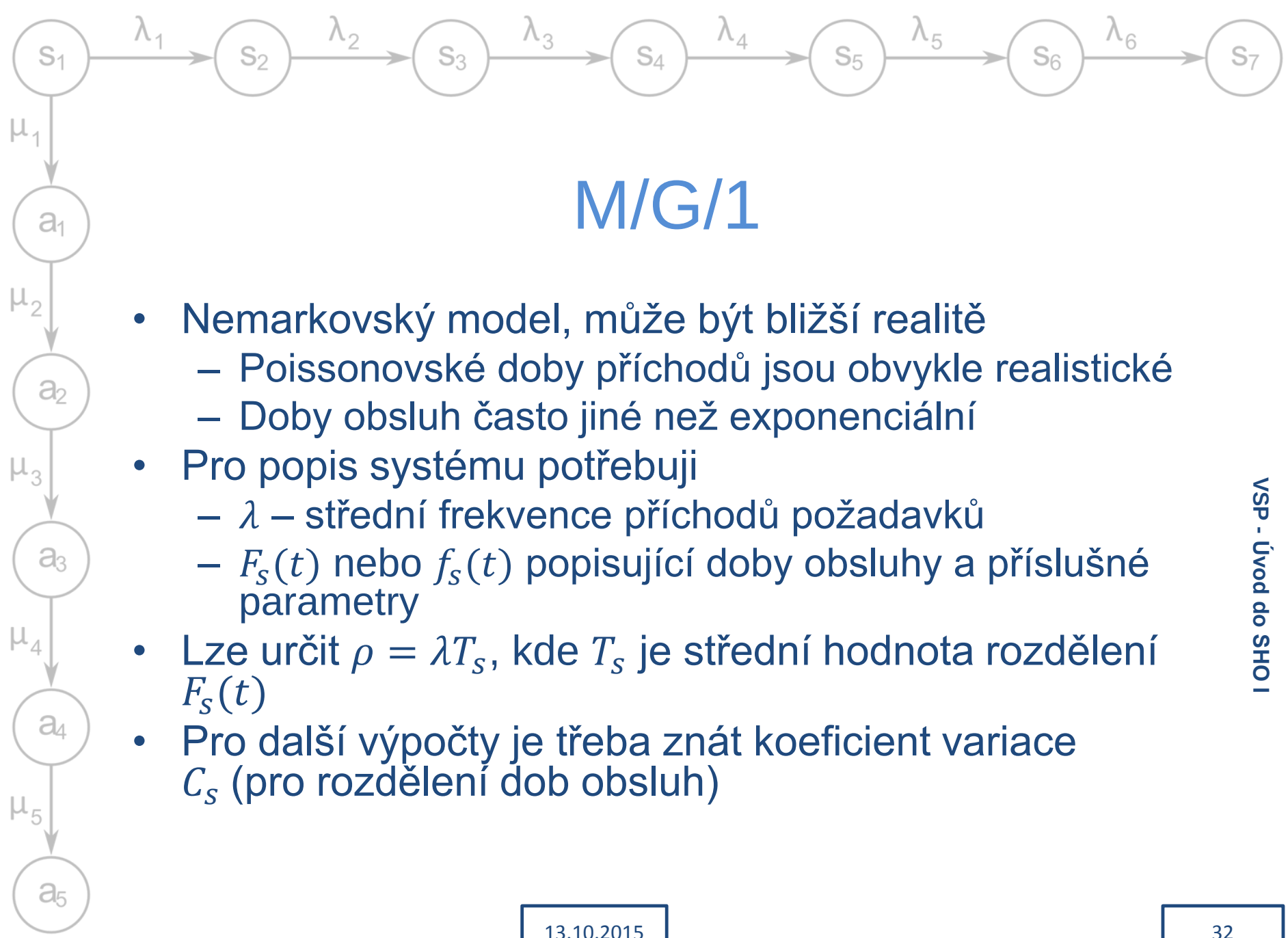
- Lze sestavit soustavu lineárních rovnic a najít p_0, p_1, p_2, p_3, p_4
- p_0 - pravděpodobnost že systém nic nedělá
- p_4 - pravděpodobnost že žádný další požadavek nemůže vstoupit ($p_4 \cdot 100\%$ - podíl odmítnutých požadavků)
- $L_q = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4$



M/M/2/2/FIFO

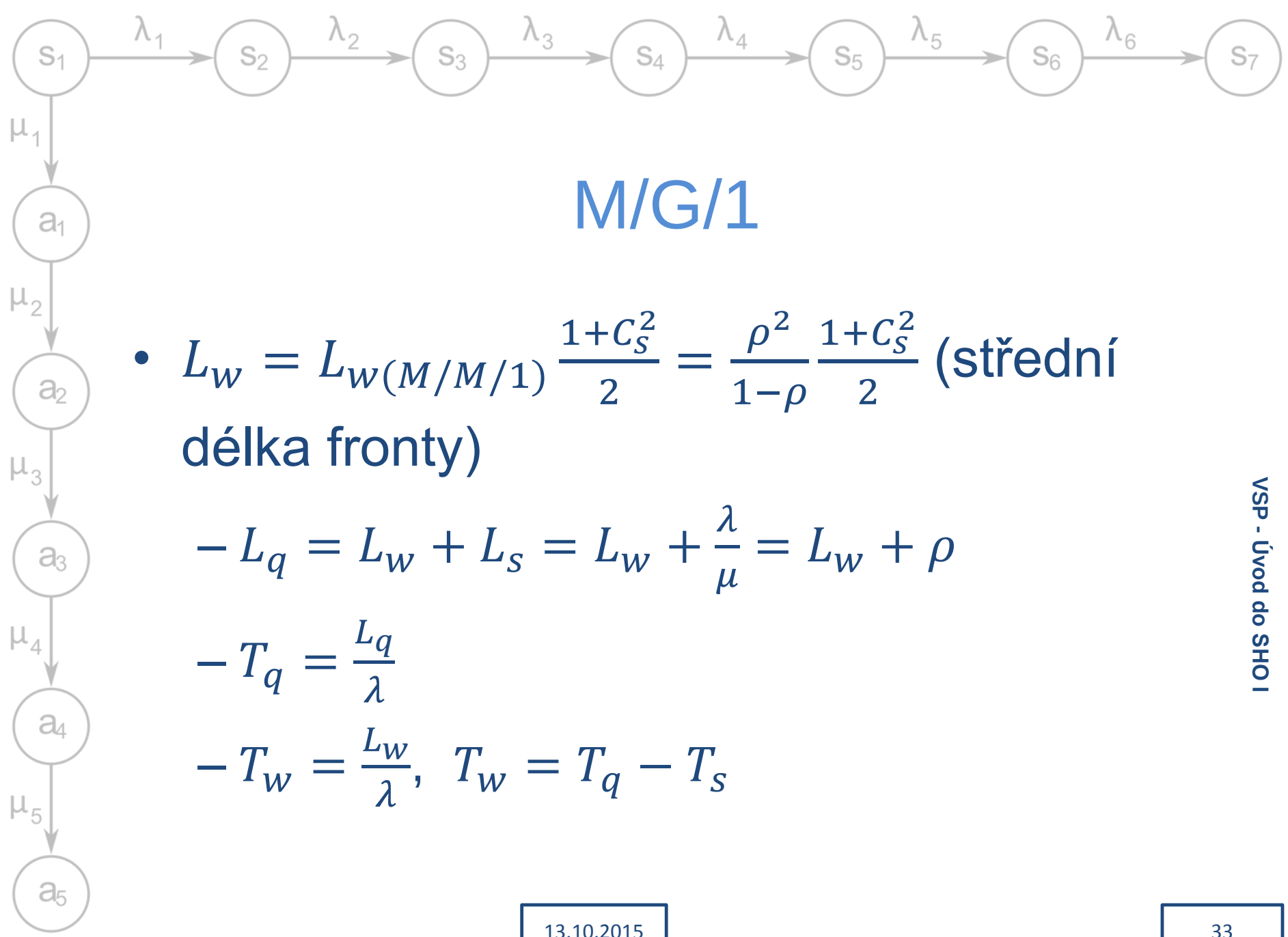
- 2 servery, fronta pro 2 požadavky

- $\rho = \frac{p_1}{2} + p_2 + p_3 + p_4$
  - Vážený průměr zatížení v jednotlivých stavech
- $L_w = p_3 + 2p_4$
  - Vážený průměr možných délek front
- Střední frekvence zahození požadavku: λp_4
  → Frekvence přijetí: $\lambda(1 - p_4)$ - skutečná frekvence příchodů požadavků
- $T_q = \frac{L_q}{\lambda(1-p_4)}$ (Little - $L_q = \lambda T_q$)



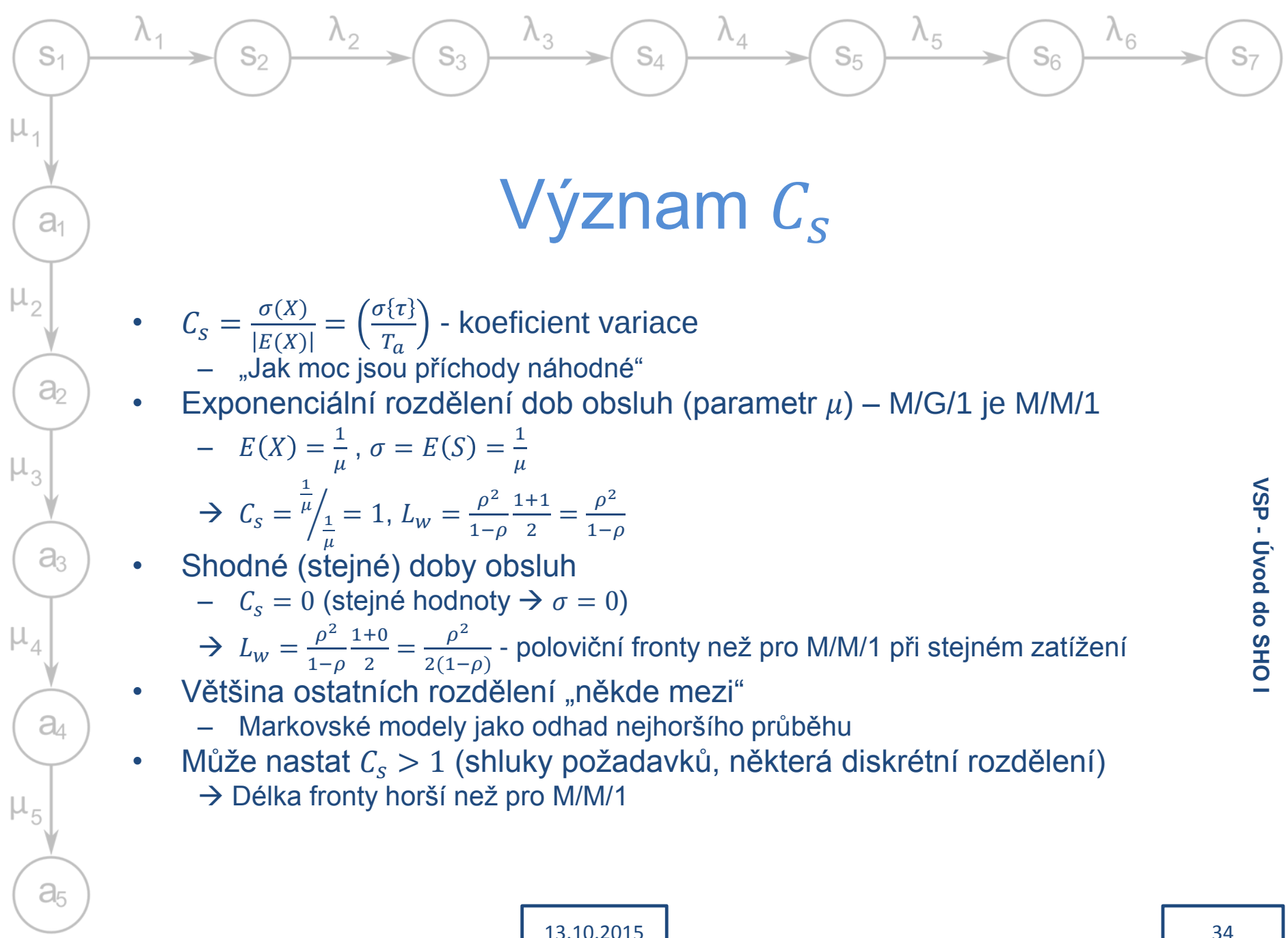
M/G/1

- Nemarkovský model, může být bližší realitě
  - Poissonovské doby příchodů jsou obvykle realistické
  - Doby obsluh často jiné než exponenciální
- Pro popis systému potřebuji
  - λ – střední frekvence příchodů požadavků
  - $F_s(t)$ nebo $f_s(t)$ popisující doby obsluhy a příslušné parametry
- Lze určit $\rho = \lambda T_s$, kde T_s je střední hodnota rozdělení $F_s(t)$
- Pro další výpočty je třeba znát koeficient variace C_s (pro rozdělení dob obsluh)



M/G/1

- $L_w = L_{w(M/M/1)} \frac{1+C_s^2}{2} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \frac{1+C_s^2}{2}$ (střední délka fronty)
  - $L_q = L_w + L_s = L_w + \frac{\lambda}{\mu} = L_w + \rho$
  - $T_q = \frac{L_q}{\lambda}$
  - $T_w = \frac{L_w}{\lambda}, \; T_w = T_q - T_s$



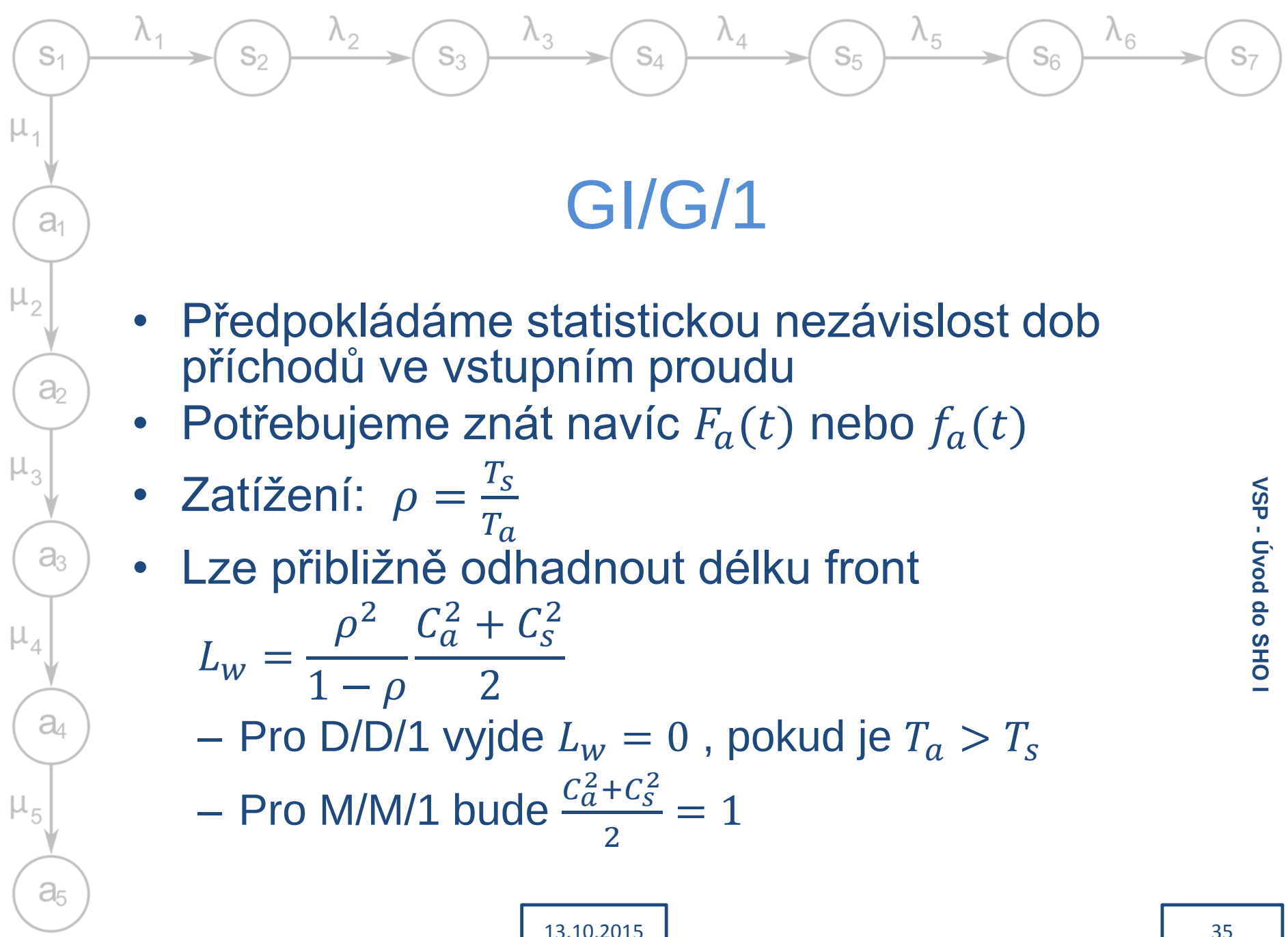
Význam C_s

- $C_s = \frac{\sigma(X)}{|E(X)|} = \left(\frac{\sigma\{\tau\}}{T_a}\right)$ - koeficient variace
  - „Jak moc jsou příchody náhodné“
- Exponenciální rozdělení dob obsluh (parametr μ) – M/G/1 je M/M/1
  - $E(X) = \frac{1}{\mu}$, $\sigma = E(S) = \frac{1}{\mu}$

  → $C_s = {}^{\frac{1}{\mu}}\!/_{\frac{1}{\mu}} = 1$, $L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1+1}{2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Shodné (stejné) doby obsluh
  - $C_s = 0$ (stejné hodnoty → $\sigma = 0$)

  → $L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1+0}{2} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ - poloviční fronty než pro M/M/1 při stejném zatížení
- Většina ostatních rozdělení „někde mezi“
  - Markovské modely jako odhad nejhoršího průběhu
- Může nastat $C_s > 1$ (shluky požadavků, některá diskrétní rozdělení)

  → Délka fronty horší než pro M/M/1

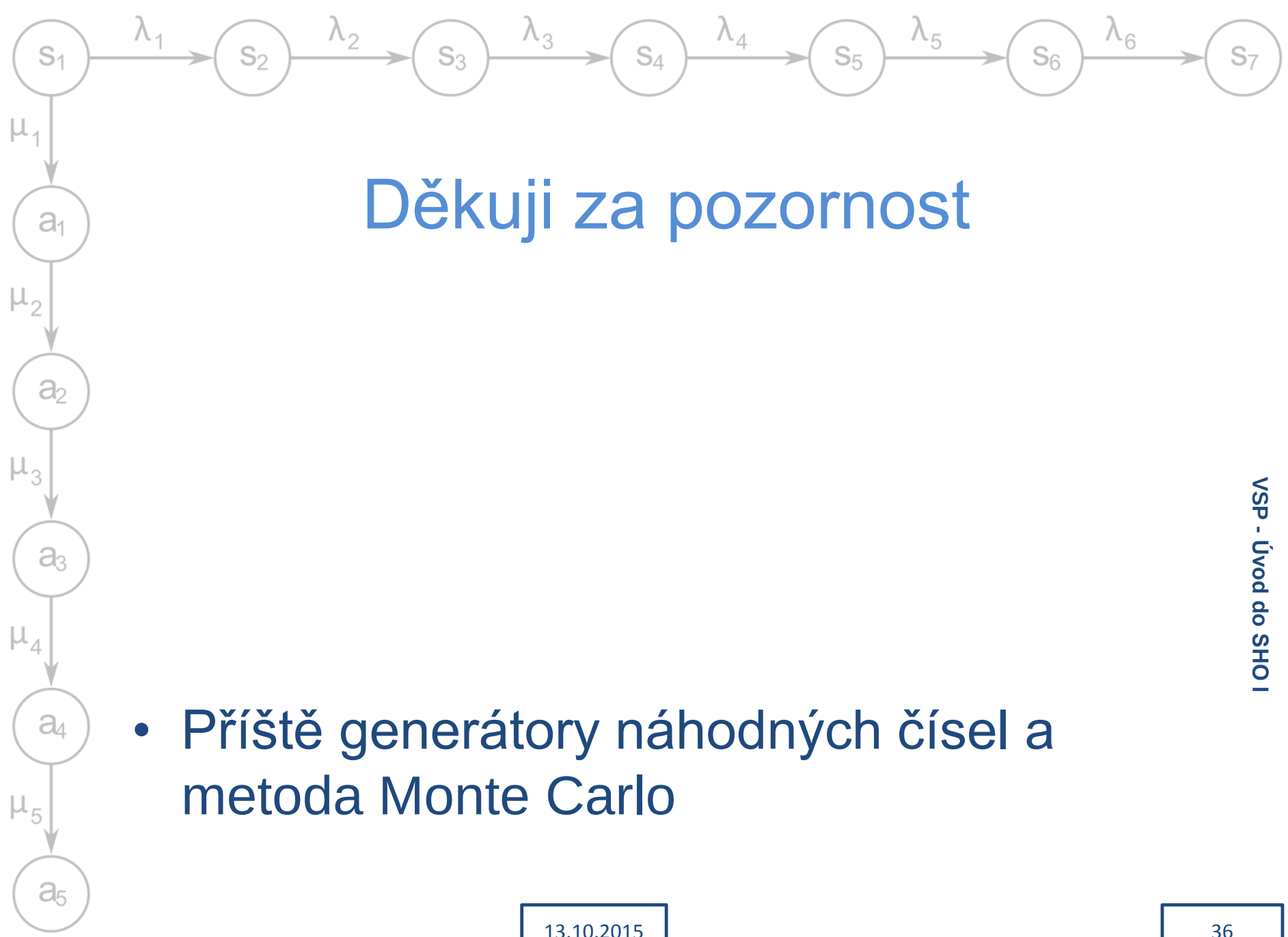


GI/G/1

- Předpokládáme statistickou nezávislost dob příchodů ve vstupním proudu
- Potřebujeme znát navíc $F_a(t)$ nebo $f_a(t)$
- Zatížení: $\rho = \frac{T_s}{T_a}$
- Lze přibližně odhadnout délku front

$$L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{C_a^2 + C_s^2}{2}$$

  - Pro D/D/1 vyjde $L_w = 0$, pokud je $T_a > T_s$
  - Pro M/M/1 bude $\frac{C_a^2+C_s^2}{2} = 1$



Děkuji za pozornost

- Příště generátory náhodných čísel a metoda Monte Carlo