# Analytické pravděpodobnostní modely, Markovské procesy

Výkonnost a spolehlivost – KIV/VSP

Richard Lipka

6.10.2015

# Motivace

- Andrej Markov
  (1856 - 1922)

  *„Budoucnost je nezávislá na minulosti, pokud je dán přesný popis současného stavu“*
  (Wilkinson, 2006)
- Modelování sekvencí dat

A. A. Марков (1886).

# Příklady využití

- Modelování systémů s náhodnými příchody požadavků
  - Lidé ve frontě
  - Telefonní linky
  - Půjčovny aut
  - Vozidla v křižovatce
  - …
- Vědecké modely
  - Modelování náhodného pohybu molekul
  - Fungování enzymů
  - Modelování burzy
  - PageRank
  - …

# Příklady využití

- Rozpoznávání řeči (převod mluveného slova na text)
  - Slova / fonémy následují v určitých kombinacích po sobě častěji než v jiných
  - I další aplikace – analýza DNA, dešifrování …
- Generování textů
  - Náhodné texty které vypadají na první pohled smysluplně
  - Chomskybot
  - Mark V Shaney
  - …

# Generátory řeči

## Mark V Shaney

It looks like Reagan is going to say? Ummm... Oh yes, I was looking for. I'm so glad I remembered it. Yeah, what I have wondered if I had committed a crime. Don't eat with your assessment of Reagon and Mondale. Up your nose with a guy from a firm that specifically researches the teen-age market.

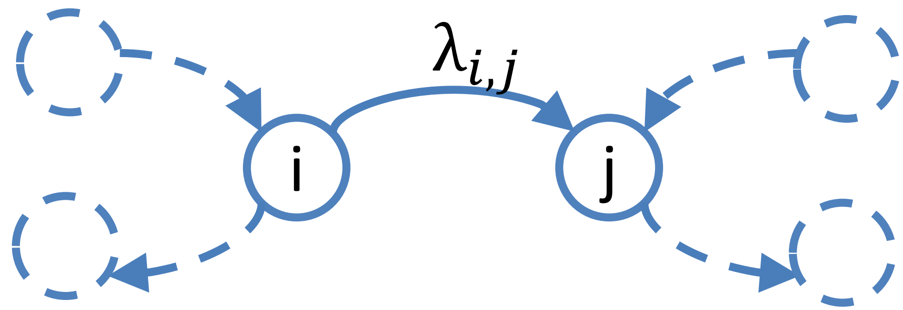
## ChomskyBot

Note that relational information can be defined in such a way as to impose a descriptive fact. So far, the natural general principle that will subsume this case does not affect the structure of a parasitic gap construction. Suppose, for instance, that the systematic use of complex symbols suffices …

# Vlastnosti

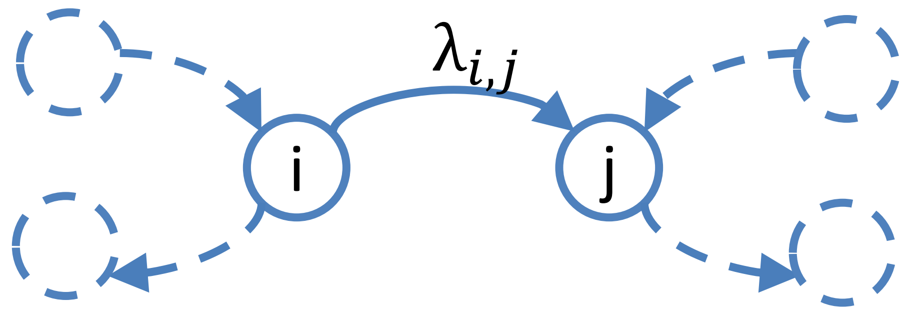
- Modelování systémů s jasně určenými
  - stavy (jako u KA – ve stavu všechny vlastnosti systému)
  - přechody (u kterých známe intenzitu / četnost)
- Markovská vlastnost: pravděpodobnost přechodu má exponenciální rozdělení (= model pracuje se spojitým časem)
- Pravděpodobnost stavu závisí jen na předchozím stavu a ne na cestě do něj

# Obecný model




- Intenzita přechodu – $\lambda[{}^{1}/_{s}]$
  - frekvence přechodů (počet za jednotku času)
  - Očekáváme konstantní (jinak nelze řešit analyticky, jen simulačně)
- Prvd. přechodu z $i$ do $j$ v malém časovém intervalu je $\lambda \cdot dt \; (dt \rightarrow 0)$
  - (podmíněná – nejdřív musí být ve stavu $i$)

# Obecný model

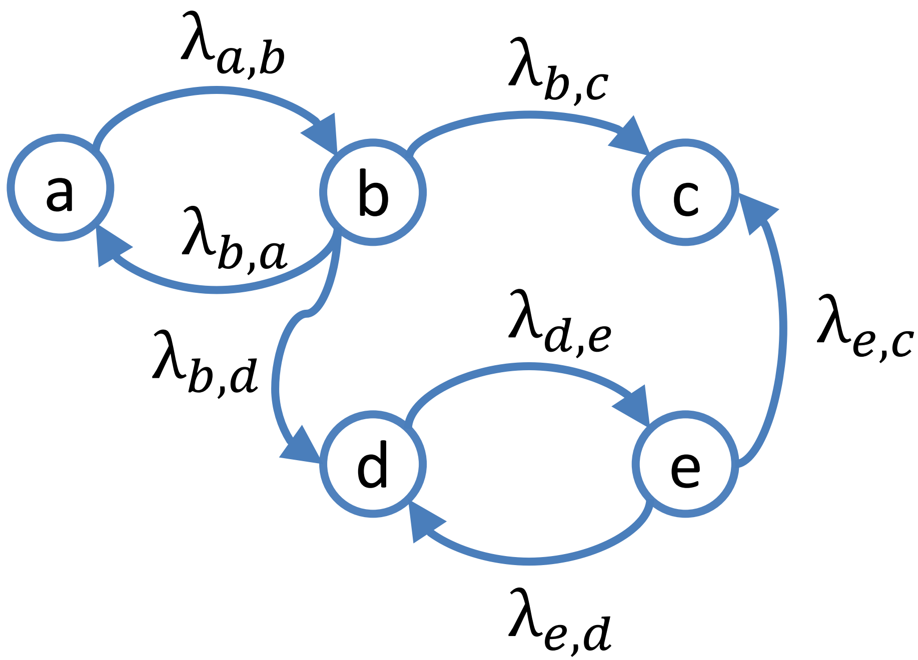



→ je-li pravděpodobnost stavu $i$ v čase $t$ rovna $p_i(t)$, je pravděpodobnost přechodu

$$\lambda \cdot p_i(t) \cdot dt$$

- nepodmíněná pravděpodobnost přechodu v čase $\langle t, t + dt \rangle$
- ale potřebuji znát pravděpodobnost výskytu ve stavu $i$

# Obecný model




- Popis orientovaným váženým grafem

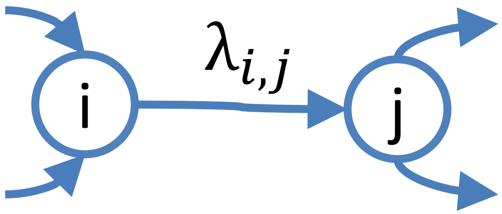
# Obecný model

$$\boldsymbol{P}(k)=\begin{bmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & \dots & p_{1,n}(k) \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n,1}(k) & p_{n,2}(k) & \dots & p_{n,n}(k) \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}(k) = 1$$

- Je-li $X_k = i$ (systém je ve stavu $i$), pak je $p_{i,j}(k)$ je prvd. přechodu do stavu $j$ (tedy prvd. že $X_{k+1} = j$ )
- *Homogenní* proces – $p_{i,j} = p_{i,j}(t_1, t_2) = p_{i,j}(\Delta t)$
- $\lambda_{i,j} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t}$ - konstantní intenzita přechodu

  $\Delta t \to 0, p_{i,j}(\Delta t) \cong \lambda_{i,j} \cdot \Delta t$

# Obecný model



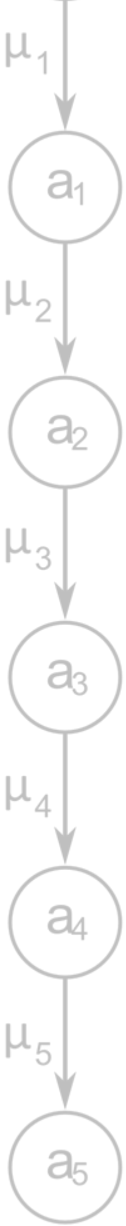

$$p_i(t+\Delta t) = p_i(t) - \lambda_{i,j} p_{i,j}(t)\Delta t$$

$$\frac{p_i(t+\Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -\lambda_{i,j} p_i(t)$$

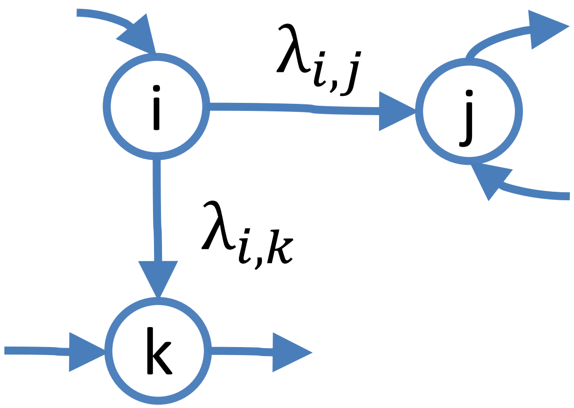
$$p_i'(t) + -\lambda_{i,j} p_i(t) = 0$$

- Lineární diferenciální rovnice prvního řádu
- Počáteční podmínka $p_i(0) = 1$ – někde musím začít

- $p_i(t) = e^{-\lambda_{i,j} t}$ - prvd. setrvání ve stavu $i$


# Obecný model




- Analogicky lze odvodit

$$p_i'(t) = -(\lambda_{i,j} + \lambda_{i,k})p_i(t) = -\lambda_i p_i(t)$$

prvd. setrvání ve stavu $i$ záleží na součtu intenzit odchodů z něj

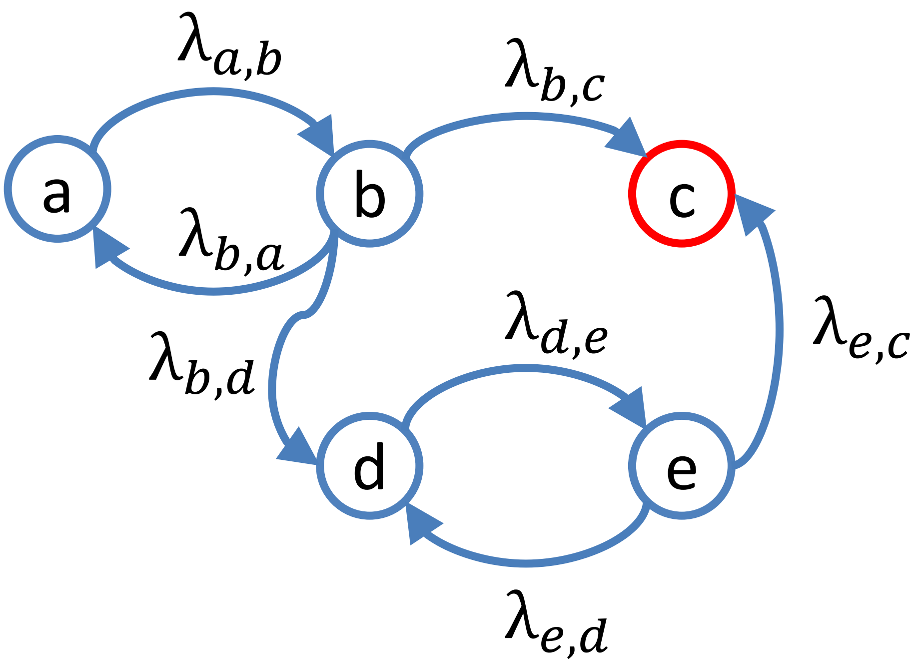
- Lze odvodit střední dobu setrvání ve stavu $i$
  $T_i = \frac{1}{\lambda_i}$ (což souhlasí s tím že $\lambda_i$ je frekvence)

# Kolmogorovovy rovnice

$$\boldsymbol{p}'(t) = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{\Lambda}$$

- $\boldsymbol{p}(t)$ je vektor pravděpodobností stavů
- $\boldsymbol{p}'(t)$ vektor derivací prvd. stavů
- $\boldsymbol{\Lambda}$ matice intenzit přechodů
  - $\lambda_{i,j}$ pro $i \neq j$ intenzita přechodu z $i$ do $j$
  - pro $i = j$ je $\lambda_{i,j} = -\lambda_i$ (záporná hodnota součtu ostatních prvků řádku)
    → součet řádku je 0
- Počáteční podmínky – vektor $\boldsymbol{p}(0)$ - kde začnu

# Absorpční stavy



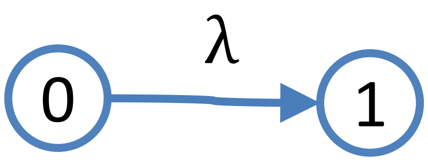

- Stav kde model končí – nevede z něj žádná hrana

  → život modelu je omezený a v některém absorpčním stavu časem skončí (z dlouhodobého pohledu jde jen o to ve kterém)
- Modelování přechodových jevů

# Absorpční stavy - příklad

- Spolehlivostní model 1 prvku bez jeho opravy (např. IO nebo nezálohovaný počítač)
  - Funguje nebo je porouchaný, nebude opraven
  - $\lambda$ jako intenzita poruchy prvku
    - Pro počítač cca $10^{-4}[hod^{-1}]$
    - Pro obvod cca $10^{-6}[hod^{-1}]$
      (nepřevádět na čas fungování – prvd. že se zařízení v následující jednotce času porouchá)

# Absorpční stavy - rovnice

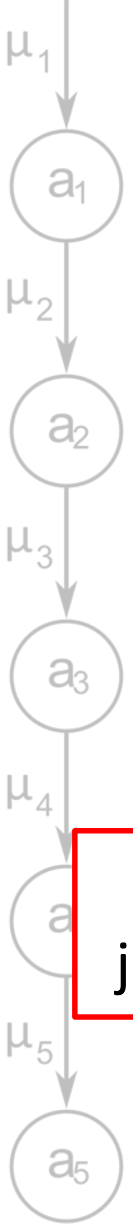



$p_0 = 1$ – počáteční podmínka

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t) - p_0(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t$$

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} + p_0(t)\cdot\lambda = 0$$

$$p_0'(t) + p_0(t)\cdot\lambda = 0$$


# Absorpční stavy - rovnice

Pravděpodobnost že systém ještě hodinu vydrží

Absolutní pravděpodobnost stavu 0 v čase t

$p$ … 1 – počáte… …nka

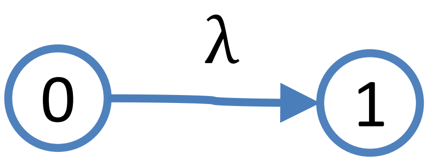
$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t) - p_0(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t$$

1 hodina – nejmenší jednotka se kterou pracuji

Absolutní pravděpodobnost přechodu do stavu 1

$$p_0'(t) + p_0(t)\cdot\lambda = 0$$


# Absorpční stavy - rovnice




Derivace $p_0$ podle času – viz definice derivace

podmínka

$$-p_0(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t$$

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}+p_0(t)\cdot\lambda=0$$

$$p_0'(t)+p_0(t)\cdot\lambda=0$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty



# Absorpční stavy - rovnice

$p_0'(t) + p_0(t) \cdot \lambda = 0$

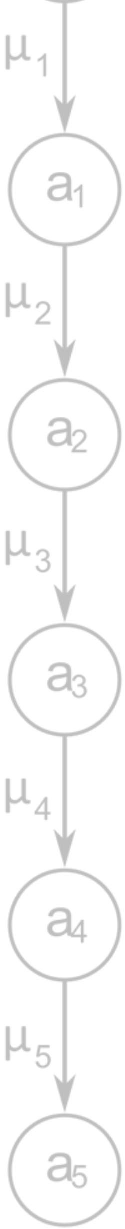
Navíc víme že platí

$p_0(t) + p_1(t) = 1$ – jiné stavy nejsou

a doplníme počáteční podmínku $p_0(0) = 1$

řešení (metodou charakteristické rovnice):

$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \; p_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$


# Absorpční stavy – kdy dojde k přechodu

- τ – doba za kterou dojde k poruše (př. z 0 do 1)
- $p_1(\tau)$ – prvd. že k poruše došlo – $P\{\tau \leq t\} = F(t)$
  - Distribuční funkce náh. doby poruchy τ

    $$F(t) = p_1(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
  - Hustota pravděpodobnosti (derivace dist. fce)

    $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$

    → náhodná doba poruchy má exponenciální rozdělení
- $E\{\tau\} = \frac{1}{\lambda}$ - vlastnost exp. rozdělení (odhad pro konstantní $\lambda$)



# Zobecnění modelu s absorpčními stavy

- Soustava lin. dif. rovnic 1. řádu, pro každý stav 1 rovnice → získám n rovnic pro stavy
- Pro $i$-tý stav
  - Levá strana: $p_i'(t)$
  - Pravá strana: součet „příspěvků $\lambda$“ ve tvaru
    - $+\, p_k(t) \cdot \lambda_{k,i}$ - hrany do stavu $i$
    - $-\, p_i(t) \cdot \lambda_{i,k}$ - hrany vedoucí ze stavu $i$
- Počáteční podmínky $p_i(0)$ pro všechny stavy → určím všechna $p_i(0)$



# Zobecnění modelu s absorpčními stavy

- Náhodná doba setrvání ve stavu v každém stavu $i$ má exp. rozdělení

- Parametr $\lambda_i$
  $\lambda_i = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i,j}$ - součet hran vedoucích ven
- Střední doba setrvání ve stavu $i$

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i}$$



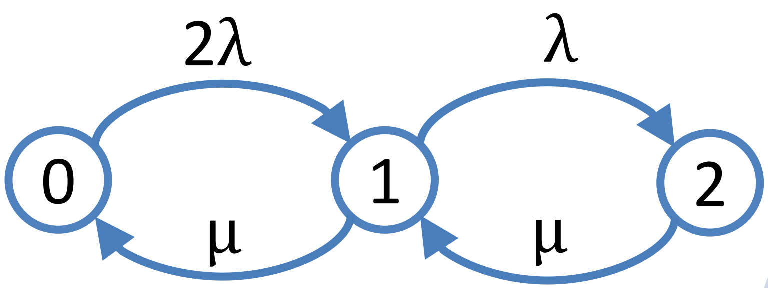
# Markovské modely bez absorpčních stavů (cyklické)

- Graf složený z cyklů → nekonečný život modelu
  - v jakém stavu bude v určitém čase?
- Graf musí být silně souvislý
  - odkudkoliv se dá dostat kamkoliv (neexistují podgrafy odkud se nedá dostat – „absorpční skupiny“)
- Lze určit limitní pravděpodobnosti stavů $p_0(\infty), p_1(\infty), \dots, p_n(\infty)$ (dále jen $p_0, p_1, \dots, p_n$) snáze než soustavou dif. rovnic

# Jak zjednodušit výpočet

- Jestliže existují hodnoty limitních pravděpodobností, odpovídající derivace jsou nulové (prvd. se už nemění)
  → pro $t \to \infty$ přejde popis modelu na soustavu lineárních rovnic, $p_i'(\infty) = 0$, $p_1, \dots, p_n$ budou jen neznámé, ne funkce:
- $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\Lambda}$
  kde $\boldsymbol{0}$ je nulový vektor a $\boldsymbol{p} = [p_1, \dots, p_n]$
  - Pro řešení nutné doplnit normalizační podmínku $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, která nahradí libovolnou z rovnic

# Příklad – synchronizace procesů




- 2 vlákna, paralelní, každ na svém procesoru
- 1 kritická sekce do které obě potřebují
- Parametry $\tau_{loc}$ a $\tau_{sec}$ náhodné a s exp. rozdělením

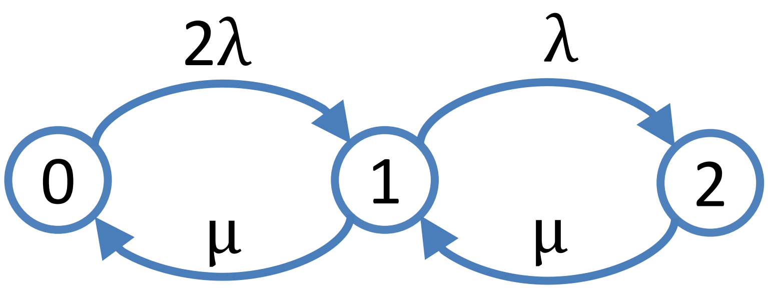
Lokální výpočet (doba $\tau_{loc}$, střední doba $T_{loc}$)

$$\lambda = \frac{1}{T_{loc}}$$

Lokální výpočet (doba $\tau_{sec}$, střední doba $T_{sec}$)

$$\mu = \frac{1}{T_{sec}}$$

# Příklad – synchronizace procesů

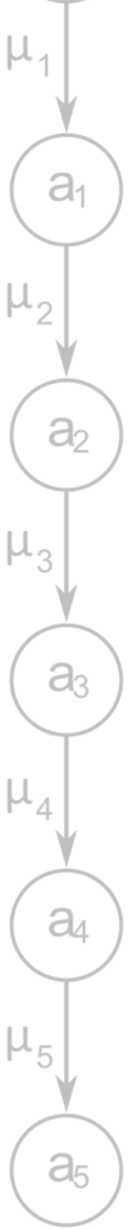



- 0 – oba lokálně
- 1 – 1 v krit. sekci, druhý lokálně
- 2 – 1 čeká na krit. sekci, druhý čeká

Lze určit $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
p_0'(t) &= -2\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\
p_1'(t) &= \quad 2\lambda p_0(t) - (\mu + \lambda) p_1(t) + \mu p_2(t) \\
p_2'(t) &= \qquad\qquad\qquad \lambda p_1(t) \qquad\qquad - \mu p_2(t)
\end{aligned}
$$

Pro poč. podmínky $p_0(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = 0$


# Příklad – synchronizace procesů

- U non-stop dějů hledáme obvykle ustálené (asymptotické) prvd. stavů

$$p_0(\infty) = \lim_{t\to\infty} e_0(t) = p_0 \ \ (p_1, p_2)$$

- Nejprve určíme limity derivací (ustálený stav!)

$$p_0'(\infty) = 0,\ p_1'(\infty) = 0,\ p_2'(\infty) = 0$$

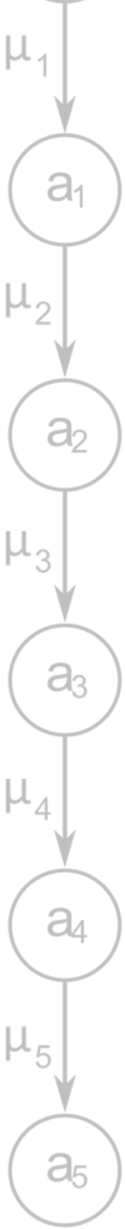
→ soustava se mění na soustavu lineárně závislých algebraických rovnic
(= jejich součet je 0)

  – Zavádíme normalizační podmínku
  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ - v nějakém stavu systém být musí

# Příklad – synchronizace procesů

$$
\begin{aligned}
0 &= -2\lambda p_0 + \mu p_1 \\
0 &= \phantom{-}2\lambda p_0 - (\mu + \lambda) p_1 + \mu p_2 \\
0 &= \lambda p_1 - \mu p_2 \\
1 &= p_0 + p_1 + p_2
\end{aligned}
$$

- 3 neznámé, 3 rovnice, lze řešit Gaussovou eliminací (Matlab)
- Význam: $p_2 = 0{,}05$ → model stráví v $p_2$ 5% času
- Platné jen pro ustálený stav (při dlouhodobém sledování) !


# Zobecnění modelu bez absorpčních stavů

- Z grafu lze odvodit soustavu lineárních rovnic (podobná pravidla jako u diferenciálních) → lze získat vektor $\boldsymbol{p}_i$ ustálených pravděpodobností
- Stále platí že doba setrvání ve stavu má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda_i$ (součet intenzit odchodů z daného stavu), respektive střední dobou setrvání ve stavu $T_i = \frac{1}{\lambda_i}$
- Děj je cyklický → lze určovat frekvence přechodů mezi stavy

# Frekvence přechodů

- Střední frekvence přechodů po dané hraně z $i$ do $j$
$$f_{i,j} = p_i \cdot \lambda_{i,j}$$
- Střední frekvence průchodů stavem $f_i = p_i \cdot \sum_{j=0}^{n} \lambda_{i,j} = p_i \cdot \lambda_i$ (intenzita výstupních hran)
- Střední doba cyklu průchodů stavem $i$ $T_{ci} = \frac{1}{f_i}$ (jak často se stav opakuje)

# Nástroj Markov

- Nástroj pro vyhodnocování markovských modelů
  - DP Radka Hoštičky a Marka Pašky
- K dispozici na portálu
  - Spustitelný program
  - Dokumentace (stručný návod + DP Marka Pašky s podrobným popisem programu i teorie Markovských modelů)
- Pro modely bez absorpčních stavů, s konstantními koeficienty, popsané silně souvislým grafem

# Nástroj Markov

- Definice modelu
  - Jazyk pro popis grafů (uzly a intenzity přechodů mezi nimi)
  - Podobný jazyku C, podporuje cykly pro vytvoření grafu (snazší než mít GUI pro velké modely)
  - Vypočte ustálené pravděpodobnosti
- Dotazování nad modelem
  - „kombinace SQL a C“ – deklarativní jazyk pro dotazy nad zpracovaným modelem
  - Definované matematické funkce a cykly, řazení výsledků, agregační funkce

# Definice modelu

- Lze definovat konstanty
  `#define lambda 0.9`

- Stavy definovány v souřadné mřížce modelu (n dimenzí)
  `module model1 [10, 10]`

  stavy lze označit vlastními čísly
  `[1,1] = 1;`

- Mezi stavy jde nastavit přechody
  `[1,1]->0.9 [1,2];`

# Definice modelu – příklad

```
module bufferexample [200];

#define size 200
#define lambda 0.9
#define mi 1.0

for (i ;0; size-2){
    [i]->lambda [i+1];
}

for (i; 0; size-2){
    [i+1]->mi [i];
}
```

Definice konstant

Přechody v jednom směru (zprava doleva)

Přechody v opačném směru (zleva doprava)



# Řešení modelu

- `model.map` – transformace z prostoru stavů (n-rozměrné mřížky) do matice přechodů
- `model.mtx` – popis matice přechodů mezi stavy modelu
- `model.val` – uživatelská ohodnocení stavů
- `model.pbt` – pravděpodobnosti stavů (výsledek výpočtu)
- `model.err` – protokol o případných chybách

# Dotazování

- Nutné načíst model

  `load "C:\Models\model1" as buf`
- Lze definovat konstanty

  `define size := 200;`
  - Definované konstanty `e` a `pi`
- Lze se dotazovat na pravděpodobnosti

  `select p[0] from buf`
  - Definované identifikátory `p` a `val`

# Dotazování

- Iterace v dotazu

```
select p[i] from model1
   for i:= 0 to 19
select p[I, j] from model2
   for i:= 0 to 19, j:= 1 to I
```

- Podmínka v dotazu

```
select i, p[i] from model1
   for i:= 0 to 19 where p[i] > 0.1
```

- Agregační funkce

```
select sum(p[i]) as SUMA
   from model1 for i:= 0 to 19
```

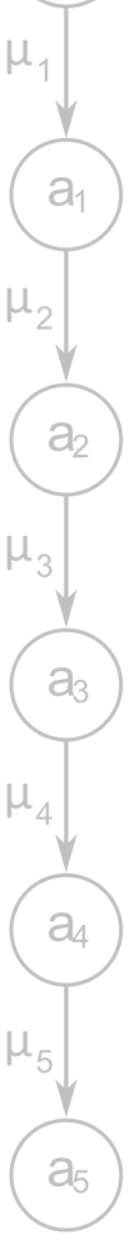
# Dotazování

- Výpis stavů s nadprůměrnou pravděpodobností

```
select i, p[i] from model3
   for i:= 0 to 99 where
   p[i] >=
      (select avg(p[j]) from model3
      for j := 0 to 99 group 1)
```

  - Podmínka vyhodnocována s každou iterací → lépe 2 dotazy
- Vypočtené sloupce

```
select p[0] * 100 as PercentState0
from model4
```




# Děkuji za pozornost

- Příště modelování systémů hromadné obsluhy