Predikátová logika jako prostředek representace znalostí, dokazování vět – rezoluce

Úvod do problematiky

Predikátová logika

- prostředek vnitřní reprezentace dat

„V <u>tom</u> obchodě mají nejvýhodnější ceny.“
KDO to říká – reference ke zboží (jeho typu).
…

SVĚT ⇒ VOLBA JAZYKA REPREZENTACE (KONCEPTUALIZACE)

geocentrická soust. *heliocentrická soust.*

Volba „zrnitosti ~ jemnosti“ reprezentace - musí odpovídat zamýšlenému využití.

Příliš mnoho detailů
(BLOCK WORLD a, b, c
složený z 200 kusů LEGA)

Málo informací
?

JAZYK

1. konstanty ~ konkrétní objekty
2. predikáty ~ relace mezi objekty
3. funkce

OBJEKTY JAZYKA – TERMY

- **nejjednodušší termy**
  - konstanty
  - proměnné

- **složené termy** – aplikace <u>funkcí</u> na termy (zachování arity)

VZTAHY MEZI OBJEKTY – FORMULE

- **atomická formule** – predikát aplikovaný na termy
- **složená formule**
  Nechť α, β jsou formule, pak následující konstrukce jsou formule:
  $\neg\alpha$ $\alpha\&\beta$ $\alpha\vee\beta$ $\alpha\rightarrow\beta$
  $\exists X\alpha$
  $\forall X\beta$
  $\forall X(X>0 \rightarrow \exists Y(Y>0 \;\&\; \forall Z(|Z-a|<Y \rightarrow |f(Z)|<X)))$

Svět kostek

1. <{a, b, c, d, e},{červený, modrý, bílý}>
   unární predikáty
   Zde nelze vyjádřit vlastnosti barev: *veselá, studená, teplá, …*

2. <{a, b, c, d, e, č, m, b},{barva(_)},{ veselá, studená, …}>
   veselá(barva(a)), studená(m), …

ZAVEDENÍ PROMĚNNÝCH A KVANTIFIKACE

- nutné, pokud modelovaný svět je rozsáhlý či dokonce nekonečný.

Pozor na pořadí kvantifikátorů:

$\forall X \ \exists X$ dvoří_se(X, Y)
$\exists X \ \forall X$ dvoří_se(X, Y)

SPOJKY A JEJICH PRECEDENCE

$\neg$
$\wedge$ (&)
$\vee$
$\rightarrow \ \equiv$
nejnižší prec.: $\forall \ \exists$

VOLBA JAZYKA může umožnit „zúžit“ rozsah zapamatovaných informací, např. jistá relace může být definována pomocí jiných

- CLEAR (pomocí ON(_, _)
- ON(_, _) (pomocí CLEAR)

PŘEKLAD Z PŘIROZENÉHO JAZYKA

„Všechny červené houby jsou jedovaté“

$\forall$X(červený (X) & houba (X) $\rightarrow$ jedovatá (X))
$\forall$X(červený (X) $\rightarrow$ (houba (X) $\rightarrow$ jedovatá (X)))

„Houba je jedovatá jen když, je červená.”
„Když houba není červená, není jedovatá.“

$\forall$X((houba (X) & jedovatá (X) $\rightarrow$ červená (X))
$\forall$X((houba (X) $\rightarrow$ (jedovatá (X) $\rightarrow$ červená (X)))

EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY FORMULÍ

$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
$\neg (p \vee q)$	$\neg p \,\&\, \neg q$
$\neg (p \,\&\, q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg\neg p$	p
$(p1 \,\&\, p2) \rightarrow q$	$p1 \rightarrow (p2 \rightarrow q)$
$p \rightarrow (q1 \vee q2)$	$(p \rightarrow q1) \,\&\, (p \rightarrow q2)$

Matematická logika

ČÍM SE MATEMATICKÁ LOGIKA ZABÝVÁ?

- Co lze vyjádřit? JAZYK
- Co lze odvodit? AXIOMY, ODVOZOVACÍ PRAVIDLA
- Co je pravdivé? Platí ve všech modelech (sémantický pojem)

VÝROKOVÁ LOGIKA (POČET)

výrok, <u>pravdivost</u>, tautologie
spojky – charakterizace tabulkou

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA (1. ŘÁDU)

- mluví o objektech, jejich relacích $\rightarrow$ predikáty
- vztah k typům, zobecnění $\forall X\ P(X)$
- význam formule je přesně definován

VÝHODY MATEMATICKÉ LOGIKY:

- různé typy generalizace umožňují zodpovídat velmi komplexní dotazy v prostředí s <u>neúplnou informací</u>
- zaručuje <u>konzistentnost</u> nově odvozených údajů
- má prostředky pro kontrolu „platnosti" předkládaných tvrzení

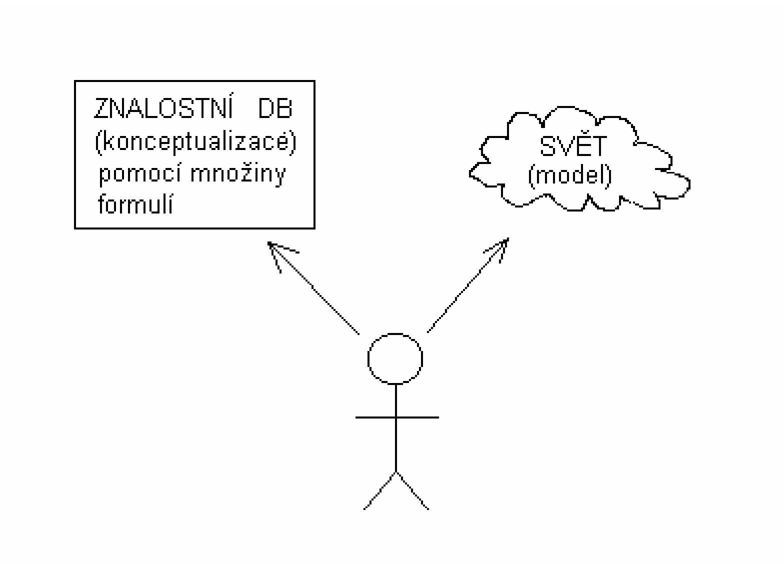
(MATEMATICKÁ) PREDIKÁTOVÁ LOGIKA	
SYNTAX	SÉMANTIKA
Formální úpravy formulí	Různé <u>interpretace</u> výchozího jazyka
Formální systém ▪ **axiomy** ▪ **odvozovací pravidla**	**Model teorie** (konečné množiny speciálních axiomů $\cong$ konceptualizace)

	je interpretace splňující tyto axiomy.
Logický důkaz	**Logický důsledek** teorie – to, co platí ve všech modelech teorie

Existují axiomy a odvozovací pravidla tak, aby ***logický důkaz*** $\Leftrightarrow$ ***logický důsledek****?*

(Korektnost formálního systému)
$\Rightarrow$

(Úplnost formálního systému)
$\Leftarrow$



Tatáž konceptualizace, tj. popis konečnou množinou vět, může mít mnoho různých interpretací:

- interpretace predikáty se liší pro různé osoby, např. být_sympatický (_)
- ohodnocení proměnných v dané interpretaci (různých osob je hodně) umožní definovat <u>splňování v interpretaci</u>

Formule je platná (valid) $\Leftrightarrow$ **splněná v každé interpretaci**: existují obecné axiomy a odvozovací pravidla, pomocí nichž nalezneme právě platné formule?

! Neexistuje metoda, která by zajistila existenci jednoznačné interpretace **!**

Formální systém

- **Axiomy výrokové logiky**

A1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
A2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
A3 $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

Schéma specifikace
A4 $\forall X\alpha \to \alpha[X|t]$
t je substituovatelná za X v α

Schéma kvantifikace implikace
A5 $\forall X\,(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall X\beta)$
$\uparrow$
X není volná v α

- **Odvozovací pravidla**

Modus ponens MP $\dfrac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$

Pravidlo generalizace GEN $\dfrac{\alpha}{\forall X\alpha}$

Důkaz formule ve formálním systému

Značku $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \mapsto \beta$ budeme používat jako zkratku zápisu věty: „Z formulí $\alpha_1,...,\alpha_n$ lze dokázat formuli β "

VĚTA O DEDUKCI Je-li φ uzavřená formule, pak $T,\varphi \mapsto \psi$ právě tehdy když $T \mapsto \varphi \to \psi$

Důkaz:
Indukcí podle délky důkazu formule ψ.

V1: VĚTA O SPORU $\mapsto \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Důkaz vychází z axiomu A1: $\mapsto \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

V2: $\mapsto \neg\neg\varphi \to \varphi$

Důkaz:
(1) V1: $\mapsto \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$
(2) A3: $\mapsto (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$
(3) Věta o dedukci na (1)
$\neg\neg\varphi \mapsto \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$
(4) MP (2), (3)
$\neg\neg\varphi \mapsto \neg\neg\varphi \to \varphi$
(5) MP (4) a předpoklad
$\neg\neg\varphi \mapsto \varphi$
(6) Věta o dedukci na (5)
$\mapsto \neg\neg\varphi \to \varphi$ □

V3: $\mapsto \varphi \to \neg\neg\varphi$

V4: $(\varphi \to \psi) \mapsto (\neg\psi \to \neg\varphi)$
<u>Věta o důkazu rozborem případů</u>:
Je-li $T, \varphi \mapsto \psi$ a $T, \neg\varphi \mapsto \psi$, pak $T \mapsto \psi$

L1: $\varphi \to \psi, \psi \to \rho \mapsto \varphi \to \rho$ (φ, ψ uzavř.)
L2: $\varphi \to \neg\varphi \mapsto \neg\varphi$
L3: $\varphi \to \neg\psi \mapsto \psi \to \neg\varphi$
L4: $\neg\varphi \to \psi \mapsto \neg\psi \to \varphi$
L5: $\neg\forall X \neg\varphi(X) \mapsto \exists X \varphi(X)$
L6: $\varphi(X) \mapsto \varphi(t)$,
kde t je substituovatelná

Důkaz L1: věta o dedukci
Důkaz L2: věta o důkazu rozborem případů
$\varphi, \varphi \to \neg\varphi \mapsto \neg\varphi$ $\quad$ $\neg\varphi, \varphi \to \neg\varphi \mapsto \neg\varphi$
Důkaz L3: V2: $\mapsto \neg\neg\varphi \to \varphi$ a L1
$\varphi \to \neg\psi \mapsto \neg\neg\varphi \to \neg\psi$
$\varphi \to \neg\psi \mapsto \psi \to \neg\varphi$

Predikátová logika je monotónní, tj. když $T \mapsto \varphi$, pak $T \cup R \mapsto \varphi$ také !

V5: Buď φ uzavřená formule, T teorie, $T \mapsto \varphi$ právě tehdy když $T \cup \{\neg\varphi\}$ je sporná.

PŘÍKLAD 1

Když si Anna, Bára a Cyril spolu vyjdou na oběd, objednávají vždy takto:
1. Dá-li si Anna maso, pak má Bára vegetariánské jídlo.
2. Anna nebo Cyril si dají maso, ale ne současně.
3. Bára a Cyril nemají nikdy současně vegetariánský výběr.

Jí někdo z nich vždy maso?

Jazyk

- konstanty a, b , c (osoby)
  m,v (jídlo)
- predikát „p (Osoba, Jídlo)“ „Osoba má objednáno Jídlo“

Dotaz: $\exists X\, p(X,m)$

S1: $p(a,m) \to p(b,v)$
S2a: $p(a,m) \vee p(c,m)$ $\quad$ $\neg p(a,m) \to p(c,m)$
S2b: $\neg(p(a,m) \,\&\, p(c,m))$ $\quad$ $p(a,m) \to \neg p(c,m)$
S3: $\neg(p(b,v) \,\&\, p(c,v))$ $\quad$ $p(b,v) \to \neg p(c,v)$

Implicitní informace: „každý si při jedné návštěvě objedná právě jedno jídlo“

S4a: $p(X,m) \vee p(X,v)$ $\neg p(X,m) \rightarrow p(X,v)$
S4b: $\neg(p(X,m) \& p(X,v))$ $p(X,m) \rightarrow \neg p(X,v)$

$$S1 - S4 \mapsto \exists X p(X, m)$$

Důkaz:

(1) S1: $p(a,m) \rightarrow p(b,v)$
(2) S3: $p(b,v) \rightarrow \neg p(c,v)$
(3) L1: (1), (2) $p(a,m) \rightarrow \neg p(c,v)$
(4) S4a: $\neg p(X,m) \rightarrow p(X,v)$
(5) L6: (4) $\neg p(c,m) \rightarrow p(c,v)$
(6) L4: (5) $\neg p(c,v) \rightarrow p(c,m)$
(7) L1: (3), (6) $p(a,m) \rightarrow p(c,m)$
(8) S2b: $p(a,m) \rightarrow \neg p(c,m)$
(9) L3: (8) $p(c,m) \rightarrow \neg p(a,m)$
(10) L1: (7), (9) $p(a,m) \rightarrow \neg p(a,m)$
(11) L2: (10) $\neg p(a,m)$
(12) S2a $\neg p(a,m) \rightarrow p(c,m)$
(13) MP: (12), (11) $p(c,m)$
(14) Specifikace $\forall X \neg p(X,m) \rightarrow \neg p(c,m)$
(15) L3: (14) $p(c,m) \rightarrow \neg\forall X \neg p(X,m)$
(16) MP: (15), (13)) $\neg\forall X \neg p(X,m)$
(17) L5: (16) $\exists X\, p(X,m)$ □

Odpověď: „Osoba c je ta, která jí vždy maso!“ - viz. (13)

NEVÝHODY ZVOLENÉHO FORMÁLNÍHO SYSTÉMU

Lze postup vytváření důkazu automatizovat?

- Volba použitého axiomu, tvrzení i odvozovacího pravidla silně závisí na intuici. Při pokusu použít úplné prohledávání → kombinatorická exploze.
- Jak využít informaci v dokazovaném tvrzení pro zúžení prohledávaného prostoru?

- Náprava? Minimalizace počtu axiomů a pravidel. To umožní přechod k normální formě formule – klauzule. Prázdná klauzule se značí □.
- Důkaz sporem je víc cílově orientován!

Rezoluční metoda

PRAVIDLO ZÁKLADNÍ REZOLUCE

Základní pojmy

Klauzule – konečná disjunkce literálů.

Formule A je v klauzulární formě, pokud má tvar $\forall(C_1 \& \,..\, \& C_k)$, kde C_i jsou klauzule. Uzavřené instanci formule $C_1 \& \,..\, \& C_k$ říkáme základní instance A.

Jsou-li φ, ψ základní klauzule, tj. klauzule bez proměnných a je-li A atomická formule bez proměnných, pak

$$\frac{A \vee \varphi,\ \neg A \vee \psi}{\varphi \vee \psi}$$ - A a $\neg$A jsou doplňkové literály; - rezolventa

Množina základních klauzulí je sporná $\Leftrightarrow$ lze z ní základní rezolucí odvodit $\square$.

Jak lze přejít od sporné množiny klauzulí ke sporné množině základních klauzulí?

Doporučení pro další zobecnění základní rezoluce:

$$\frac{a(k),\ \neg a(X) \vee b(X)}{b(k)} \qquad \frac{a(Y),\ \neg a(X) \vee b(X)}{b(Y)}$$

UNIFIKACE

Substituce ***s*** se nazývá <u>nejobecnější unifikace</u> pro konečnou množinu výrazů $\{E_i\}_{i \in I}$, když

(i) $E_i(s) = E_j(s)$ pro $i,j \in I$

(ii) Pokud substituce ***u*** má také vlastnost i), pak existuje substituce ***v*** taková, že $E_j(u) = (E_j(s))(v)$ pro libovolné $j \in I$.

Algoritmus unifikace

- nalezne buď nejobecnější unifikaci, nebo odpoví, že unifikace není možná.
- představu o jeho práci dává následující tabulka (práce s jazykem obsahujícím predikáty p,r – první unární, druhý ternární predikát; unární funkci f; binární funkce g, h a konstantu a)

Množina literálů M	Nejobecnější unifikace s	M(s)
{p(X), p(a)}	X|a	{p(a)}
{r(f(X),Y,g(Y,a)),r(f(X),Z,g(X,a))}	Y|X, Z|X	{r(f(X),X,g(X,a))
{r(h(X,g(a,X)),g(a,Y)),r(h(X,Z),Z)}	Z|g(a,X), Y|X	{r(h(X,g(a,X)),g(a,X))}
{r(h(a,X),a),r(g(a,X),a)}	neexistuje	
{r(h(a,X),X),r(Y,g(a,Y))}	neexistuje	

ALGORITMUS UNIFIKACE pro množinu výrazů E

Definice:
Nechť E je množina výrazů. Množina nesouhlasu (disagreement set) pro E vznikne takto:

- Všechny prvky E se současně prohlížejí zleva doprava po znacích až do té chvíle, kdy se začnou lišit. Tato pozice se nazývá pozice nesouhlasu.

- Z každého prvku E se získá ten podterm, který začíná na pozici nesouhlasu – množinu všech takto získaných termů nazveme množinou nesouhlasu.

```
PROCEDURA unifikace(seznam_výrazů)
   mgn ← [ ]
   UNTIL seznam_výrazů má právě 1 prvek REPEAT
        disagreement ← množina nesouhlasu pro seznam_výrazů
        IF ¬[ ∃V,t ∈ disagreement (V je proměnná & t je term & V nemá výskyt v t)]
        THEN RETURN "FAILURE"
        ELSE mgn ← mgn o [V|t]
                 seznam_výrazů ← (seznam_výrazů)[t]
    ENDUNTIL
    RETURN mgn
```

Existuje obdoba normální formy výrokových formulí i v predikátové logice?

ROBINSONOVO REZOLUČNÍ PRAVIDLO

Uvažujme dvě klauzule φ, ψ takové že nemají žádné společné proměnné. Nechť existují <u>neprázdné</u> klauzule φ_1, ψ_1 a klauzule φ_2, ψ_2 takové, že:

- $\varphi_1 \vee \varphi_2 = \varphi$ a $\psi_1 \vee \psi_2 = \psi$
- existuje nejobecnější unifikace s literálů z φ_1 a negací literálů z ψ_1 , pak říkáme, že rodičovské klauzule φ, ψ lze rezolvovat a klauzuli $\varphi_2 s \vee \psi_2 s$ nazýváme jejich rezolventou.

Množina obecně kvantifikovaných formulí je sporná $\Leftrightarrow$ □ je odvoditelná konečným počtem kroků rezolučního pravidla!

<u>Řešení příkladu 1:</u>

K1: $\neg p(a,m) \vee p(b,v)$
K2a: $p(a,m) \vee p(c,m)$
K2b: $\neg p(a,m) \vee \neg p(c,m)$
K3: $\neg p(b,v) \vee \neg p(c,v)$
K4a: $p(X,m) \vee p(X,v)$
K4b: $\neg p(Y,m) \vee \neg p(Y,v)$
Negace dotazu: $\neg \exists Z\ p(Z,m) \cong \forall Z\ \neg p(Z,m)$

$\neg p(Z,m)$ K4a

$p(X,v)$ K3

[X|c]

$\neg p(b,v)$ K1

$\neg p(a,m)$ K2a

$p(c,m)$ $\qquad$ $\neg p(Z,m)$

$\square$

Normální prenexní forma

Prenexní forma

Formule A je v prenexní formě, jestliže má tvar $\square_1 x_1 \ldots \square_n x_n B$, kde

(i) $n \geq 0$ a pro $\forall i \leq n$ je $\square_i$ buď $\forall$ nebo $\exists$

(ii) $x_1, \ldots, x_n$ jsou navzájem různé proměnné

(iii) B je otevřená formule (tj. taková, že z atomických formulí vznikla pouze použitím výrokových spojek)

Např. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (x \neq 0 \rightarrow x.z = y)$ je v prenexní formě

$\forall x\, (x > 0 \rightarrow \exists z\, (z.z = x))$ není v prenexní formě

ROZŠÍŘENÍ TEORIE O FUNKČNÍ SYMBOLY

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ pro $g \in (0,1)$

$$\forall Q \forall Eps \exists k \forall N \left(Eps > 0 \,\&\, 0 < Q < 1 \rightarrow k > 1 \,\&\, \left(N > k \rightarrow \left| q^N \right| < Eps \right) \right)$$

$$\left| q^N \right| < \left| q^k \right| = Eps \qquad\qquad k = \frac{\log Eps}{\log q}$$

$$\forall Q \forall Eps \forall N \left(Eps > 0 \,\&\, 0 < Q < 1 \rightarrow f(Eps, Q) > 1 \,\&\, \left(N > f(Eps, Q) \rightarrow \left| q^N \right| < Eps \right) \right)$$

f se nazývá **Skolemova funkce** pro danou formuli (musí to být nový symbol jazyka).

Nechť A je uzavřená formule jazyka L, která je v prenexním tvaru. **Herbrandův variant** A_H této formule získáme následujícím postupem:

(i) Pokud A neobsahuje žádný $\forall$, pak A_H je A

(ii) Je-li A tvaru $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y B$, pak zavedeme nový funkční symbol f(n-ární). A označíme A^* formuli $\exists x_1 \ldots \exists x_n B_y [f(x_1, \ldots, x_a)]$.

(iii) $A_H = (A^*)_H$. Formule A^* obsahuje méně univ. Kvantifikátorů než A.

Obdobně **Skolemův variant**: nahrazuje funkcemi existenční kvantifikátory!

Skolemův variant formule vznikne postupnou náhradou všech existenčně kvantifikovaných proměnných pomocí Skolemových funkcí.

Věta:
Teorie T, jejíž všechny speciální axiomy jsou Skolemovými varianty speciálních axiomů teorie T, je konzervativní rozšíření T, tj. je-li $T \mapsto \varphi$, pak $T' \mapsto \varphi$ a naopak !

POSTUP PŘEVODU DO PRENEXNÍ NORMÁLNÍ FORMY

1. *Vyloučení zbytečných kvantifikátorů* – vynecháme všechny kvantifikátory $\forall x$ resp. $\exists x$ v podformulích tvaru $\forall x$ B nebo $\exists x$ B, pokud se proměnná x nevyskytuje volně v B.
2. *Přejmenování proměnných* – vyhledáme podformuli tvaru Qx A nejvíc vlevo takovou, že proměnná x se volně vyskytuje v A. Pokud x má ještě další výskyt ve výchozí formuli, nahradíme podformuli Qx A její variantou Qx' A', kde x' je proměnná různá od všech proměnných vyskytujících se v převáděné formuli. Tento proces opakujeme do té doby, až všechny kvantifikátory mají různé proměnné a žádná proměnná není v získané formuli současně volná i vázaná (formule s čistými proměnnými).
3. *Eliminace spojky* $\equiv$ – provede se podle následujícího schématu:
   $$A \leftrightarrow B \ \ldots\ (A\rightarrow B) \,\&\, (B\rightarrow A)$$
4. *Přesun negace dovnitř* - provádíme postupně náhrady podformulí podle schémat
   $\neg (\forall xA) \ldots \exists x\neg A$,
   $\neg (\exists xA) \ldots \forall x\neg A$,
   $\neg (A\rightarrow B) \ldots A\&\neg B$,
   $\neg (A\vee B) \ldots \neg A\&\neg B$,
   $\neg (A\&B) \ldots \neg A\vee\neg B$,
   $\neg (\neg A) \ldots A$
   tak dlouho, až se spojka negace vyskytuje nejvýše bezprostředně před atomickými formulemi.
5. *Přesun kvantifikátorů doleva* – pro B, ve které se nevyskytuje proměnná x, provádíme náhrady podle schémat
   $(Qx\ A)\vee B \ldots Qx\ (A\vee B)$,
   $(Qx\ A)\&B \ldots Qx\ (A\&B)$,
   $(Qx\ A) \rightarrow B \ldots Q'x\ (A\rightarrow B)$,
   $B\rightarrow (Qx\ A) \ldots Qx\ (B\rightarrow A)$,
   Kde Q' je kvantifikátor opačný než Q.

<u>Příklad převodu do prenexní formy</u>:

$$\forall y(\exists xP(x, y) \rightarrow \exists uR(y, u)) \rightarrow \forall xS(x, y)$$
$$\forall y(\exists xP(x, y) \rightarrow \exists uR(y, u)) \rightarrow \forall x_1S(x_1, y)$$
$$\forall y_2(\exists xP(x, y_2) \rightarrow \exists uR(y_2, u)) \rightarrow \forall x_1S(x_1, y)$$
$$\forall x_1(\forall y_2(\exists xP(x, y_2) \rightarrow \exists uR(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$
$$\forall x_1\exists y_2((\exists xP(x, y_2) \rightarrow \exists uR(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$
$$\forall x_1\exists y_2(\forall x(P(x, y_2) \rightarrow \exists uR(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$
$$\forall x_1\exists y_2\exists x((P(x, y_2) \rightarrow \exists uR(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$
$$\forall x_1\exists y_2\exists x(\exists u(P(x, y_2) \rightarrow R(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$
$$\forall x_1\exists y_2\exists x\forall u((P(x, y_2) \rightarrow R(y_2, u)) \rightarrow S(x_1, y))$$

CHURCHOVA VĚTA O NEROZHODNUTELNOSTI

Pro teorii T, která obsahuje prostředky pro práci s <N,+>, neexistuje rozhodovací procedura, tj. algoritmus, který pro libovolnou formuli φ zkončí a vydá odpověď, zda $T \mapsto \varphi$ nebo nikoliv.

Pozn.: Výše uvedená úloha je <u>částečně rozhodnutelná</u> (semidecidable), tj. existuje algoritmus, který se zastaví pro každou dokazatelnou formuli φ. Pro ostatní může pracovat věčně!

Obecně nelze získat nic lepšího, ale z praktického hlediska nás mohou zajímat algoritmy, které se zastaví pro skoro všechny vstupy.

Rezoluční procedura (1965) pracuje s formulemi speciálního tvaru – klauzule je úplná pro důkaz sporu.

Každou formuli predikátové logiky lze převést do tvaru „konjunkce klauzulí“:

1. Převod do prenexní normální formy
2. Odstranění existenčních kvantifikátorů (použitím nových funkčních symbolů – Skolemovy funkce)
3. Otevřené jádro lze převést do & nebo $\vee$ normální formy metodami výrokové logiky, tak aby mělo tvar konjunkce klauzulí.

Jak zajistit nalezení důkazu v konečném čase?

- Hledání dalších heuristik
- Strukturování znalostí

Vyjadřovací omezení predikátové logiky 1. řádu:

- kvalitativní údaje: *dnes je strašně ošklivo*
- neurčitost: *blonďáci často mají modré oči*
- default r. (nemonotónní uvažování): *všichni dospělí umí číst (pokud se nepřesvědčíte o opaku)*
- subjektivní uvažování (belief): *všichni myslí, že o svátcích bude pršet, ale já jsem přesvědčena, že ne*

Pokusy řešit tato omezení – různá rozšíření predikátové logiky.

Nemonotónnost uvažování, např v PROLOGu definice *not* (pomocí „konečného nezdaru“)