Cvičení: ZLOČIN V DOMĚ PANA X

Zadání: V domě pana X byl spáchán zločin. Na místo se dostavila skupina vyšetřovatelů v čele s komisařem kriminální služby, který prohlídkou místa činu a výslechem přítomných osob dospěl k následujícím skutečnostem:

1. Soused pana X řekl, že viděl pana X v obývacím pokoji.
2. Obývací pokoj sousedí s kuchyní.
3. Zločinec vystřelil v kuchyni.
4. Ránu bylo slyšet ve všech okolních místnostech.
5. Pan X, který má dobrý sluch, řekl, že ránu neslyšel.

Závěr (tvrzení): Jestliže soused mluvil pravdu, pak pan X lhal (a naopak).

Výše uvedené poznatky lze zformulovat v podobě následujících výroků:

- A ..... Soused pana X mluvil pravdu.
- B ..... Pan X byl v obývacím pokoji.
- C ..... Pan X byl v blízkosti kuchyně.
- D ..... Pan X slyšel výstřel.
- E ..... Pan X mluvil pravdu.

Formalizací úlohy dospějeme k závěru, že pro důkaz odvozeného tvrzení musíme z implikací

$A \to B,\ B \to C,\ C \to D,\ D \to \neg E$ odvodit teorém $A \to \neg E$. Čili

$$T = \{ A \to B\ ,\ \ B \to C\ ,\ \ C \to D\ ,\ \ D \to \neg E \}\ ,$$

$$T \vdash (A \to \neg E)\ , \quad \text{resp.} \quad T \models (A \to \neg E)\ .$$

Odvození:

1.	$A \to B$	MA 1
2.	$B \to C$	MA 2
3.	$C \to D$	MA 3
4.	$D \to \neg E$	MA 4
5.	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	Axiom (*)
6.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Axiom (**)
7.	$A \to (B \to C)$	dostaneme aplikací MP na $2, 5$
8.	$(A \to B) \to (A \to C)$	dostaneme aplikací MP na $7, 6$
9.	$A \to C$	dostaneme aplikací MP na $1, 8$
10.	$(C \to D) \to (A \to (C \to D))$	Axiom (*)
11.	$(A \to (C \to D)) \to ((A \to C) \to (A \to D))$	Axiom (**)
12.	$A \to (C \to D)$	dostaneme aplikací MP na $3, 10$
13.	$(A \to C) \to (A \to D)$	dostaneme aplikací MP na $12, 11$
14.	$A \to D$	dostaneme aplikací MP na $9, 13$
15.	$(D \to \neg E) \to (A \to (D \to \neg E))$	Axiom (*)
16.	$(A \to (D \to \neg E)) \to ((A \to D) \to (A \to \neg E))$	Axiom (**)
17.	$A \to (D \to \neg E)$	dostaneme aplikací MP na $4, 15$
18.	$(A \to D) \to (A \to \neg E)$	dostaneme aplikací MP na $17, 16$
19.	$A \to \neg E$	dostaneme aplikací MP na $14, 18$