PŘEVOD FORMULÍ PREDIKÁTOVÉHO POČTU 1. ŘÁDU DO KLAUZULÁRNÍHO TVARU

Převod obecné formule F jazyka predikátového počtu prvního řádu, např.

$$(\forall x)\{P(x) \rightarrow \{(\forall y)[P(y) \vee Q(x,y)] \ \wedge \neg (\forall y)[P(y) \rightarrow Q(y,x)]\}\},$$

na *klauzulární tvar* provedeme v deseti krocích:

1. Není-li formule F uzavřená, tj. obsahuje-li volné proměnné, vytvoříme *existenční uzávěr* formule F tak, že všechny volné proměnné kvantifikujeme existenčním kvantifikátorem. Uzávěr F zapíšeme $(\exists x)...(\exists z)\ (F)$, kde symboly $x, ..., z$ reprezentují všechny volné proměnné ve formuli F .

2. Ve formuli F se vyskytující ekvivalence a implikace nahradíme ekvivalentními formulemi (viz přehled ekvivalentních formulí):

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[P(y) \vee Q(x,y)] \ \wedge \neg (\forall y)[\neg P(y) \vee Q(y,x)]\}\}.$$

3. Upravíme formuli tak, aby logické spojky "negace" ($\neg$) se vztahovaly jen na atomy – spojky $\neg$ přemístíme "dovnitř" jednotlivých logických výrazů, závorek atd. Přitom použijeme pravidel

$$\begin{array}{lll} \neg (\exists x)P(x) & \text{je ekvivalentní} & (\forall x)(\neg P(x)) \ , \\ \neg (\forall x)P(x) & \text{je ekvivalentní} & (\exists x)(\neg P(x)) \ . \end{array}$$

   Kde je to možné, využijeme pro další úpravu De Morganova pravidla.

   "Naše" formule tak přejde do tvaru

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[P(y) \vee Q(x,y)] \wedge (\exists y)[P(y) \ \wedge \neg Q(y,x)]\}\}.$$

4. Přejmenujeme kvantifikované proměnné tak, aby se navzájem lišily, aby v rámci platnosti (rozsahu) kvantifikátoru nemohlo dojít k záměně kvantifikovaných proměnných, resp. k víceznačnosti:

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[P(y) \vee Q(x,y)] \wedge (\exists z)[P(z) \ \wedge \neg Q(z,x)]\}\}$$

5. Vyloučíme existenční kvantifikátory. Výraz $(\forall x)(\exists z)\ P(z)$ znamená, že pro každé x existuje z takové, že $P(z)$. Tuto závislost můžeme vyjádřit pomocí tzv. *Skolemovy funkce* $z = f(x)$. Výraz $(\exists z)\ P(z)$ nahradíme Skolemovou funkcí bez argumentů $z = A$, kde A je nějaká individuová konstanta. Tedy místo $(\exists z)\ P(z)$ píšeme $P(A)$.
   "Naše" formule bude mít potom tvar

$$(\forall x)\{\neg P(x) \vee \{(\forall y)[P(y) \vee Q(x,y)] \wedge [P(f(x)) \ \wedge \neg Q(f(x),x)]\}\}.$$

6. Všeobecné (univerzální) kvantifikátory přesuneme na začátek formule, do tzv. *prefixu* formule. Zbytek formule následující za prefixem (za seznamem všeobecných kvantifikátorů) nazýváme *maticí* formule. Takový tvar formule nazýváme *prenexním* tvarem formule, resp. *prenexní normální formou* logické formule:

$$(\forall x)(\forall y)\{\neg P(x) \vee \{[P(y) \vee Q(x,y)] \wedge [P(f(x)) \ \wedge \neg Q(f(x),x)]\}\}$$

7. Všechny proměnné v matici formule jsou všeobecně (univerzálně) kvantifikovány, na pořadí kvantifikátorů nezáleží. Formule je tak splněna pro všechny hodnoty kvantifikovaných proměnných, takže pro jednoduchost zápisu můžeme prefix formule vynechat:

$$\neg P(x) \vee \{[P(y) \vee Q(x,y)] \wedge [P(f(x)) \ \wedge \neg Q(f(x),x)]\}$$

8. Matici formule převedeme na konjunkci klauzulí pomocí ekvivalentních formulí $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \ \Leftrightarrow \ (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$:

$$[\neg P(x) \vee P(y) \vee Q(x,y)] \wedge [\neg P(x) \vee P(f(x))] \wedge [\neg P(x) \vee \neg Q(f(x),x)].$$

9. Výrazy v hranatých závorkách jsou nyní klauzulemi. Konjunkci klauzulí můžeme nahradit množinou klauzulí:

$$\{[\neg P(x) \vee P(y) \vee Q(x,y)], [\neg P(x) \vee P(f(x))], [\neg P(x) \vee \neg Q(f(x),x)]\}.$$

Klauzule dále můžeme vyjádřit také jako množiny literálů, takže dostaneme množinovou formu zápisu klauzulí:

$$\begin{gathered}\{\neg P(x), P(y), Q(x,y)\},\\ \{\neg P(x), P(f(x))\},\\ \{\neg P(x), \neg Q(f(x),x)\}.\end{gathered}$$

10. Proměnné přejmenujeme tak, aby každá proměnná byla obsažena nejvýše v jedné klauzuli. Přitom vycházíme z následujících ekvivalentních formulí
$$(\forall x)[P(x) \ \wedge Q(x)] \ \Leftrightarrow \ [(\forall x)P(x) \ \wedge (\forall y)Q(y)].$$

Dostaneme:

$$\begin{gathered}\{\neg P(x_1), P(y), Q(x_1,y)\},\\ \{\neg P(x_2), P(f(x_2))\},\\ \{\neg P(x_3), \neg Q(f(x_3),x_3)\}.\end{gathered}$$

Tím jsme původní logickou formuli převedli na množinu klauzulí neobsahujících stejné proměnné, zapsaných jako množiny literálů.