R E Z O L U Č N Í   M E T O D A
A DOKAZOVÁNÍ TEORÉMŮ

Základem rezoluční metody je tvrzení:

Jestliže dokazovaný teorém logicky vyplývá z dané teorie T, potom neexistuje model teorie T, v němž by byla pravdivá negace dokazovaného teorému.

Axiomy z teorie T a negace dokazovaného teorému tak musejí vést ke sporu.

1) Rezoluční metoda ve výrokové logice

Výchozí předpoklad:

Aplikace *rezoluční metody* na formule výrokové logiky vyžaduje, aby formule teorie T byly *disjunkcemi literálů*.

Literálem v jazyce výrokové logiky nazveme jen výrokové proměnné nebo jejich negace (srv. s definicí literálu v jazyce predikátové logiky 1. řádu).

Není-li nějaká formule $\mathcal{A}$ z teorie T disjunkcí literálů, upravíme ji na tvar

$$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_\mathrm{n} \quad ,$$

kde $\mathcal{C}_i$ jsou disjunkce literálů, a to tak, že z teorie T vynecháme formuli $\mathcal{A}$ a přidáme disjunkce literálů $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots\, \mathcal{C}_\mathrm{n}$. Nově vzniklou teorii označíme T' a její vytvoření zapíšeme

$$T' \;=\; (T - \{\mathcal{A}\}) \;\cup\; \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots\, \mathcal{C}_\mathrm{n}\} \quad .$$

Každý model teorie T' je také modelem teorie T a naopak. V modelu, v němž je formule $\mathcal{A}$ pravdivá, je pravdivá také formule $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_\mathrm{n}$, a proto musí být v tomto modelu pravdivé i disjunkce literálů $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots\, \mathcal{C}_\mathrm{n}$.

Mějme dány disjunkce literálů ve tvaru

$$A \vee L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n \quad \text{a} \quad \neg A \vee M_1 \vee M_2 \vee ... \vee M_m \ ,$$

kde A, L_i, M_j jsou literály, $L_i \neq M_j$ pro $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Nazveme je *rodičovské* a vyznačují se tím, že obsahují

pár komplementárních literálů A a $\neg A$.

Rezolventa potom vznikne další disjunkcí rodičovských disjunkcí literálů při vynechání páru komplementárních literálů, tj.

$$L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n \vee M_1 \vee M_2 \vee ... \vee M_m \ .$$

Jestliže k teorii T, resp. T', neexistuje žádný model, v němž by negace teorému byla pravdivá, lze postupným opakováním rezoluční metody odvodit prázdnou formuli $\square$, která je identicky nepravdivá a v odvození představuje spor.

2) Rezoluční metoda v predikátové logice 1. řádu

Při použití rezoluční metody v predikátové logice 1. řádu je k nalezení párů komplementárních literálů třeba porovnávat odpovídající si termy a hledat vhodné *substituce* v klauzulích.

Příklad: Literály $P(x, f(A))$ a $\neg P(B, z)$ se stanou komplementárním párem, pokud proměnná x je rovna konstantě B a proměnná z termu $f(A)$.

Vhodná substituce s spočívá v **nahrazení všech výskytů** proměnné x_i termem t_i .

Substituci zapíšeme

$$s \ = \ \{ \, t_1/x_1 \, , \, t_2/x_2, \, \ldots, \, t_n/x_n \, \} \ .$$

Term t_i , kterým substituujeme, nesmí obsahovat proměnnou x_i , kterou nahrazuje. Substituci s provedenou v klauzuli $\mathcal{C}$ označíme symbolem $\mathcal{C}s$.

Pro zjednodušení zápisu (podobně jako v jazyce výrokové logiky) budeme klauzule zapisovat jako množiny literálů. Takže např. klauzuli

$$\mathcal{C} \ = \ L_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n \qquad \text{zapíšeme jako} \qquad \mathcal{C} \ = \ \{ \, L_1, \, L_2, ..., \, L_n \, \} \ .$$

Definice:

Literál L' nazveme **instancí** literálu L, jestliže jej získáme nějakou substitucí s v literálu L. Pak platí $L' = Ls$.

Příklad: Literály $L' = Q(x, A, f(C))$ a $L'' = Q(B, A, f(C))$ jsou instancemi literálu $L = Q(x, A, f(y))$, v němž jsme postupně aplikovali substituce $s_1 = \{C/y\}$ a $s_2 = \{B/x\}$ takové, že platí

$$L' = L\, s_1 \quad \text{a} \quad L'' = L' s_2 = L\, s_1 s_2 \,.$$

Definice:

Instance, která neobsahuje proměnné, se nazývá **základní instance**.

Definice:

Substituce s se nazývá **unifikátor** klauzule $\mathcal{C} = \{ L_1, L_2, ..., L_n \}$, jestliže platí

$$L_1 s = L_2 s = ... = L_n s \quad .$$

Příklad: Substituce $s = \{B/x, A/z, C/y, f(C)/w\}$ je unifikátorem klauzule $\mathcal{C} = \{ Q\,(x, A, f(y)),\ Q\,(B, z, w) \}$. Protože oba literály mají po provedení substituce tvar $Q\,(B, A, f(C))$, stávají se základními instancemi.

Jednodušším unifikátorem je však substituce $g = \{ B/x,\ A/z,\ f(y)/w \}$. Její aplikací získáme instance $Q\,(B, A, f(y))$, které nejsou základní, což z hlediska dalšího postupu může být výhodné (v dalších krocích lze aplikovat další substituce).

Definice:

Unifikátor g klauzule $\mathcal{C}$ se nazývá **nejobecnější unifikátor** této klauzule, jestliže pro libovolný jiný unifikátor s klauzule $\mathcal{C}$ platí, že

$$\mathcal{C}s \ \text{ je instancí klauzule } \ \mathcal{C}g \,.$$

REZOLUČNÍ METODU

v predikátové logice prvního řádu potom lze formulovat:

Nechť

$$\mathcal{C}_1 = \{L_\mathrm{i}\} \text{ a } \mathcal{C}_2 = \{M_\mathrm{j}\}, \; i = 1, 2, ..., n, \; j = 1, 2, ..., m$$

jsou klauzule s navzájem různými proměnnými.

Dále předpokládejme, že $\mathcal{C}_1^{'}$ a $\mathcal{C}_2^{'}$ jsou klauzule takové, že

$$\mathcal{C}_1^{'} = \{L_\mathrm{i}^{'}\} \subseteq \mathcal{C}_1 \;, \quad \mathcal{C}_2^{'} = \{M_\mathrm{j}^{'}\} \subseteq \mathcal{C}_2 \;,$$

a

g je nejobecnější unifikátor klauzule $\mathcal{C}_1^{'} \cup \{\neg M_\mathrm{j}^{'}\}$.

Potom klauzule

$$(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_1^{'})\; g \;\cup\; (\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_2^{'})\; g$$

je **rezolventou** klausulí $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$.