INTERPRETACE FORMULÍ PREDIKÁTOVÉ LOGIKY 1. ŘÁDU

Vyjádření sémantiky formule – přiřazení *významu* výrazům – použijeme *relační strukturu* :

Označíme $\mathcal{M}$ relační strukturu, která je tvořena
- nosičem D ,
- relacemi $R_i^n \subset D^n$,
- operacemi $O_i^n : D^n \rightarrow D$.

Symboly jazyka predikátové logiky prvního řádu interpretujeme takto:

a) Každé individuové konstantě A přiřadíme prvek $A_{\mathcal{M}}$ nosiče D, $A_{\mathcal{M}} \in D$.

b) Každému funkčnímu symbolu f_i přiřadíme operaci O_i stejné četnosti. Termům, které neobsahují proměnné, odpovídají elementy nosiče, které získáme provedením příslušné operace O_i s elementy nosiče přiřazenými podle bodu a).

c) Každému predikátovému symbolu P_i o místnosti k přiřadíme k-ární relaci R_i .

Potom relační strukturu $\mathcal{M} = (D, O, R)$ nazveme **interpretační strukturou**.

Poznámka: Někdy volíme symboly jazyka tak, aby vyjadřovaly určitou standardní interpretaci. Například jako individuové konstanty zavedeme obvyklá jména lidí – $KAREL$, $JOSEF$, ... , jako predikátové konstanty pojmenování vztahů mezi nimi – $BRATR(x, y)$, $SYN(otec, matka, potomek)$ atd.

Pravdivostní hodnoty přiřazujeme při interpretaci formulí takto:

A) Uzavřená atomická formule $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ je *pravdivá v interpretační struktuře* $\mathcal{M}$, jestliže predikátovému symbolu P je přiřazena relace R a prvky nosiče D odpovídající termům $t_1, t_2, ..., t_n$ jsou v relaci R.

   Atomická formule P je *pravdivá v interpretační struktuře* $\mathcal{M}$, jestliže ji v této relační struktuře *všechny* interpretace I splňují. Zapíšeme

$$\mathcal{M} \models P .$$

B) Uzavřená formule, tvořená atomickými formulemi, logickými spojkami a kvantifikátory, má pravdivostní hodnotu určenou pravdivostními hodnotami atomických formulí, interpretací logických spojek podle obecně známých pravidel a interpretací kvantifikátorů.

Kvantifikovaná formule $(\forall\, x)\, P(x)$ znamená *konjunkci* formulí $P(x)$ přes všechna možná přiřazení symbolu x prvkům nosiče D.

Kvantifikovaná formule $(\exists\, x)\, P(x)$ znamená *disjunkci* formulí $P(x)$ přes všechna možná přiřazení symbolu x prvkům nosiče D.

Podobně jako ve výrokové logice platí:

- *Formule* $\mathcal{B}$ *logicky vyplývá z formule* $\mathcal{A}$, když formule $\mathcal{B}$ je pravdivá ve všech interpretačních strukturách, ve kterých je pravdivá formule $\mathcal{A}$.
- Formule $\mathcal{A}$, která je pravdivá v každé interpretační struktuře $\mathcal{M}$, se nazývá *logicky pravdivá (tautologie).*
- Formule $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nazýváme *logicky ekvivalentní*, jestliže $\mathcal{A}$ logicky vyplývá z $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ logicky vyplývá z $\mathcal{A}$.

AXIOMY PREDIKÁTOVÉ LOGIKY 1. ŘÁDU

Platí axiomy výrokové logiky (*) až (***) a dále:

$$(\forall\, x)\, \mathcal{A}(x) \;\rightarrow\; \mathcal{A}(t)\ , \tag{****}$$

když term t neobsahuje proměnné vázané v $\mathcal{A}$,

$$(\forall\, x)\, (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \;\rightarrow\; (\mathcal{A} \rightarrow (\forall\, x)\, \mathcal{B})\ , \tag{*****}$$

když formule $\mathcal{A}$ neobsahuje volnou proměnnou x.

Odvozovacími pravidly jsou:

- *pravidlo modus ponens:* $(\,\mathcal{A} \wedge (\,\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\,)\,) \rightarrow \mathcal{B}$
  ($\mathcal{B}$ vyplývá z $\mathcal{A}$ a z $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$),
- *pravidlo generalizace:* $\mathcal{A} \rightarrow (\forall\, x)\, \mathcal{A}$ ($(\forall\, x)\, \mathcal{A}$ vyplývá z $\mathcal{A}$).

Pravidlo generalizace říká, že jestliže formule $\mathcal{A}$ je pravdivá pro blíže nespecifikovanou proměnnou x, je pravdivá pro každou hodnotu této proměnné.

Definice:

Formule $\mathcal{A}$ predikátové logiky 1. řádu je formálně dokazatelná z axiomů predikátové logiky 1. řádu, jestliže existuje důkaz využívající uvedená dvě odvozovací pravidla.

ODVOZOVÁNÍ V PREDIKÁTOVÉ LOGICE 1. ŘÁDU

Podobně jako v případě výrokové logiky můžeme k axiomům přidat další formule – *mimologické axiomy*. Množinu mimologických axiomů T pak nazveme *teorií* jazyka predikátové logiky 1. řádu.

Dedukcí, tj. použitím odvozovacích pravidel, můžeme z teorie T dokázat další formule. Jestliže formule $\mathcal{A}$ je *formálně dokazatelná z teorie* T (je teorémem v T), píšeme

$$T \vdash \mathcal{A} .$$

Nechť $\mathcal{M}$ je interpretační struktura. Jestliže všechny axiomy teorie T jsou v $\mathcal{M}$ pravdivé, říkáme, že $\mathcal{M}$ je *modelem* teorie T a píšeme

$$\mathcal{M} \models T .$$

Řekneme, že formule $\mathcal{A}$ je *pravdivá v teorii* T, jestliže je pravdivá v každém jejím modelu. Píšeme

$$T \models \mathcal{A} .$$

Lze dokázat (podle Gödela), že formule jazyka predikátové logiky je formálně dokazatelná z teorie T právě tehdy, když je pravdivá v T. Tedy

$$T \vdash \mathcal{A} \quad \text{právě tehdy, když} \quad T \models \mathcal{A} .$$