

Algoritmy a datové struktury

Vyvažované stromy

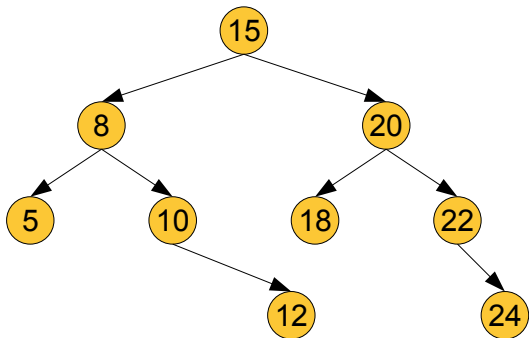
Obsah přednášky

- ▶ BST výhody a nevýhody
- ▶ AVL stromy
- ▶ Červeno-černé stromy

Binární vyhledávací strom

▶ Binární strom s vlastnostmi

- ▶ Uzly obsahují klíče, u kterých lze určit relace $<$, $>$, $=$
- ▶ Klíče uzlů U ležících nalevo od kořene K jsou menší než klíč kořene K
- ▶ Klíče uzlů U ležících napravo od kořene K jsou větší než klíč kořene K

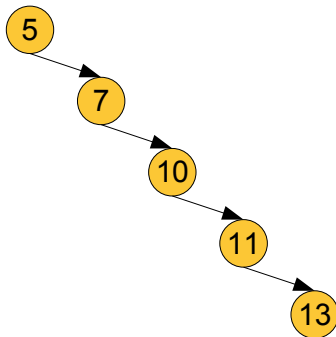


Problémy

- ▶ Co se stane když budou vrcholy vkládány v „nešikovném“ pořadí

Problémy

- ▶ Co se stane když budou vrcholy vkládány v „nešikovném“ pořadí
- ▶ Příklad: 5 7 10 11 13
 - ▶ jaká je složitost vyhledávání?
 - ▶ co se s tím dá vymyslet?

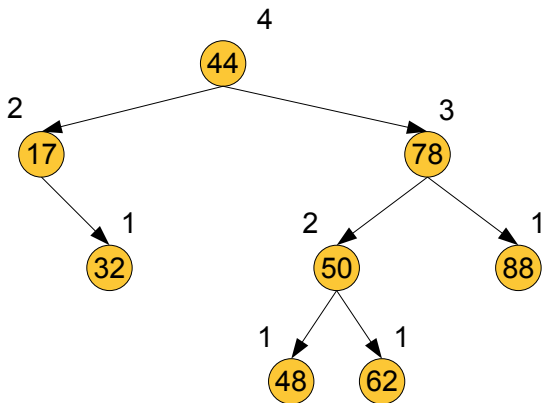


Vyvažování stromu

- ▶ Snažit se zamezit tomu, aby některá z větví byla mnohem delší než ostatní
 - ▶ AVL stromy
 - ▶ red-black stromy
 - ▶ splay stromy
 - ▶ ...
- ▶ Cena vyvažování nesmí být příliš vysoká

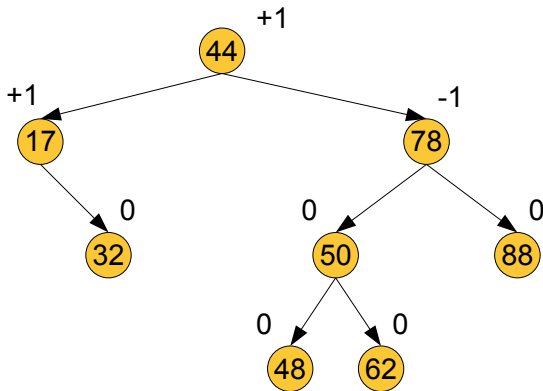
AVL stromy

- ▶ Aby byl strom vyvážený, musí platit:
 - ▶ pro každý uzel stromu se hloubka jeho dětí může lišit maximálně o 1
 - ▶ přestože jde o lokální vlastnost, zajišťuje globální vyváženost



Vyvážení stromu

- ▶ Faktor vyvážení
 - ▶ rozdíl hloubky levého a pravého podstromu



Jak to zajistit?

Jak to zajistit?

- ▶ Úprava operace vložení

Jak to zajistit?

- ▶ Úprava operace vložení
- ▶ Úprava operace mazání

Jak to zajistit?

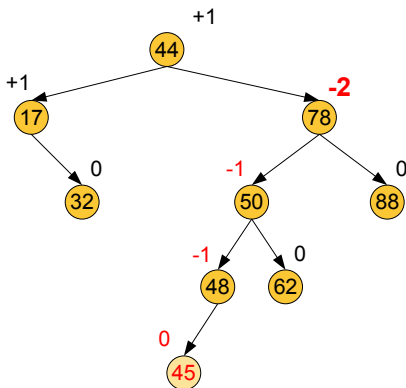
- ▶ Úprava operace vložení
- ▶ Úprava operace mazání
- ▶ Po provedení vložení/mazání nutno zkontrolovat splnění podmínky vyváženosti, v případě nesplnění strom vyvážit

Operace vkládání

- ▶ Operace vložení probíhá standardním způsobem
 - ▶ nalézt vhodné umístění nového uzlu
 - ▶ vložit uzel
- ▶ Pro zajištění vyváženosti
 - ▶ cestou zpět ke kořeni opravovat hloubky uzlů
 - ▶ pokud cestou zpět existuje nevyvážený uzel, musí se provést restrukturalizace stromu operací *rotace*

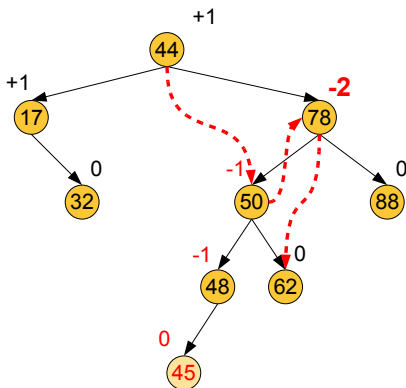
Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ přidání uzlu 45
 - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné



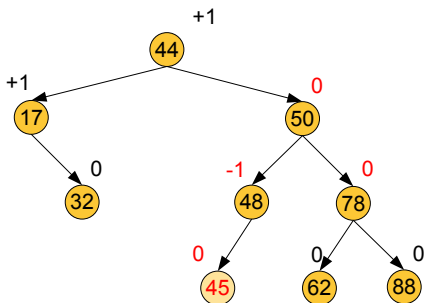
Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ přidání uzlu 45
 - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné
- ▶ provedení rotace
 - ▶ kořen většího podstromu a nevyvážený uzel si prohodí rodinné vztahy



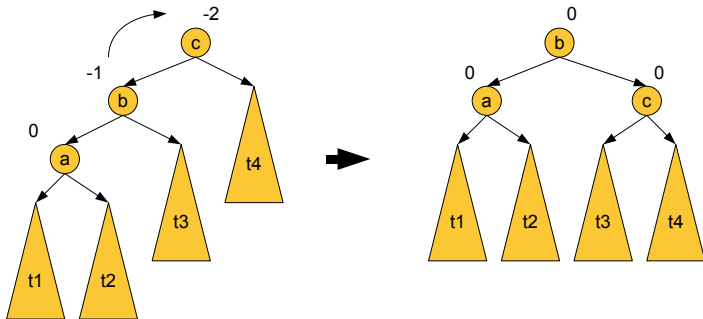
Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ přidání uzlu 45
 - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné
- ▶ provedení rotace
 - ▶ kořen většího podstromu a nevyvážený uzel si prohodí rodinné vztahy
- ▶ přepočítání hloubky stromu



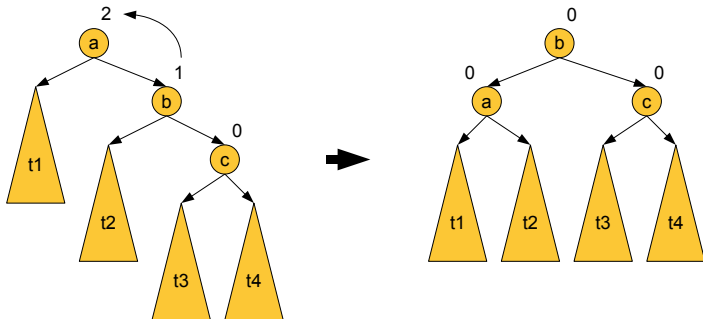
Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ Zobecněný postup
 - ▶ rotace doprava



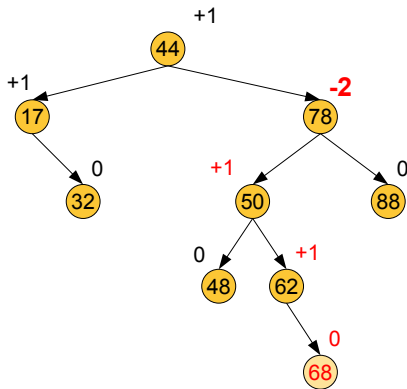
Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ Zobecněný postup
 - ▶ rotace doleva (symetrická)



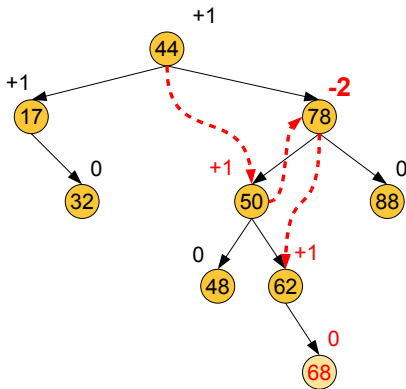
Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
 - ▶ přidání uzlu 68



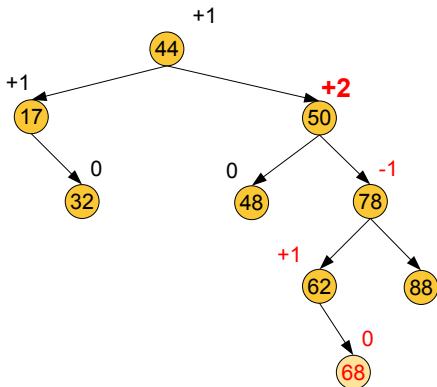
Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
 - ▶ přidání uzlu 68



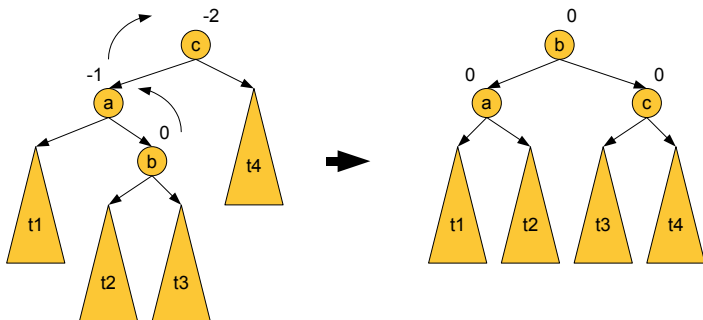
Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
 - ▶ přidání uzlu 68



Operace vkládání – dvojitá rotace

- Zobecněný postup (doleva – doprava)



Operace vkládání – rotace obecně

- ▶ Nalézt první nevyvážený uzel
 - ▶ procházením od listu ke kořenu
 - ▶ vybrat nevyvážený uzel a dva následníky ve směru nejdlejší větve
- ▶ Seřadit nalezené uzly podle velikosti klíče
 - ▶ seřazené uzly označit a, b, c
- ▶ Umístit uzel b na pozici nevyváženého uzlu
 - ▶ upravit vazby mezi uzly tak, aby byly zachovány vlastnosti BST

Operace mazání

- ▶ Probíhá standardním způsobem
 - ▶ vymazat uzel a obnovit BST
- ▶ Cestou zpět ke kořeni kontrolovat vyváženost
 - ▶ pokud je nalezen nevyvážený uzel, provést vyvážení
- ▶ Vyvážení může obecně způsobit další problém
 - ▶ postupně dojít až ke kořenu

AVL stromy – shrnutí

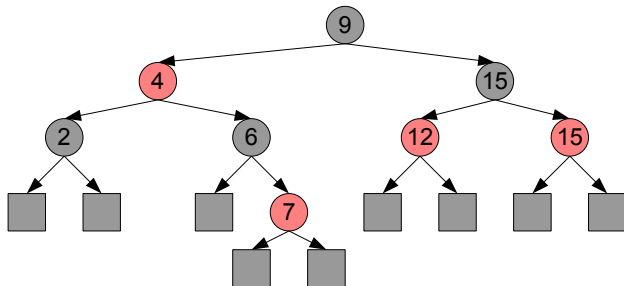
- ▶ Operace vyvážení (jedna) $O(1)$
 - ▶ za předpokladu, že jsou ukazatele na rodiče
- ▶ Operace vyhledání uzlu $O(\log N)$
 - ▶ složitost zajištěna i pro "nepříznivé" případy
- ▶ Operace vkládání $O(\log N)$
 - ▶ vyhledání pozice $O(\log N)$
 - ▶ vyvážení $O(1)$
- ▶ Operace odebrání $O(\log N)$
 - ▶ vyhledání pozice $O(\log N)$
 - ▶ vyvážení $O(\log N)$ pro nejhorší případ

Red-Black stromy

- ▶ AVL stromy jsou příliš omezující
 - ▶ vyvážení stromu je $O(\log N)$
 - ▶ je zajištěno, že rozdíl hloubky dvou podstromů libovolného uzlu je menší než dva
 - ▶ není zaručen poměr největší a nejmenší hloubky
- ▶ Červeno-černé stromy volnější pravidla

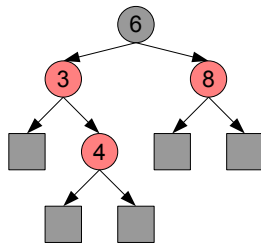
Pravidla

- ▶ Uzly stromu jsou buď černé nebo červené
- ▶ Musí splňovat
 - ▶ kořen je černý
 - ▶ děti červeného uzlu jsou černé
 - ▶ každý list (prázdný prvek) je černý
 - ▶ "černá" hloubka všech listů je stejná



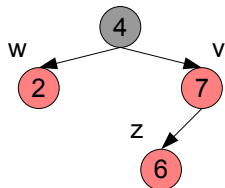
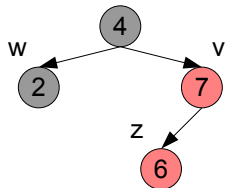
Operace vkládání

- ▶ Nově vkládaný uzel z je červený
 - ▶ pokud to není kořen
 - ▶ jestliže rodič v uzlu z je černý, pak je vše ok
 - ▶ jinak jsou ve stromě dva po sobě následující červené uzly a je třeba strom opravit
- ▶ Příklad
 - ▶ vložení uzlu 4



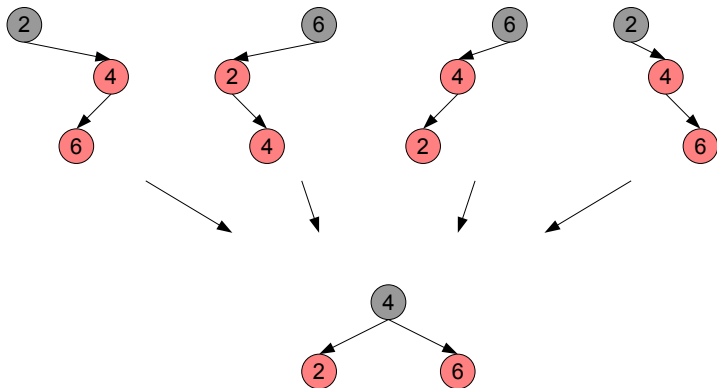
Opravy

- ▶ Označíme uzly
 - ▶ z - vkládaný uzel
 - ▶ v - rodič vkládaného uzlu
 - ▶ w - sourozenec uzlu v
- ▶ Dvě možné situace
 - ▶ w je černý
 - ▶ restrukturalizace stromu
 - ▶ w je červený
 - ▶ přebarvení stromu



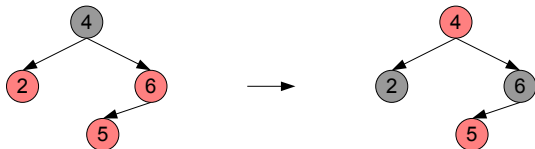
Restrukturalizace

- ▶ Celkem 4 různé situace
 - ▶ společné řešení



Přebarvení

- ▶ Rodič a sourozenec se přebarví na černo
- ▶ Prarodič se přebarví na červeno
 - ▶ pokud to není kořen



Red-Black stromy – shrnutí

- ▶ Nejhorší možná situace
 - ▶ nejmenší hloubka h , největší hloubka $2h$
 - ▶ počet černých uzlů musí být stejný, červené nemohou být dva po sobě
- ▶ Nižší počet operací vyvážení

Konec