KIV/PRO

Cvičení 8

12. 11. 2012

Násobení matic

- Najděte nejúčinnější způsob, jak vynásobit matice M_1, M_2,...,M_n, kde matice M_i má r_{i-1} řádek a r_i sloupců

- Poznámky:
  - Měnit pořadí nelze, není komutativní
  - Sdružovat lze, je asociativní
    - $\Rightarrow$ Vhodné pro DP
  - Výsledné počty operací se mohou dramaticky lišit podle užitých závorek

Příklad

Vynásobte $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_{4,}$ kde

M_1 (10,20), M_2(20,50), M_3(50,1), M_4(1,100)

Násobení $M=M_1x(M_2xM_3xM_4)$ - 125 000 operací

$M=(M_1x(M_2xM_3))xM_4$ - 2200 operací

Exponenciální počet řazení, nutno napřed všechny n-1 násobení, pak n-2, až (n-1)! řazení

Lze pomocí DP v O (n^3)

Řešení přes DP

- Nechť $m_{i,j}$ = min.cena výpočtu M_i x ... x M_j
  - $m_{i,j} = \min_{i \le k < j} (m_{i,k} + m_{k+1,j} + r_{i-1} r_k r_j)$; $i < j$

rozdělit na násobení i..k a k+1..j,
tohle jsou ceny těchto násobení

tohle je cena násobení
těch dvou „kusů“ dohromady
=
počet řádků matice i
x počet sloupců matice k
(a zároveň počet řádků k+1)
x počet sloupců matice j

Matrix multiplication (n, r, m)

for i := 1 **to** n **do** m[i,i] := 0;

for length := 1 **to** n-1 **do**

  for i := 1 **to** n-length **do**

    begin

    j := i + length;

    m[i,j] := min $_{i \le k < j}$ (m [i,k] +m[k+1,j]

      + r[i-1]*r[k] *r[j])

    end

tohle je těžké (i, j jsou od sebe na vzdálenost length a tu měníme odspoda)

počet matic.násobení (tj.součiny kolika matic zkoumáme)

K našemu příkladu...

- Napřed zjistíme, co stojí násobení 2 matic M_1xM_2, M_2xM_3, M_3xM_4

  $m_{1,2} = \min(m_{1,1} + m_{2,2} + r_0r_1r_2)$

  $m_{2,3} = \min(m_{2,2} + m_{3,3} + r_1r_2r_3)$

  $m_{3,4} = \min(m_{3,3} + m_{4,4} + r_2r_3r_4)$

length	i	j	k
1	1	2	1
1	2	3	2
1	3	4	3

0			
-	0		
-	-	0	
-	-	-	0

K našemu příkladu...

- Pak zjistíme, co stojí násobení 3 matic $M_1xM_2xM_3$, $M_2xM_3xM_4$
- $M_1xM_2xM_3$: je lepší cesta přes $M_1x(M_2xM_3)$ nebo $(M_1xM_2)xM_3$)?
  - $m_{1,3} = \min(m_{1,1} + m_{2,3} + r_0r_1r_3, m_{1,2} + m_{3,3} + r_0r_2r_3)$
  - $m_{1,3} = \min(1200, 10500) = 1200$

length	i	j	k
2	1	3	1, 2
2	2	4	2, 3

0	10^4		
-	0	10^3	
-	-	0	$5x10^3$
-	-	-	0

K našemu příkladu...

- Pak zjistíme, co stojí násobení 3 matic $M_1xM_2xM_3$, $M_2xM_3xM_4$
- $M_2xM_3xM_4$: je lepší cesta přes $M_2x(M_3xM_4)$ nebo $(M_2xM_3)xM_4$)?
  - $m_{2,4} = \min(m_{2,2} + m_{3,4} + r_1r_2r_4, m_{2,3} + m_{4,4} + r_1r_3r_4)$
  - $m_{2,4} = \min(5000+100x10^3, 10^3 + 2x10^3) =$
    $= 1200$

length	i	j	k
2	1	3	1, 2
2	2	4	2, 3

0	10^4	1200	
-	0	10^3	
-	-	0	$5x10^3$
-	-	-	0

K našemu příkladu...

- Nakonec zjistíme cenu násobení 4 matic (už víme, jak nejlépe vynásobit dvojice a trojice)
  – $m_{1,4} = \min (m_{1,1} + m_{2,4} + r_0r_1r_4, m_{1,2} + m_{3,4} + r_0r_2r_4, m_{1,3} + m_{4,4} + r_0r_3r_4)$
  – $m_{1,4} = \min (3x10^{3+} 2x10^3, 10^4 + 5x10^3 + 50x10^4, 1200+1000) = 2200$

length	i	j	k
3	1	4	1, 2, 3

0	10^4	1200	
-	0	10^3	$3x10^3$
-	-	0	$5x10^3$
-	-	-	0

K našemu příkladu...

- Nejmenší cena 2200, pokud použiju $m_{1,3}$ a pro získání m_{13} použiju $m_{2,3}$
- Nejvhodnější násobení tedy:

$$M_1 \times (M_2 \times M_3) \times M_4$$

- Kontrola:

M(10,20) x M(20,50) x M(50,1) x
x M(1,100) = M(10,20) x M(20,1) x
x M(1,100) = M(10,1) x M(1,100) =
M(10,100)

1000 + 200 + 1000 = 2200 operací

0	10^4	1200	2200
-	0	10^3	3×10^3
-	-	0	5×10^3
-	-	-	0