Paralelizace výpočtu součtů prefixů

```
for i:=1 to High(Items) do
  Items[i]:=Items[i] + Items[i-1];
```

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$
$$[(a_0), (a_0+a_1), \ldots, (a_0+a_1+\ldots+a_{n-1})]$$

[4, 5, 3, 1, 6]
[4, 9, 12, 13, 19]

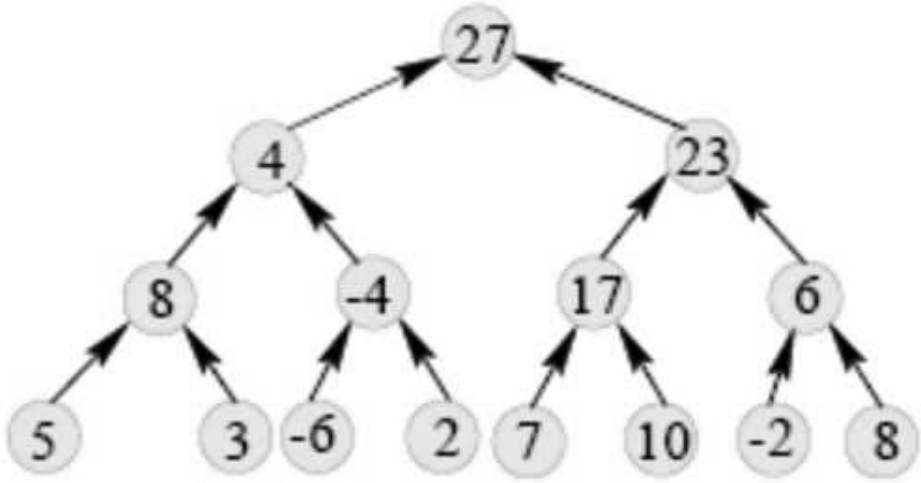
- Princip paralelizace výpočtu součtů prefixů se dá aplikovat i na některé další sekvenční výpočty, např.
  - Třídění
  - Lexikální analýza
  - Histogramy
  - Teorie grafů
  - Práce s řetězci

- I pro výpočet, který na první pohled vypadá jako beznadějně sekvenční, existuje šance, že ho bude možné paralelizovat

- První krok
  - Uspořádaná proměnná nám zabraňuje zapisovat do pole v jiném, než určeném pořadí
  - => zavedeme ještě jednu kopii pole
  - S `i-1` už přistupujeme do jiného pole, do kterého se v cyklu nezapisuje => zrušeno uspořádání

```
Move(Temp, Items, Length(Items));
for i:=1 to High(Items) do
  Items[i]:= Temp[i-1] + Items[i];
  //samozřejmě, že „něco“ chybí k úplnosti
```

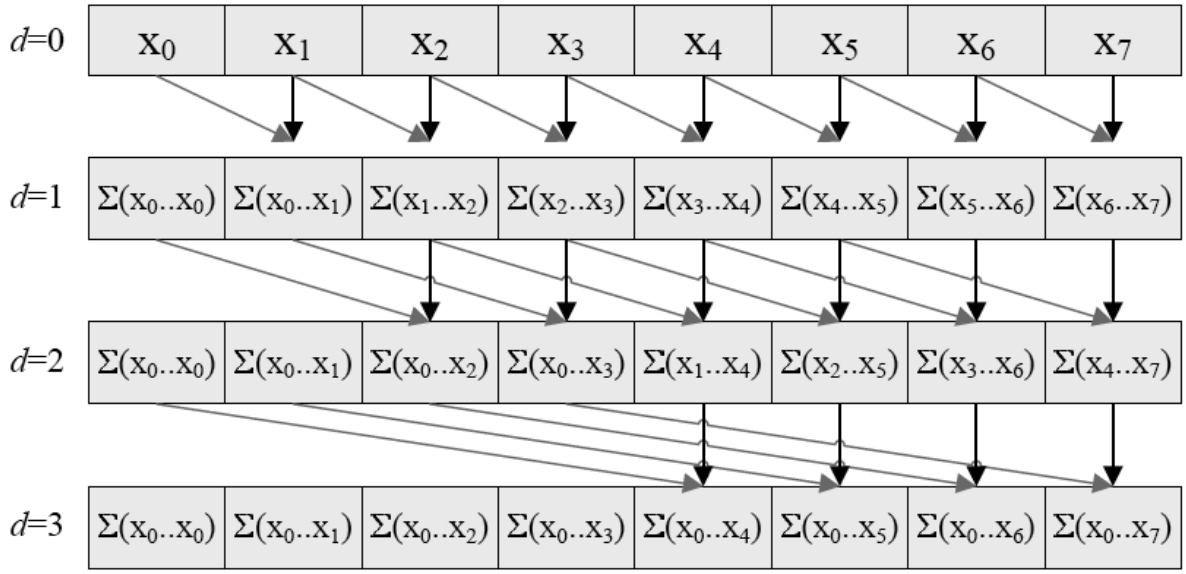
- Krok druhý
  - V sekvenční verzi jsme s každým součtem získali jeden prefix
  - Výpočet n-tého prefixu se skládá z n-1 součtů
  - Protože už jsme se ale zbavili uspořádanosti, můžeme součet n-tého prvku rozložit do jiné posloupnosti součtů než v sekvenční verzi



http://download.informatik.uni-freiburg.de/lectures/AdvancedAlgorithmsDatastructures/2006SS/Slides/thm14%20-%20parallel%20prefix.ppt

  - Pokud bychom měli k dispozici dva procesory, uvedený strom ukazuje, že výpočet posledního prvku můžeme paralelizovat

- Krok třetí
  - Jestliže lze paralelizovat výpočet posledního prvku, pak lze paralelizovat i výpočet ostatních prvků
  - Mezisoučty vznikají postupně v krocích – *d*
  - Významná část mezisoučtů je využita jako mezihodnota dva dalších mezisoučtů



http://beowulf.lcs.mit.edu/18.337/lectslides/scan.pdf

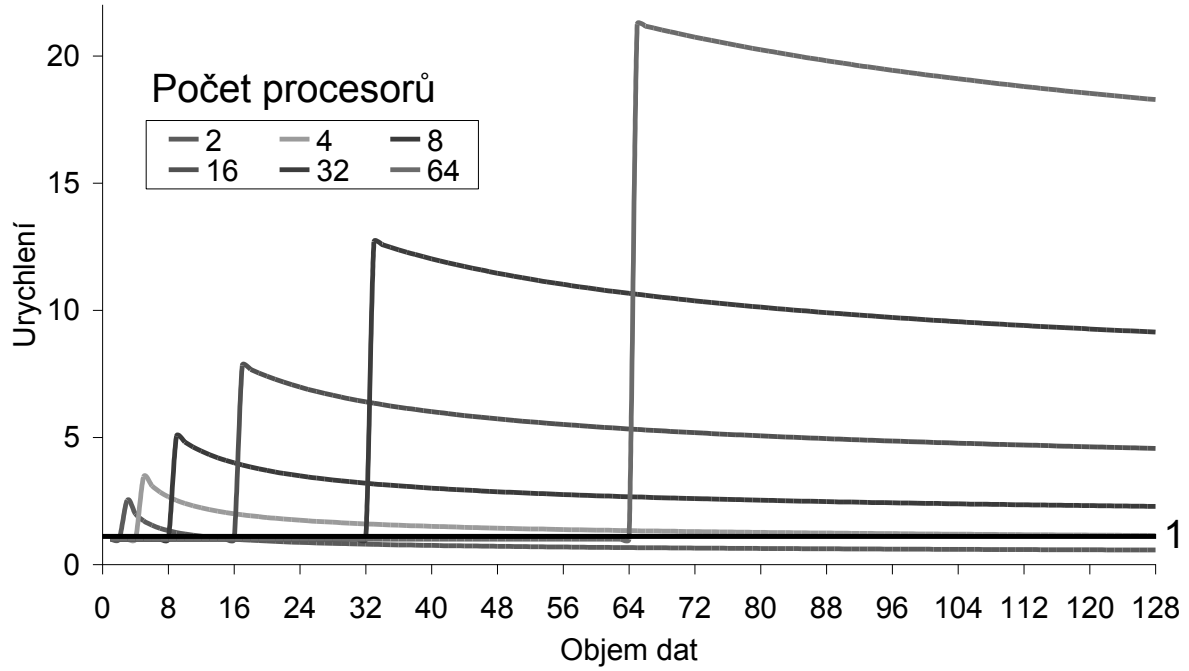
- Čtvrtý krok
  - Programový kód pro jedno vlákno
  - Hranice dat každého vlákna je daná rozmezím `Offset` a `Size`

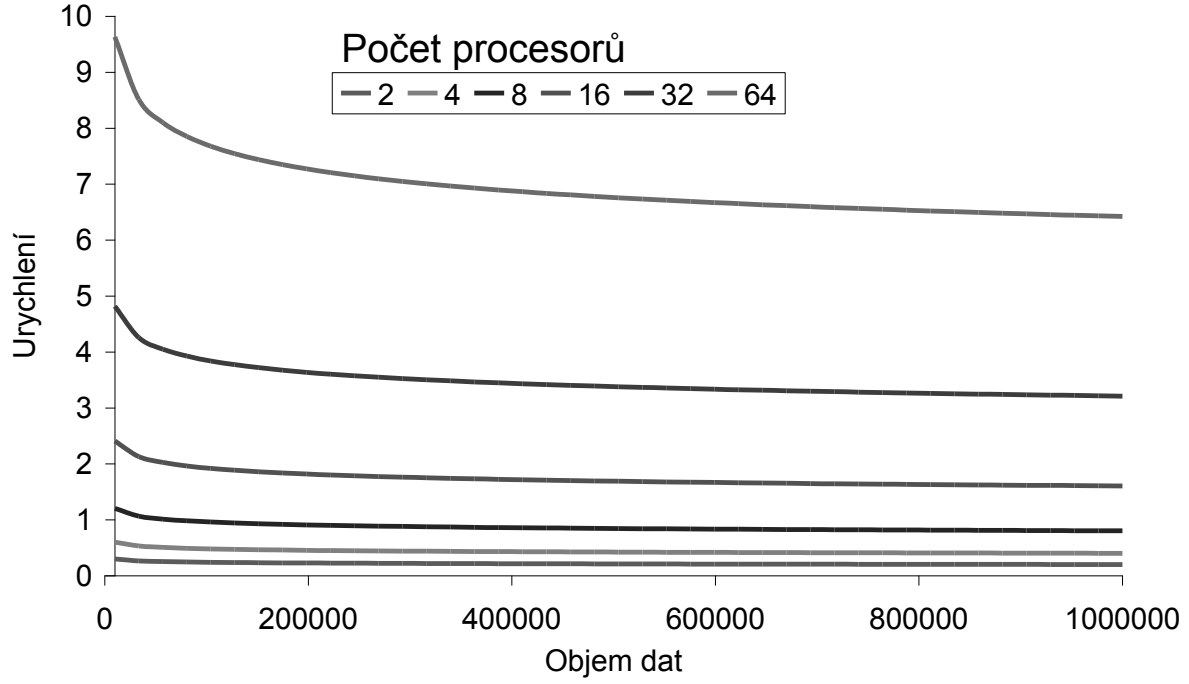
```
step:=1;
while step<High(Items) do
  begin
    Move(Temp^, @Items[Offset], Size);

    Barrier;
    for i:=max(step, Offset) to Offset+Size do
      Items[i]:= Temp[i-step] + Items[i];

    Barrier;
    step:=step shl 1; //*2
  end;
```

  - S rostoucím krokem, **`for`** cyklus u některých vláken nebude probíhat
  - `Step` by mohla být sdílená proměnná, kterou by zapisovalo např. výhradně první vlákno
  - Poslední bariéra v poslední iteraci není třeba

- Uspořádanost
  - Zbavili jsme se původní uspořádanosti
  - Nicméně, původní uspořádanou proměnnou jsme jenom nahradili jinou uspořádanou proměnnou
    - `Step, d`
  - V paralelizované podobě
    - Hlavní cyklus řízený uspořádanou proměnnou má nyní méně iterací
    - V každé iteraci se udělá více práce, kterou už lze paralelizovat
    - V původní verzi byl pouze hlavní cyklus

- Urychlení
  - Sekvenčně $O(n)$
  - Paralelní verze vykonaná pouze jedním vláknem $\sim O(0,5 \bullet n \bullet log_2 n)$
  - Část celého pole hodnot, se kterými se bude počítat, nám "utíká" doprava
    - Další urychlení dynamicky přerozdělit meze, ve kterých jednotlivá vlákna počítají tak, aby všechny počítaly stejný objem práce
  - Paralelizace má smysl tehdy, běží-li všechna vlákna paralelně
    - Každé dvě vlákna, které se střídají o stejný procesor znamenají pouze nárůst instrukcí k vykonání, bez urychlení
  - Splníme-li podmínky vhodné paralelizace, pak s m procesory dostáváme $\sim O((0,5 \bullet n \bullet log_2 n)/m)$
    - Se zanedbanou režií plánovače, nově přidaným kopírováním obsahu paměti – kopie pole, atd.

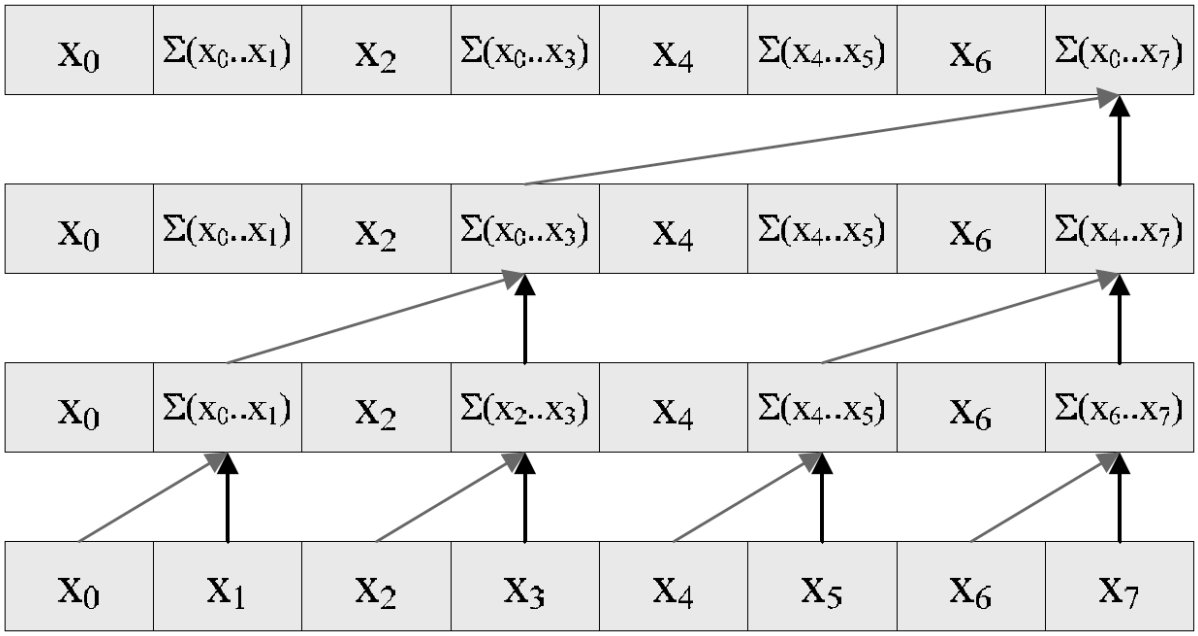




- Algoritmus je evidentně závislý na počtu procesorů a objemu zpracovávaných dat
- Hodí se spíše k HW akceleraci; např. nvidia G80 má limit pole 512, paralelně na ní běží 32 vláken
- Nicméně, podařilo se urychlit původní sekvenční algoritmus alespoň za nějakých podmínek – cena řešení?

- Optimalizace
  - Ve skutečnosti lze provést ještě další úpravu algoritmu, kterou se s paralelní verzí dostaneme na složitost *O(n)*
    - Tj. stejně jako u sekvenční verze, jenomže už ji můžeme spustit paralelně
      - *O(n/m)*
  - Navíc to celé provedeme in-place, stejně jako sekv.

  - Krok první
    - Redukční fáze – od zdola nahoru



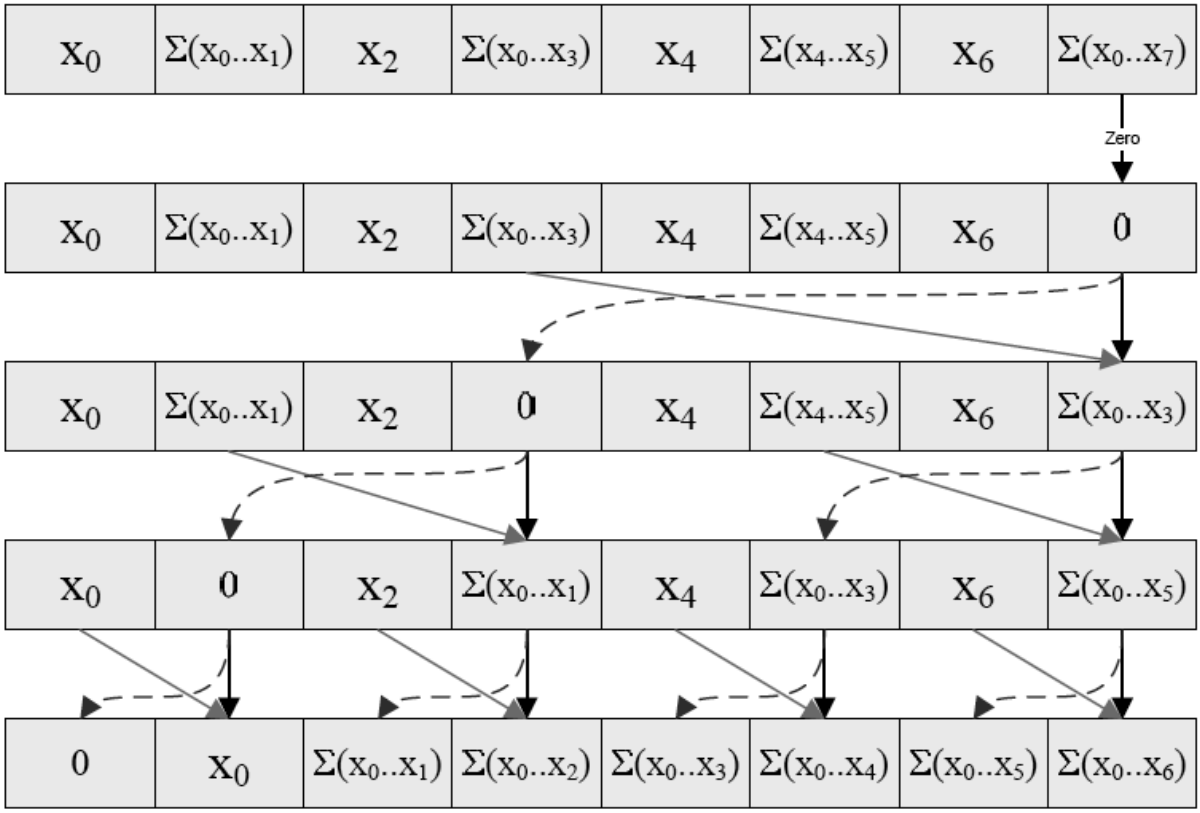
http://beowulf.lcs.mit.edu/18.337/lectslides/scan.pdf

```
d:=1;
while d<High(Items) do
 begin
   for i:=max(d, Offset) to Offset+Size by d do
     Items[i]:= Items[i-d] + Items[i];

   Barrier;
    d:=d shl 1;
 end;
```

- Krok druhý
  - Záloha součtu posledního prvku
  - Vynulování posledního prvku pole
    - I když to ve skutečnosti dělat nemusíme

```
SavedSum:=Items[High(Items)];
Items[High(Items)]:=0;
```

- Krok třetí
  - Fáze smetení (down sweep), od shora dolů



http://beowulf.lcs.mit.edu/18.337/lectslides/scan.pdf

```
d:=d shr 2; //d zůstala jeho hodnota
while d>1 do
 begin
   for i:=max(d, Offset) to Offset+Size by d do
    begin
      temp:=Items[i];
      Items[i]:=Items[i+d];
      Items[i+d]:=Items[i+d]+temp;
    end;
   Barier;
   d:=d shr 1;
 end;
```

- Krok čtvrtý
  - Posunutí všech součtů o jeden doleva
  - Obnovení součtu posledního prvku

```
Temp:=Items[Offset];
for i:=Offset to Offset+Size-1 do
  Items[i]:=Items[i+1];
Barrier;
if Offset>0 then          //kromě prvního úseku
   Items[Offset-1]:=Temp; //zápis do cizích dat
if Offset+Size=High(Items) then //poslední úsek
   Items[Offset+Size]:=SavedSum;
```

- Závěrem o paralelních součtech prefixů – alias „scan“
  - Má dvě varianty
    - Inclusive – první verze
    - Exclusive – nula z optimalizace na začátku, neobsahuje finální součet
  - Podporováno např. v MPI (později) fcí MPI_Scan
  - Nemusí se jenom sčítat
  - Aneb, i některé úlohy s „defaultně“ uspořádanými proměnnými lze paralelizovat – jen vymyslet jak:-)