# Zásobníkové automaty a LL gramatiky

Zásobníkový automat je schopen akceptovat (rozpoznávat) věty tvořené bezkontextovými gramatikami. Je definován uspořádanou sedmicí (K, T, G, d, $q_0$, $z_0$, F), kde

- K je množina vnitřních stavů,
- T vstupní abeceda,
- G abeceda zásobníku,
- d zobrazení K x (T + {e}) x $G^*$ --> S, S je množina konečných podmnožin (K x $G^*$),
- $q_0$ počáteční vnitřní stav automatu.
- $z_0$ počátační obsah zásobníku a
- F je množina koncových stavů.

Konfigurace automatu se dá popsat uspořádanou trojicí (q, w, alfa), kde q je vnitřní stav, w dosud nezpracovaná část vstupu a alfa obsah zásobníku. Na počátku práce je automat v konfiguraci ($q_0$, w, $z_0$).

Zásobníkový automat může akceptovat vstup buď koncovým stavem, nebo stavem zásobníku.

Existují dva základní způsoby analýzy věty - shora dolů a zdola nahoru. Pro analýzu shora dolů potřebujeme zásobníkový automat, kde

- K = {q} (automat má jen jeden vnitřní stav),
- T je shodná s množinou terminálních symbolů rozpoznávané gramatiky,
- G = N+T, tj. v zásobníku se může vyskytnout jakýkoliv symbol rozpoznávané gramatiky,
- d je dáno rozkladovou tabulkou,
- $q_0$ = q, počáteční stav automatu je q, neboť automat jiné stavy nemá,
- $z_0$ = S, tj. na počátku je v zásobníku startovací symbol gramatiky
- F = {}, což se interpretuje jako "automat akceptuje vyprázdněním zásobníku".

Analýza zdola nahoru je obecnější a vyžaduje trochu složitější automat:

- K = {q, r}, stav q je "pracovní", stav r "akceptační",
- T je shodná s množinou terminálních symbolů rozpoznávané gramatiky,
- G je v nejjednodušším případě rovno N+T+{#}, tj. sjednocení symbolů gramatiky a speciálního symbolu "#"; deterministický automat může mít nmožinu G složitější, viz LR gramatiky (cca 12. cvičení),
- d je dáno rozkladovou tabulkou,
- $q_0$ = q,
- $z_0$ = #,
- F = {r}.

### Analýza řetězce metodou shora dolů

Pro příklad si ukážeme akceptaci řetězce "abaaab" automatem řízeným gramatikou

```
S --> aAS     (1)
S --> b       (2)
A --> bA      (3)
A --> a       (4)
```

```
(q, abaaab, S) :-        start
(q, abaaab, aAS) :-      rozklad podle (1), dále jen (1)
(q, baaab, AS) :-        srovnání terminálních symbolů, dále jen srovnání
(q, baaab, bAS) :-       (3), rozkládá se vždy nejlevější symbol
(q, aaab, AS) :-         srovnání
(q, aaab, aS) :-         (4)
(q, aab, S) :-           srovnání
(q, aab, aAS) :-         (1)
(q, ab, AS) :-           srovnání
(q, ab, aS) :-           (4)
(q, b, S) :-             srovnání
(q, b, b) :-             (2)
(q, e, e)                akceptováno
```

### LL gramatiky

LL gramatiky se používají pro analýzu shora dolů. Písmena LL znamenají, že se vstup čte zleva doprava a že se derivace přepisují rovněž zleva doprava (u LR gramatik - viz příklad na analýzu zdola nahoru - se pravidla redukují zprava doleva). Jednoduchá LL gramatika je taková gramatika, kde každá pravá strana začíná terminálním symbolem. Navíc musí platit, že pro pravidla `A --> ...` jsou počáteční terminální symboly různé. Tzv. q-gramatika vypadá podobně jako jednoduchá LL gramatika, ale může navíc obsahovat i e-pravidla. Obecná LL(1) gramatika nemá omezení, ale musí pro ni existovat rozkladová tabulka.

### Příklady

1. Sestavte rozkladovou tabulku a pokuste se akceptovat řetězce "abbab" a "aaa". Gramatika G je dána:

   ```
   S --> aAS    (1)
   S --> b      (2)
   A --> a      (3)
   A --> bSA    (4)
   ```

   ***Řešení:***

| **M** | a | b | e |
|---|---|---|---|
| S | 1 | 2 | |
| A | 3 | 4 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | sr. | | |
| b | | sr. | |
| e | | | akc. |

V horní řadě tabulky je počáteční symbol vstupujícího řetězce (e znamená, že na vstupu nic není). V levém sloupci je symbol na vrcholu zásobníku. Číslo v tabulce odpovídá přepisovacímu pravidlu, sr. znamená srovnání, akc. akceptaci.

V dalších příkladech nebudeme do konfigurace automatu zapisovat vnitřní stav (je jen jeden). Navíc ale budeme zapisovat seznam přepisovacích pravidel, které jsme při rozpoznávání použili.

```
(abbab, S, e) :-         start
(abbab, aAS, 1) :-       na vstupu bylo a, na vrcholu S => použijeme pravidlo 1, dále jen (1)
(bbab, AS, 1) :-         srovnání
(bbab, bSAS, 14) :-      (4)
(bab, SAS, 14) :-        srovnání
(bab, bAS, 142) :-       (2)
(ab, AS, 142) :-         srovnání
(ab, aS, 1423) :-        (3)
(b, S, 1423) :-          srovnání
(b, b, 14232) :-         (2)
(e, e, 14232) :-         srovnání, akceptace
```

Nyní zkusíme řetězec "aaa":

```
(aaa, S, e) :- (aaa, aAS, 1) :- (aa, AS, 1) :- (aa, aS, 13) :- (a, S, 13) :-
(a, aAS, 131) :- (e, AS, 131) :- neakceptováno
```

2. Pro gramatiku G sestavte rozkladovou tabulku a akceptujte řetězec "ddbcccc". G =

```
S --> dSA   (1)
S --> bAc   (2)
A --> dA    (3)
A --> c     (4)
```

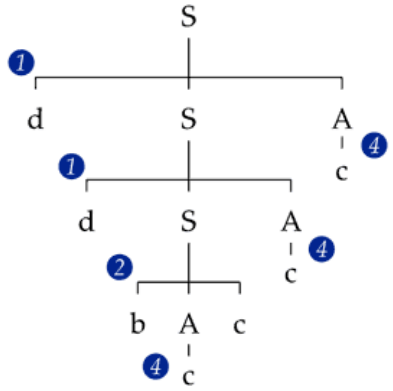
***Řešení:***

| **M** | b | c | d |
|---|---|---|---|
| S | 2 | | 1 |
| A | | 4 | 3 |

V tabulce už jsme nezapsali do levého sloupce terminální symboly, v horní řadě jsme vynechali "e" - tato část je pokaždé stejná a jen zabírá místo. Zápis akceptace také zjednodušíme: bude-li to možné, budeme dva kroky "přepsání neterminálního symbolu" a "srovnání" zapisovat jako jednu činnost.

```
(ddbcccc, S, e) :- (dbcccc, SA, 1) :- (bcccc, SAA, 11) :- (cccc, AcAA, 112) :-
(ccc, cAA, 1124) :- (cc, AA, 1124) :- (c, A, 11244) :- (e, e, 112444) :- akceptace
```

Procházíme-li seznam použitých pravidel zleva doprava, můžeme snadno nakreslit derivační strom:




3. Určete rozkladovou tabulku pro q-gramatiku a akceptujte řetězec "aacbb". G je dána:

```
S --> aAS    (1)
S --> b      (2)
A --> cAS    (3)
A --> e      (4)
```

***Řešení:***

Vyskytne-li se v gramatice e-pravidlo, v našem případě pravidlo 4, nastává problém. Není totiž zřejmé, zda a kdy použít toto pravidlo k přepisu neterminálního symbolu na vrcholu zásobníku. Je-li na vrcholu symbol "A" a na vstupu symbol "c", použijeme zřejmě přepsání podle (3). Můžeme použít (4) v případě, že je na vstupu "a" nebo "b"? Odpověď je kladná, může-li za symbolem A symbol "a" nebo "b" následovat. K tomu se hodí funkce follow, která je definovaná takto:

```
follow(Q) = {c: S -->* alfa Q beta, beta -> c gama,
             kde c je terminální symbol, S startovací symbol
             a alfa, beta, gama řetězce z terminálních i neterminálních symbolů} +
            {e: S -->* alfa Q}
```

Lidově řečeno jsou to ty terminální symboly, které se mohou za daným neterminálním symbolem vyskytnout. Dá-li se startovací symbol přepsat na větu, ve které je daný neterminální symbol až na konci, patří do množiny follow i prázdný řetězec.

Na výpočet funkce follow existují tři postupy:

- kouknu a vidím,
- rekurzivní sestup, který je formalizací "kouknu a vidím" a
- "algoritmus s tečkou", který se dobře implementuje a který si ukážeme později.

Nás bude zajímat follow(A). První metodou snadno zjistíme, že follow(A) = {a, b}. Rozkladová tabulka je tedy:

| **M** | a | b | c |
|---|---|---|---|
| S | 1 | 2 | |
| A | 4 | 4 | 3 |

Zkusíme něco akceptovat:

```
(aacbb, S, e) :- (acbb, AS, 1) :- (acbb, S, 14) :- (cbb, AS, 141) :- (bb, ASS, 1413) :-
(bb, SS, 14134) :- (b, S, 141342) :- (e, e, 1413422) :- akceptace
```

4. Určete rozkladovou tabulku pro q-gramatiku a akceptujte řetězce "acaa" a "a". G je dána:

```
S --> aA     (1)
S --> b      (2)
A --> cSa    (3)
A --> e      (4)
```

***Řešení:***

follow(A) = {e, a}, rozkladová tabulka je proto:

| **M** | a | b | c | e |
|---|---|---|---|---|
| S | 1 | 2 | | |
| A | 4 | | 3 | 4 |

První řetězec:

```
(acaa, S, e) :- (caa, A, 1) :- (aa, Sa, 13) :- (a, Aa, 131) :- (a, a, 1314) :-
(e, e, 1314) :- akceptace
```

Na druhém řetězci si ukážeme, proč jsme museli do rozkladové tabulky dolpnit sloupec pro "e", resp. proč follow(A) obsahuje "e":

```
(a, S, e) :- (a, aA, 1) :- (e, A, 1) :- (e, e, 14) :- akceptace
```

Kdybychom neměli v rozkladové tabulce zmíněný sloupec, nikdy bychom se z konfigurace (e, A, 1) nedostali!

5. Vytvořte rozkladovou tabulku a akceptujte větu "a+a". G(N, T, P, E) je dána:

```
E  --> TE'     (1)
E' --> +TE'    (2)
E' --> e       (3)
T  --> FT'     (4)
T' --> *FT'    (5)
T' --> e       (6)
F  --> (E)     (7)
F  --> a       (8)
```

***Řešení:***

G je obecná LL gramatika - není jednoduchá ani q-gramatika, ale rozkladová tabulka existuje. Pro její vytvoření potřebujeme znát první terminální symbol každé pravé strany. K tomu slouží funkce first(alfa):

```
first(TE')  = {a, (}
first(FT')  = {a, (}
first(+TE') = {+}
first(*FT') = {*}
first{(E)}  = {(}
first(a}    = {a}
```

Výpočet funkce first se dá opět dělat metodou "kouknu a vidím", rekurzivním algoritmem nebo "algoritmem s tečkou". Prozatím se spokojíme s první metodou.

V gramatice jsou dvě e-pravidla, budeme tedy potřebovat i funkci follow:

```
follow(E')  = {e, )}
follow(T')  = {e, ), +}
```

Sestavit rozkladovu tabulku je nyní prosté:

| **M** | a | + | * | ( | ) | e |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E | 1 | | | 1 | | |
| | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E' | | 2 | | | 3 | 3 |
| T | 4 | | | 4 | | |
| T' | | 6 | 5 | | 6 | 6 |
| F | 8 | | | 7 | | |

Zkusíme akceptovat "a+a":

```
(a+a, E, e) :- (a+a, TE', 1) :- (a+a, FT'E', 14) :- (a+a, aT'E', 148) :-
(+a, T'E', 148) :- (+a, E', 1486) :- (a, TE', 14862) :- (a, FT'E', 148624) :-
(e, T'E', 1486248) :- (e, E', 14862486) :- (e, e, 148624863) :- akceptace
```

Zkusíme si vypočítat funkci first pomocí nerekurzivního algoritmu:

**Algoritmus výpočtu first(alfa)**

Zjišťujeme, jakým terminálním symbolem začíná řetězec alfa=$X_1X_2...X_n$

**Krok 1a:**

Položíme množinu F={.$X_1X_2...X_n$}

**Krok 1b:**

Je-li v F pravidlo `B --> beta . A gama`, přidáme do F pravidla `A --> . delta`
Tento krok provádíme tak dlouho, dokud to jde.

**Krok 1c:**

Je-li v F pravidlo `B --> delta .`, dáme do F pravidla z F, ve kterých se vyskytovaly symboly `.B`, ale tečku umístíme až za `B`

**Krok 1d:**

Kroky b a c se opakují tak dlouho, dokud lze do F přidávat.

**Krok 2:**

first(alfa) = { všechny terminální symboly z F, které jsou bezprostředně za tečkou } + {e: je-li tečka na konci pravidla }

Zkusíme si spočítat např. first(E):

```
F = { .E                krok 1a; množina F a neterminální symbol F nemají nic společného,
                        je to jen shoda jmen
      E --> .TE'
      T --> .FT'
      F --> .(E)
      F --> .a          předchozí čtyři pravidla se přidala na základě kroku 1b
    }
first(E) = {a, (}       krok 2
```

6. Vypočtěte follow(A) v gramatice G:

```
S --> aSAb
S --> AB
A --> Bb
A --> aA
B --> bB
B --> e
```

***Řešení:***

**Algoritmus výpočtu follow(A)**

**Krok 1:**

Položíme $N_e$ rovno množině všech prvků, které se dají přepsat (i rekurzivně) na prázdný řetězec.

**Krok 2a:**

F = { `A --> A.` }, do F umístíme fiktivní pravidlo, z kterého vyjdeme.

**Krok 2b:**

Je-li v F pravidlo `B --> gama .`, kde `gama` je neprázdný řetězec, dáme do F všechna pravidla, ve kterých je na pravé straně `B` a tečku umístíme za `B`. V podstatě budeme dále určovat first(řetězec, který následuje za B).

**Krok 2c:**

Je-li v F pravidlo `C --> alfa . B beta`, přidáme do F všechna pravidla s `B` na levé straně, tečku umístíme na začátek.

**Krok 2d:**

Je-li v F pravidlo, kde je za tečkou neterminální symbol, který patří do $N_e$, do F vložíme toto pravidlo ještě jednou, ale tečku posuneme o jeden symbol doprava.

**Krok 2e:**

Kroky 2b, 2c, 2d opakujeme, dokud do F můžeme přidávat další položky.

**Krok 3:**

Do follow(A) dáme všechny terminální symboly, před kterými je tečka. Je-li v F pravidlo `S --> alfa .`, kde `S` je startovací symbol, přidáme do follow(A) i symbol "e".

Aplikujeme algoritmus na výpočet follow(A):

```
Ne = {B}

-----

F = { A --> A.            krok 2a

      S --> aSA.b
      S --> A.B           krok 2b (A je na pravé straně)
      A --> aA.

      B --> .bB           krok 2c
      B --> .             (plyne z S --> A.B)

      S --> AB.           krok 2d (plyne z S --> A.B)

      S --> aS.Ab         krok 2b (plyne z S --> AB.)

      A --> .Bb           krok 2c
      A --> .aA           (plyne z S --> aS.Ab)

      A --> B.b           krok 2d (plyne z A --> .Bb)
    }

-----

follow(A) = {e, a, b}    (e proto, že je v F pravidlo S --> AB.)
```

7. Sestavte rozkladovou tabulku a akceptujte řetězec "[ [ [ ] ] [ ] ]" pro G:

```
S --> [S]S    (1)
S --> e       (2)
```

***Řešení:***

Je zřejmé, že follow(S) = {e, ]}. Proto bude rozkladová tabulka:

| **M** | [ | ] | e |
|---|---|---|---|
| **S** | 1 | 2 | 2 |

Akceptujeme řetězec:

```
([[[]][]], S, e) :- ([[]][]], S]S, 1) :- ([]][]], S]S]S, 11) :- (]][]], S]S]S]S, 111) :-
(]][]], ]S]S]S, 1112) :- (][]], S]S]S, 1112) :- ([]], S]S]S, 11122) :- ([]], S]S, 11122) :-
(]], S]S]S, 111221) :- (]], ]S]S, 1112212) :- (], S]S, 1112212) :- (], ]S, 11122122) :-
(e, S, 11122122) :- (e, e, 111221222) :- akceptace
```

8. Vytvořte LL(1) gramatiku, která akceptuje výraz $1^n a 0^n$, kde n je celé číslo. Vytvořte rozkladovou tabulku a akceptujte "11a00".

***Řešení:***

```
S --> a      (1)
S --> 1S0    (2)
```

Rozkladová tabulka:

| **M** | 0 | 1 | a |
|---|---|---|---|
| **S** |  | 2 | 1 |

Akceptujeme řetězec:

```
(11a00, S, e) :- (1a00, S0, 2) :- (a00, S00, 22) :- (00, 00, 221) :- akceptace
```

## Domácí úkol:

Pro danou gramatiku zjistěte, zda je LL(1) a (protože skutečně je) sestavte rozkladovou tabulku. Pro ověření, zda to funguje, zkuste akceptovat řetězec "xdbbcabbcddd". Příklad je docela zapeklitý a zabere vám asi 20 minut. Mělo by to vyjít asi takhle: 138???137??52 (nemůžu prozradit celé řešení, ale je to lepší než nic). Vezměte si větší papír, na A5 se to skoro nevejde :)

```
S --> AbB     (1)
S --> d       (2)
A --> CAb     (3)
A --> B       (4)
B --> cSd     (5)
B --> e       (6)
C --> a       (7)
C --> xd      (8)
```