1) ELEKTRICKÉ POLE BODOVÝCH NÁBOJŮ VE VAKUU

elektrický náboj (jednotka 1 Coulomb)

1) neexistuje sám o sobě, vždy spojen s hmotným bodem
2) je nezničitelný (platí zákon zachování náboje)
3) je násobkem elementárního náboje $e = 1{,}602 \cdot 10^{-9}$ (tzv. kvantování náboje)
4) nemění se (invariantnost náboje)
5) účinky více nábojů se sčítají (princip superpozice)
6) silové účinky el. náboje popisuje Coulombův zákon

Coulombův zákon – bodový náboj vel. Q, umístěný ve vakuu v poč. soustavy souřadnic, působí na druhý bodový náboj velikosti q, který je v místě $\vec{r}$, síla: $\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{r}_0}$, ε_0 – permitivita vakua

$\vec{r}_0$ – jedn. vektor průvodiče

... po dosazení jedn. vektoru:

CZ: $\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^3} \cdot \vec{r}}$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ F/m$

– náboj Q vytváří ve svém okolí elstat. pole, které je centrálním silovým polem

$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$ [V/m] intenzita elektrického pole

→ udává sílu působící v tomto poli na jednotkový zkušební náboj

... dosazením z CZ pro Q v obecné poloze $\vec{r}_1$:

$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_1)}$ intenzita el. pole bod. náboje Q

Práce ~~vnější~~ vnější síly v silovém poli $\boxed{A = \int -F\, d\vec{r}}$ – protože toto silové pole působí na zkušební náboj silou $\vec{F}$, my musíme působit na těleso silou stejně velikou a opačně orientovanou $-\vec{F}$

- schopnost náboje vykonat práci, spojená s jeho polohou se nazývá potenciální energie

- silové pole s takovou vlastností, jenž umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce se nazývá konzervativní silové pole
- obě centrální silová pole (elektrostatické i gravitační) jsou konzervativní

Elektrostatická potenciální energie

$$W_p(\vec{r}, \vec{r_1}) = A = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(obecný tvar)}$$

↳ práce, kterou vykoná elstat. pole při pohybu náboje q z daného místa $\vec{r}$ do ~~vzdál~~ vzdáleného místa r_1 (a naopak)

$$W_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \boxed{\text{speciální tvar pro } \vec{r_1} \to \infty}$$

↳ práce, kt. vykoná elstat. pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa $\vec{r}$ do nekonečna (a opačně)

$$A = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = W_p(\vec{r_2}) - W_p(\vec{r_1})$$

↳ práce potřebná pro přemístění náboje q mezi dvěma místy v silovém poli je rovna rozdílu potenciálních energií mezi těmito dvěma místy

Elektrostatický potenciál

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{q} \; [V]$$ - je to potenciální en. (zkušebního) jednot. náboje ⇒ tedy práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo

1

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

vyjádření potenciálu jako práce intenzity pole

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q}\cdot\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

potenciál bodového náboje

elektrické napětí mezi místy 1 a 2

↳ fyzikální veličina, která se definuje jako úbytek potenciálu

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

↳ el. napětí mezi místy 1 a 2 je rovno práci, kterou vykoná el. pole při přesunu jednotkového náboje z místa 1 do místa 2

② VLASTNOSTI KONZERVATIVNÍHO POLE

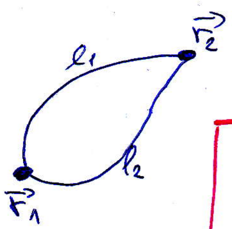
- existence potenciálu je ekvivalentní konzervativnosti pole (tj. když existuje potenciální fn. – pak je pole konzervativní)

$\boxed{d\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{r}}$ diferenciální přírůstek potenciálu

$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$ vztah intenzity a potenciálního pole $\quad \operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \nabla\varphi$

operátor nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$

- gradient φ určuje směr největšího růstu funkce φ – tj. kolmice k jejím ekvipotenciálním plochám

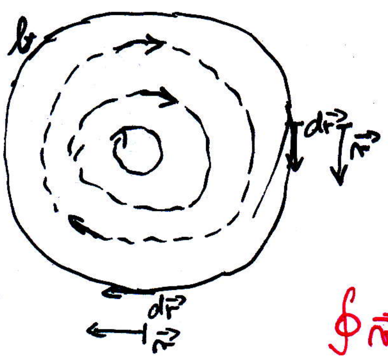


- křivky l_1, l_2 jsou libovolné – proto i l je libovolná ($l = l_1 + l_2$)

$$\boxed{\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0}$$ nevírovost el. pole

- nevírovost pochází z termodynamiky, kde se v poli rychlostí $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ často zkoumá hodnota integrálu, tzv. cirkulace vektoru rychlosti po uzavřené křivce l.

VÍROVÉ POLE

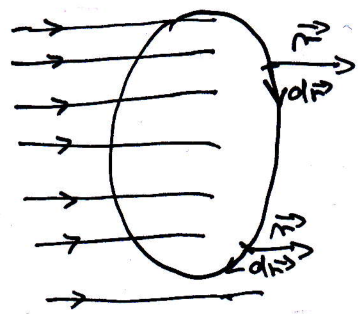


$\vec{v}\cdot d\vec{r} > 0$

$$\oint_l \vec{v}\cdot d\vec{r} > 0$$

$\vec{v}\cdot d\vec{r} > 0$

NEVÍROVÉ POLE



$\vec{v}\cdot d\vec{r} > 0$

$\vec{v}\cdot d\vec{r} < 0$

$$\oint_l \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$$

Stokesova věta – často se používá pro úprava integrálů typu „cirkulace vektora"

Nechť S je spojitá plocha ohraničená spojitou uzavřenou křivkou l, pak pro libovolnou spoj. vektorovou fci polohy $[\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = (A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z))]$

platí: $\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$

$d\vec{S}$ = orientovaný vektor plochy

$\mathrm{rot}\vec{A}$ = matem. operátor rotace vektora $\vec{A}$

$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}}{S}}$$

plošná hustota cirkulace

operátor rotace:

- vektor ~~...~~ $\mathrm{rot}\vec{A}$ má směr normály k ploše, kolem které je maximální cirkulace vektoru $\vec{A}$
- a jeho velikost je pak rovná plošné hustotě cirkulace vektora $\vec{A}$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = 0}$$

nevírovost elstat. pole – diferenciální tvar

ZÁVĚREM: Konzervativnost je základní vlastností silového pole (umožňuje uchování vykonané práce ve formě potenciální energie hm. objektů)

el. pole je konzervativní $\Leftrightarrow$ $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \text{konst.}$

$\Updownarrow$ $\quad\quad$ $\Updownarrow$

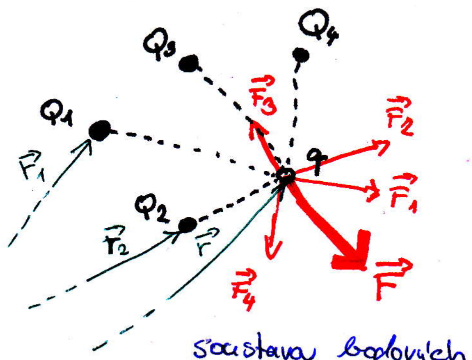
existuje potenciál φ $\quad\quad$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

$\Updownarrow$ $\quad\quad$ $\Updownarrow$

$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ $\quad\quad$ $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$

ekvivalentní vztahy konzervativnosti elstat. pole

3 ZOBECNĚNÍ COULOMBOVA ZÁKONA



soustava bodových nábojů

- podle principu superpozice se síly působící na zkušební náboj q sčítají:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = \vec F = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 + \dots + \vec F_N$$

- ~~vynásobíme~~ vydělíme nábojem q a dostaneme hned analog. vztah pro celkovou el. intenzitu: $\vec E = \vec E_1 + \vec E_2 + \dots \vec E_N = \sum_{i=1}^{N} \vec E_i$

$$\vec E = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec r - \vec r_i|^3} \cdot (\vec r - \vec r_i)$$ intenzita el. pole soustavy bodových nábojů

$$\varphi = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec r - \vec r_i|}$$ potenciál el. pole soustavy bodových nábojů

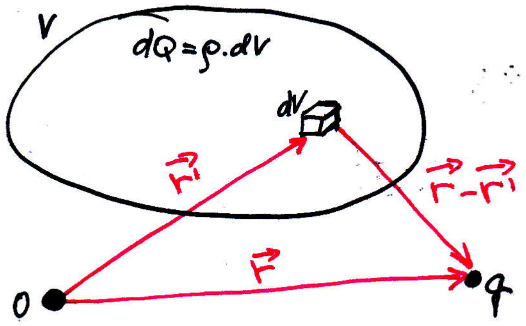
- v elektrotechnice bodové náboje zřídka ⇒ většinou (kvazi)spojitě rozložené náboje

a) objemově rozložené náboje

$$\boxed{\rho = \frac{dQ}{dV}}$$ objemová hustota náboje je (číselně) elektrický náboj obsažený v jednotce objemu

$$\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\rho V}{|\vec r - \vec r'|^3} \cdot (\vec r - \vec r')$$ intenzita el. pole objemově rozložených nábojů

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint_V \frac{\rho V}{|\vec r - \vec r'|}$$ potenciál el. pole objemově rozložených nábojů



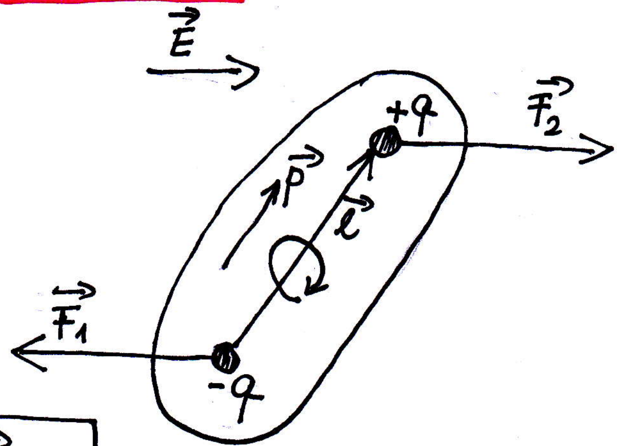
③ 1) Translaci tělesa určuje výsledná vnější síla

$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$

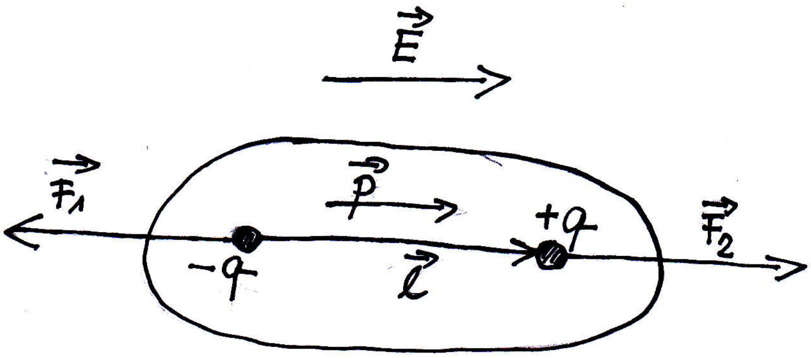
$\boxed{\vec F = \vec p \cdot \text{grad}\, \vec E}$ síla působící na dipól

2) Rotace tělesa je pak dána výsledným vnějším silovým momentem

$\boxed{\vec M = \vec p \times \vec E}$ silový moment působící na dipól



$\boxed{\vec M \neq 0}$



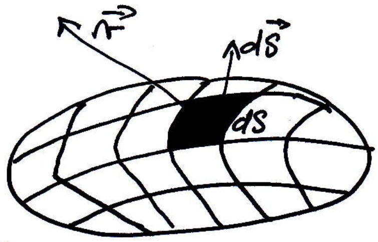
$\boxed{\vec M = 0}$

ORIENTAČNÍ POLARIZACE DIELEKTRIKA

Existující dipóly v látce, kterou vložíme do vnějšího el. pole, se tedy všechny natáčejí do jednoho jediného směru, do směru intenzity pole, a to tím více, čím je pole silnější (nastává tzv. orientace dipólů)

④ GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$ tok elektrické intenzity uzavřenou plochou S



– celkový objem kapaliny proteklý za 1 času přes celou plochu S

$Q = \iint_S \vec{v}\cdot d\vec{S}$ objemový tok kapaliny

– proto se každý integrál tvaru: $\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ nazývá tok vektoru $\vec{A}$ plochou S

Gaussova (-Ostrohradského) věta matematiky $\boxed{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\cdot dV}$

– $\operatorname{div}\vec{A}$ je matematický operátor divergence vektoru $\vec{A}$

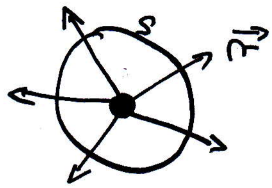
$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ divergence vektoru

– fyzikální význam lze u tohoto operátoru stavit snadno:

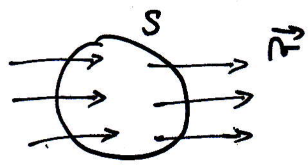
$$\boxed{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\cdot dV}$$

– divergence vektoru $\vec{A}$ je (číselně) rovna výtoku vektoru $\vec{A}$ z jednotkového objemu v daném místě.

$\operatorname{div}\vec{A} \neq 0$ zřídlové pole



$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ nezřídlové pole



1) nechť náboj Q leží uvnitř plochy S

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{r}_0\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

2) bodový náboj Q leží vně plochy S

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint_{S_1,S_2}(d\omega - d\omega) = 0$$

⇒ ani v jednom případě nezávisí velikost toku elektrické intenzity na poloze bodového náboje Q a je vždy nulová

Zobecnění pro soustavu více nábojů

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}'_1 + \vec{E}'_2 + \ldots$ intenzita výsledného elektrického pole

$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + Q_2 + \ldots$ celkový náboj uvnitř plochy S

$$\Rightarrow \boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Gaussův zákon elektrostatiky (integrální tvar)

- tok vektoru výsledné intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je určen celkovým nábojem uvnitř této plochy

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

GZ - diferenciální tvar

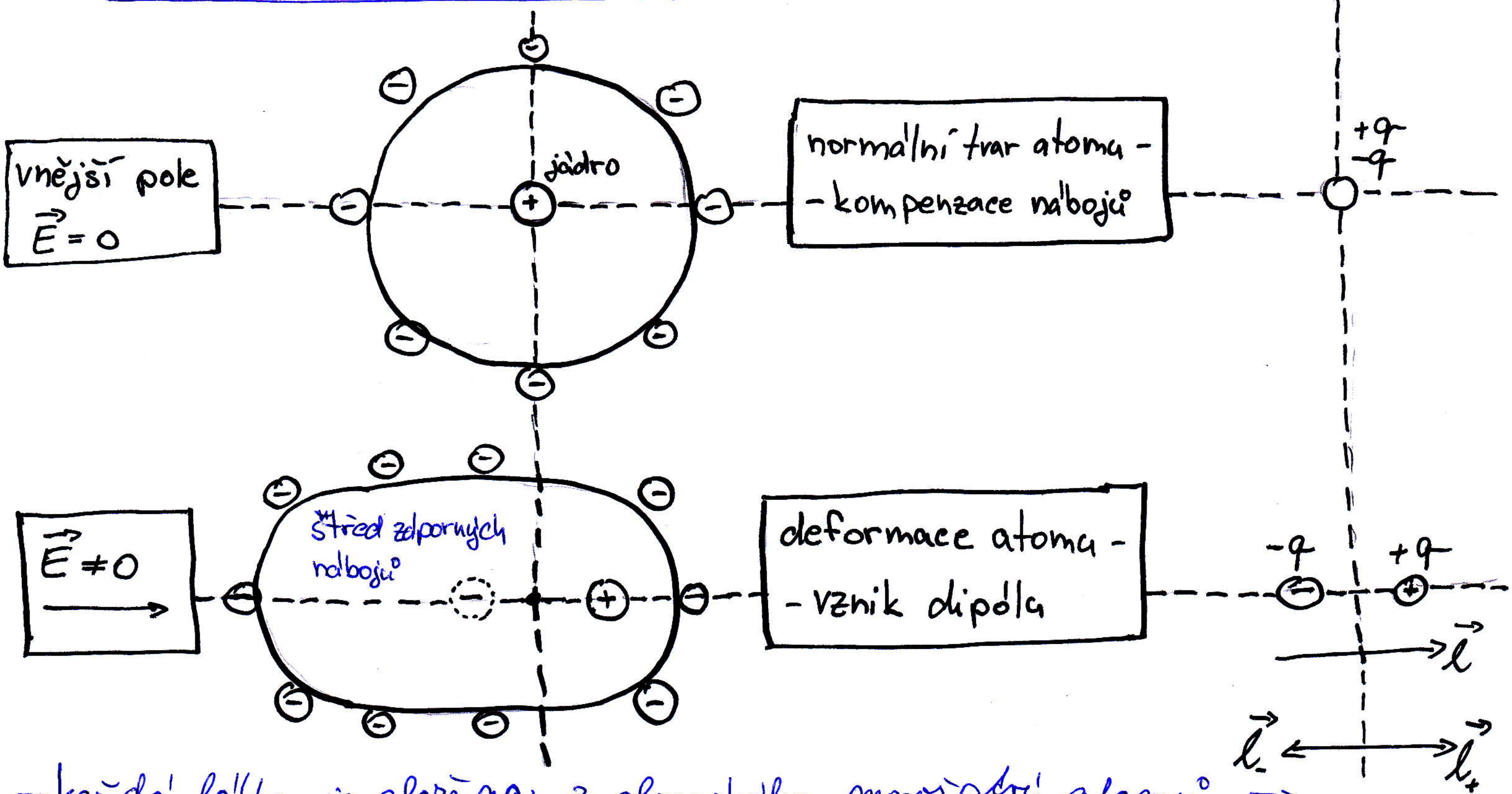
elektrické náboje jsou zřídla (zdroje) elektrického pole

⇓

elektrické pole je bez nábojů ($\rho = 0$) ⇒ $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ pole je nezřídlové

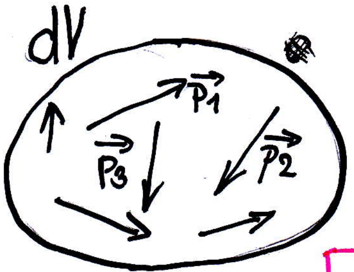
v daném místě jsou elektrické náboje ($\rho \neq 0$) ⇒ $\operatorname{div}\vec{E} \neq 0$ pole je zřídlové

6 ELEKTRICKÉ POLE V NEVODIVÉM PROSTŘEDÍ



– každá látka je složena z obrovského množství atomů ⇒

⇒ v objemu dielektrika tedy vzniká velké množství elektrických dipólů – je to tzv. <u>jev atomové polarizace</u> dielektrika



– v nějakém objemu dV nechť vznikne N dipólů s dipólovými momenty ⇒ jejich součet pak nazveme <u>celkový elektrický dipólový moment</u> v objemu dV

$$\boxed{d\vec{p} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_k q_k \cdot \vec{l}_k}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}}$$

polarizace dielektrika je celkový dipólový moment v jednotce objemu (tedy objemová hustota dipólového momentu v daném místě dielektrika)

Homogení dielektrikum

$\rho^* = \frac{dQ^*}{dV}$ (objemová) hustota kladného vázaného náboje

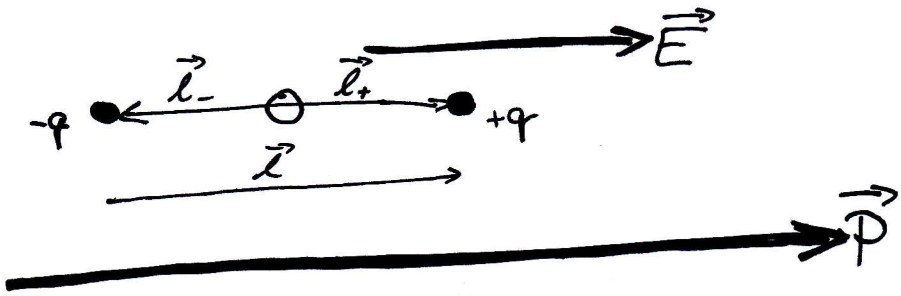
$\Rightarrow$ pro polarizaci v homog. dielektriku platí

$\boxed{\vec{P} = \rho^* \cdot \vec{l}}$ polarizace homogenního dielektrika

- vektor polarizace je rovnoběžný s vektorem vzdálenosti $\vec{P} \parallel \vec{l}$

$\rightarrow$ v případě izotropního dielektrika je ~~vektor~~ vektor vzdál. rovnoběžný s vektorem elektrické intenzity: $\vec{l} \parallel \vec{E}$

$\Rightarrow$ v homogenním a izotropním dielektriku bude polarizace rovnoběžná s intenzitou pole: $\vec{P} \parallel \vec{E}$



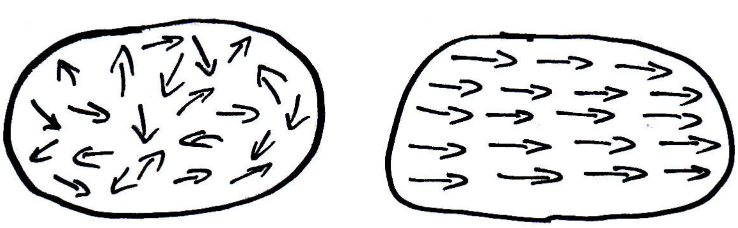
- uvažte, že rovnoběžnost dvou vektorů vlastně znamená jejich přímou úměru (linearita), v homogenním a izotropním dielektriku je tedy polarizace úměrná intenzitě elektr. pole

$\vec{P} = \text{konst.} \cdot \vec{E}$ lineární dielektrikum

$\rightarrow$ $\boxed{\vec{P} = \varkappa \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}}$ lineární dielektrikum

$\varkappa$ - elektrická susceptibilita (závisí pouze na vlastnostech dielektrika)

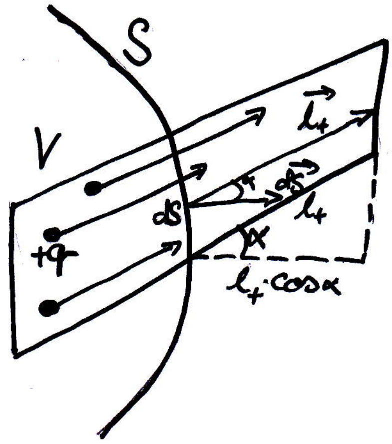
Orientační polarizace



$\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\vec{E} \neq 0$

- vložením látky do vnějšího elektr. pole vznikne silový moment, který začne otáčet dipóly do směru vektoru intenzity
- nemůže způsobit výraznou rotaci dipólů, dojde jen k malému natočení dipólů do směru pole (orientační polarizace)

⑥



$\rho^* \cdot \vec{l}_+ \cdot d\vec{S}$ kladný vázaný náboj

$-\rho^* \cdot \vec{l}_- \cdot d\vec{S}$ záporný vázaný náboj

polarizační náboj $Q_p = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$

- je to celkový vázaný náboj, který se při polarizaci „objeví" uvnitř libovolné uzavřené plochy

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}}$ elektrická indukce (vektor)

⇒ Gaussův zákon v dielektriku (pro elektrickou indukci)

$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q}$ (int. tvar) $\boxed{\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho}$ (dif. tvar)

- z vektoru el. indukce můžeme odvodit materiálové konstanty

$\varepsilon_r = 1 + \chi$ relativní permitivita látky

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ permitivita látky

- dosazením do GZ získáme jeho tvar ve hmotném prostředí

$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}}$ GZ v dielektriku (pro elektrickou intenzitu)

$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$ GZ v dielektriku (diferenc. tvar pro elektr. intenzitu)

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E}_0$$

- v dielektriku je elektrické pole ε_r-krát menší, než bylo ve vakuu (od stejných nábojů)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{r}_0}$$ Coulombův zákon v dielektriku

7 ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

- energie jednoznačně souvisí se zkušebním nábojem, podle příslušného matemat. vztahu je potenciální energie jednoznačnou Fcí obou nábojů: $W_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$
- tento problém je v důsledku zákona akce a reakce zcela symetrický
- můžeme učinit dvojí závěr:
  1) energie (elektr. náboje) je jednoznačně a současně spojena s oběma elektrickými náboji
  2) energie je v jednoznačném vztahu se vzniklým elektr. polem

a) energie dvou bodových nábojů

$$W_{pot} = W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$
– práce potřebná pro přenesení náboje Q_1 z ∞ do $\vec{r}_1$

- uvedená energie je proto veškerou prací vykonanou při vytvoření této soustavy dvou nábojů a může tak být označena za energii soustavy
- pokud mezi náboji působí přitažlivé síly používáme pojem <u>vazební energie</u> soustavy.

$W = W_{pot} = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21})$ – energie soustavy formálně

b) energie soustavy více bodových nábojů

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = W_{ji}$$
energie libovolné dvojice nábojů soustavy

$$\varphi(\vec{r}_i) = \varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$
potenciál výsledného elektrostatického pole celé soustavy nábojů v místě $\vec{r}_i$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_i \cdot \varphi_i$$ energie soustavy nábojů

c) energie spojitě rozložených nábojů ve vakuu

1) $W = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi \cdot dQ = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi \cdot dV \cdot \rho$ energie nábojů v objemu

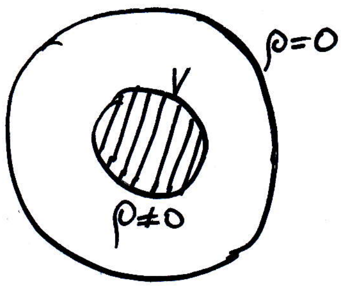
2) $W = \frac{1}{2}\iint_S \varphi \cdot \sigma \cdot dS$ energie nábojů na ploše

$W = \frac{1}{2}\varphi Q = \frac{1}{2} C \varphi^2$ energie vodivého tělesa

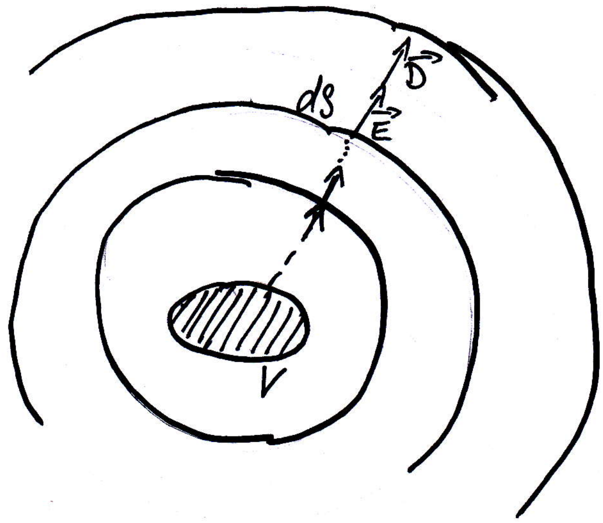
$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2$ energie kondenzátoru

$$\boxed{W = W_{objemu} + W_{povrchu} = \frac{1}{2}\iiint_V \varphi \rho \, dV + \frac{1}{2}\oiint_S \varphi \cdot \sigma \cdot dS}$$ ENERG. TĚLESA

d) energie spojitě rozložených nábojů v dielektriku



$$W = \frac{1}{2}\iiint_{V \to \infty} \varphi \cdot \rho \, dV$$



$$D = \varepsilon \cdot E = \varepsilon \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}$$

$$W = \iiint_{V \to \infty} \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV = \iiint_{V \to \infty} w \, dV$$ celková ~~energie~~ elektrostatická energie

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot E^2$$ hustota energie elektrostatického pole