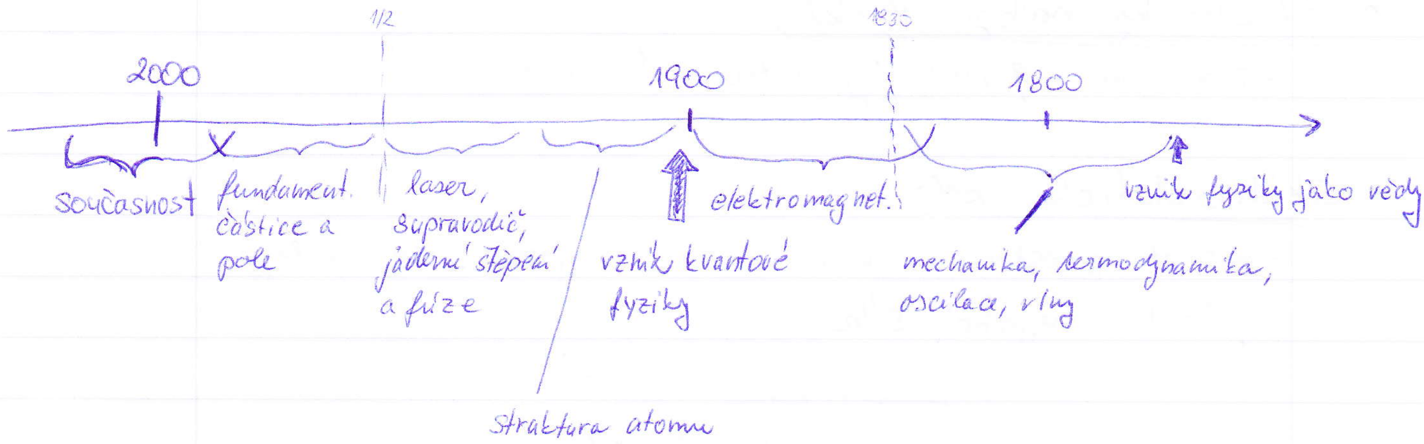
FYA2 1. hodina cvičení 25. 9. 12

ELEKTROMAGNETISMUS



- současnost: a) superstruny ~ Planck-Wheelerově prostoročasu (~~10^{-35} m~~)
  (10^{-35} [m], 10^{-43} [s]),
  (podstata hmoty)

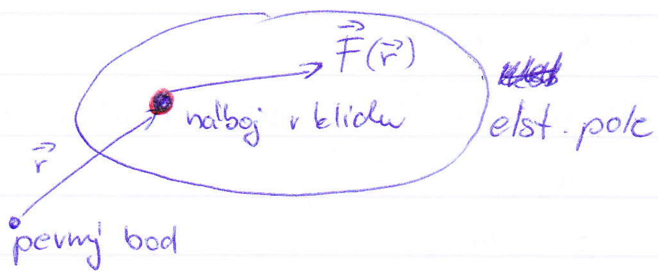
  b) nanostruktury a kvantová genetika
  (prolínání fyz., chemie a biologie)

  c) multiparalelní zprac. informace
  (prolínání fyz. a informatiky)
  - cíl je sestrojit kvantový počítač

Základní pojmy a vztahy elektromagnetismu

- **Elektrický náboj objektu**
  - značíme (q, Q); jednotka 1 Coulomb [1C]

- **Elektrostatické pole**
  - oblast prostoru v němž na nepohyb. se náboje působí nějaká síla



- **Intenzita elst. pole $\vec{E}(\vec{r})$**

$$\vec{E}(\vec{r}) \overset{def.}{=} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$ – síla půs. na jednotkový náboj

- **Potenciál elst. pole $\varphi(\vec{r})$**

$$\varphi(\vec{r}) \overset{def.}{=} \frac{W_{pot.}(\vec{r}, \infty)}{q}$$ – potenc. energ. jednotkové náboje v místě $\vec{r}$ vůči nekonečně vzdálenému místu

Souvislost mezi intenzitou a potenciálem

– z mechaniky: $W_{pot}(\vec{r}, \infty) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F}(d\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

(mech. práce vykonaná silou při přesunu do nekonečně vzdáleného místa)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\int_{\vec{r}}^{\infty} F(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}{q} = \frac{\int_{\vec{r}}^{\infty} q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}{q} = \underbrace{\int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

integrál o nekonečnou horní mezí, který má složité diferenc. vlastnosti

$$\boxed{\varphi(\vec r) = -\int_{\infty}^{\vec r} \vec E(\vec r\,')\,d\vec r\,'}$$

Vztah mezi potenciálem a intenzitou

a obráceně:

$$\vec E(\vec r) = -\underbrace{\left\{\frac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial x}\vec i + \frac{\partial\varphi(\vec r)}{\partial y}\vec j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec k\right\}}_{\text{grad}\,\varphi(\vec r)}$$

(Intenzita = záporný gradient potenciálu)

Základní zákon elst. pole

$$\boxed{\underbrace{\oint_S (\vec E\cdot d\vec S)}_{\text{tok intenzity elst. pole libovolnou uzavřenou plochou } S} = \frac{1}{\varepsilon}\, Q_S}$$

Q_S – náboj nacházející se uvnitř objemu vymezeného uzavřenou plochou S

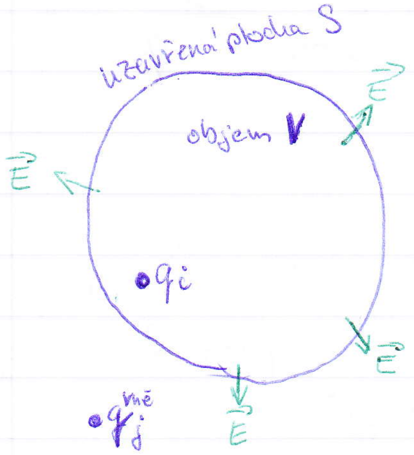
– ε je konstanta charakterizující elst. vlastnosti pole (elektrická permitivita)

pro vakuum:

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,[A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4]$$

Gauss-Coulombův zákon (GCZ)

= věta o zřídlovém charakteru elst. pole

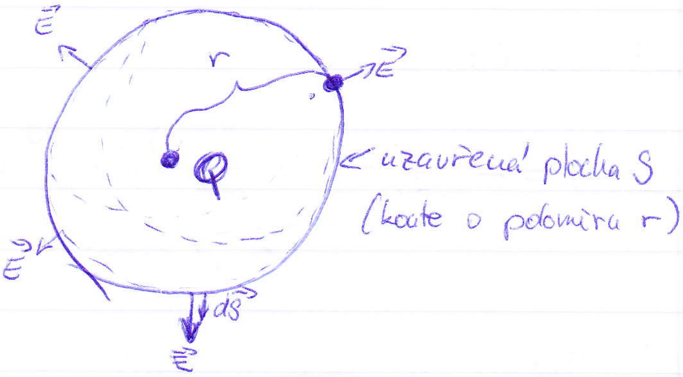


$$Q_S = \sum_i q_i$$

Náboj Q_S je zřídlem (zdrojem) elst. pole, z něhož toto pole vytéká s intenzitou $\vec E$.

PROBLÉM č. 1

Intenzita a potenciál elst. pole bodového náboje Q.



$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \oint \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstanta}}}{E} \cdot dS = E \cdot \underbrace{\oint dS}_{4\pi r^2} = \boxed{E \cdot 4\pi r^2}$$

$$\boxed{Q_S = Q}$$

$\Downarrow$

GCZ: $\quad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon} Q$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

velikost intenzity elst. pole ve vzdálenosti $\underline{r}$ od bod. náboje $\underline{Q}$

<u>Vektorový char. intenzity</u>

$$\vec{E} = E \cdot \vec{r}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

$\downarrow$ jednotkový vektor ve směru

Pokud do tohoto pole vložíme jiný bodový náboj q, bude na něj pole působit silou $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$

$$\vec{F} = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \vec{r}_0}$$

Coulombův zákon pro silové pův. 2 bodových nábojů

Potenciál:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(\vec{r'}) \cdot d\vec{r'} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{(r')^2} \cdot \vec{r_0} \cdot \underbrace{dr \cdot \vec{r_0}}_{d\vec{r'}}$$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \underbrace{(\vec{r_0} \cdot \vec{r_0})}_{=1} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{(r')^2} \, dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^{r}$$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left\{ \left(-\frac{1}{r}\right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{\infty}\right)}_{=0} \right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}}$$

potenciál bod. náboje Q ve vzdálenosti $\underline{r}$

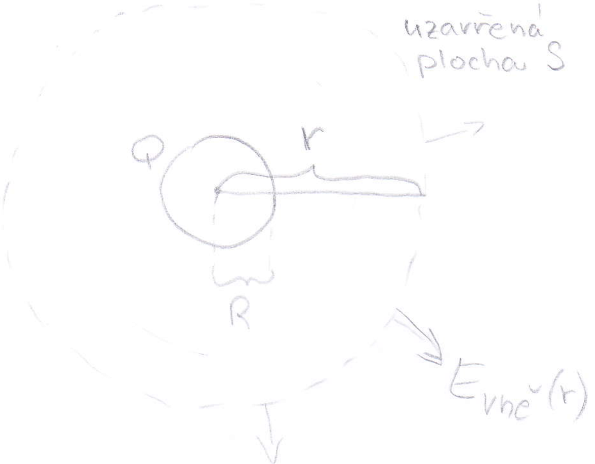
FYA2 - cvičení 9. 10. XII

PROBLÉM Č. 2

Intenzita elst. pole náboje Q, rovnoměrně rozloženého po objemu koule o poloměru R (aplikace Gauss-Coulombova zákona).

GCZ: $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} Q_s$

① Intenzita vně koule



$$\oiint_{S=4\pi r^2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot E_{vně}(r)$$

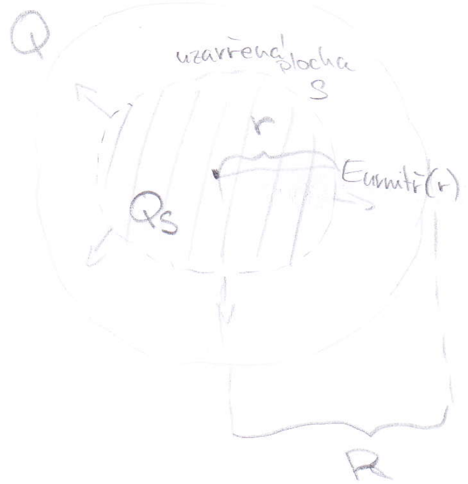
$\Downarrow$ (do GCZ)

$$4\pi r^2 \cdot E_{vně}(r) = \frac{1}{\varepsilon} Q$$

$$\boxed{E_{vně}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}}$$

- stejný výsledek jako kdyby Q byl bodový náboj ve středu koule

② Intenzita uvnitř koule



$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot E_{uvnitř}(r)$$

$$Q_S = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

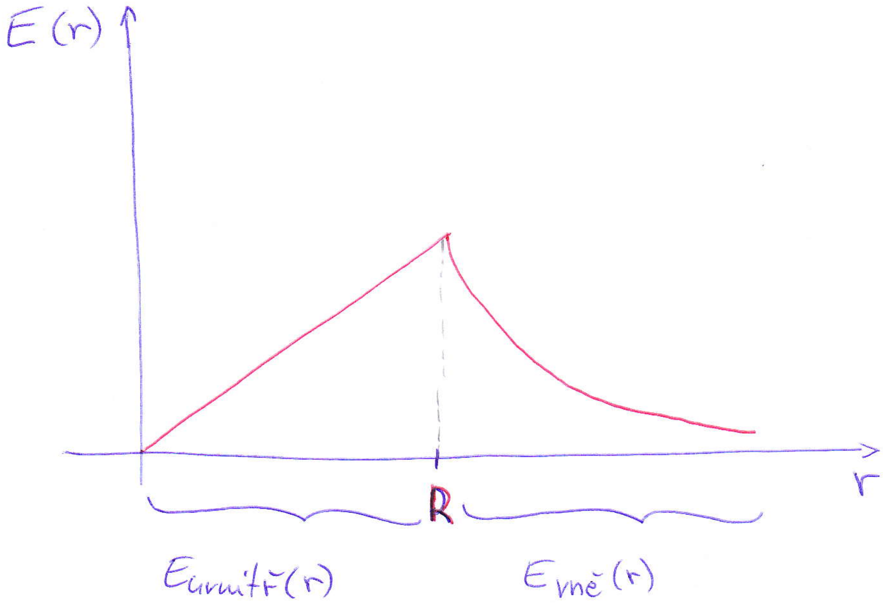
$\Downarrow$ (do GCZ)

$$4\pi r^2 \cdot E_{uvnitř}(r) = \frac{1}{\varepsilon} Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{E_{uvnitř}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3}\cdot r}$$

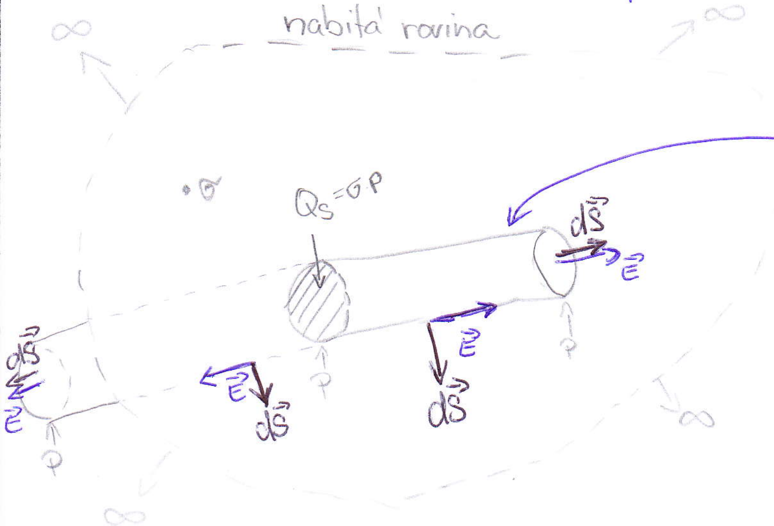
- zcela jiná závislost než u bodového náboje

SUMÁŘ



PROBLÉM Č. 3

Intenzita elst. pole nekonečně velké roviny nabité nábojem s konstantní plošnou hustotou $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ (aplikace GCZ)



součin paralelních vektorů je roven součinu jejich velikostí

Tok intenzity uzavř. plochou S:

$$\oint_{\text{válec } S} \vec E \cdot d\vec S = 2\int_{\substack{\text{podstava}\\ \text{válce}}} \vec E \cdot d\vec S + \underbrace{\int_{\substack{\text{plášť}\\ \text{válce}}} \vec E \cdot d\vec S}_{=0 \text{ protože } \vec E \perp d\vec S} = 2\int_{\text{podstava}} \overbrace{\vec E \cdot d\vec S}^{=E\,dS} = 2\int_{\text{podstava}} E \cdot dS =$$

konstanta

$$= 2E \cdot \int_{\text{podstava}} dS = \underline{\underline{2E \cdot P}}$$

$$Q_S = \sigma \cdot P$$

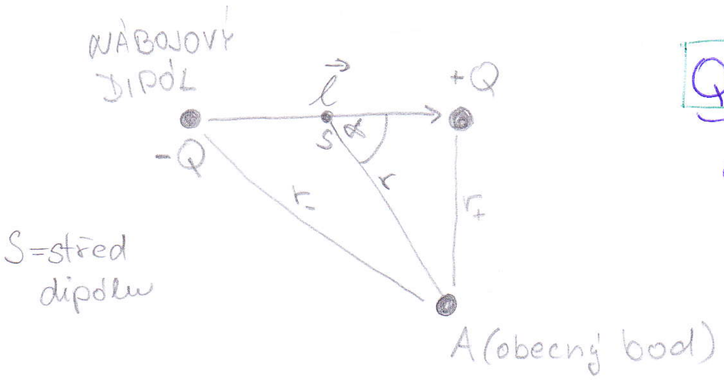
$$\text{GCZ} \Rightarrow 2EP = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sigma P$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}}$$

- nezávisí na vzdálenosti od nabité roviny (elst. pole je homogenní)

PROBLÉM Č. 4

Elst. pole nábojového dipólu (aplikace potenciálu bodového náboje).



$$\boxed{Q\vec{l} = \vec{p}}$$

dipólový moment

Potenciál elst. pole dipólu v místě A:

$$\varphi(A) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(+Q)}{r_+}}_{\text{potenciál náb. }(+Q)\text{ ve vzdál. }r_+} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(-Q)}{r_-}}_{\text{potenciál náb. }(-Q)\text{ ve vzdál. }r_-}$$

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot Q\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(r_- - r_+)}{r_+ r_-}$$

- Soustředíme se pouze na body A, které jsou daleko od dipólu, tedy $r_+ \gg l$ a $r_- \gg l$

Pak platí: $r_+ r_- \cong r^2$

$r_- - r_+ \cong l\cdot\cos\alpha$

$$\varphi(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(r_- - r_+)}{r_+ r_-} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{l\cdot\cos\alpha}{r^2} = \frac{Q\cdot\overbrace{l\, r\cdot\cos\alpha}^{=\vec{l}\cdot\vec{r}}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{\overbrace{Q\vec{l}}^{=\vec{p}}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{4\pi\varepsilon r^3}}$$

!!! - potenciál elst. pole dipólu s momentem $\vec{p}$ v místě $\vec{r}$ vůči středu dipólu.

Č. 4 POKRAČOVÁNÍ

Intenzita elst. pole dipólu pomocí gradientu potenciálu

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\, \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\, \mathrm{grad}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$$

Spočteme detailně x-ovou složku intenzity:

$$E_x = \frac{-1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon}\left\{(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\cdot\vec{r})\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(-\frac{3}{r^4}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{=r}\right) = \frac{-3}{r^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x = \frac{-3}{r^4}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{p_x\cdot x + p_y\cdot y + p_z\cdot z\right\} = p_x$$

$$\boxed{E_x = \frac{-1}{4\pi\varepsilon}\left\{(\vec{p}\cdot\vec{r})\cdot\frac{-3x}{r^5} + \frac{1}{r^3}p_x\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left\{\frac{3}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})x - p_x\right\}}$$

Analogicky:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\cdot\left\{\frac{3}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})y - p_y\right\}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\cdot\left\{\frac{3}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})z - p_z\right\}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\left\{\frac{3}{r^2}(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - \vec{p}\right\}}$$

intenzita elst. pole dipólu

PROBLÉM Č. 5

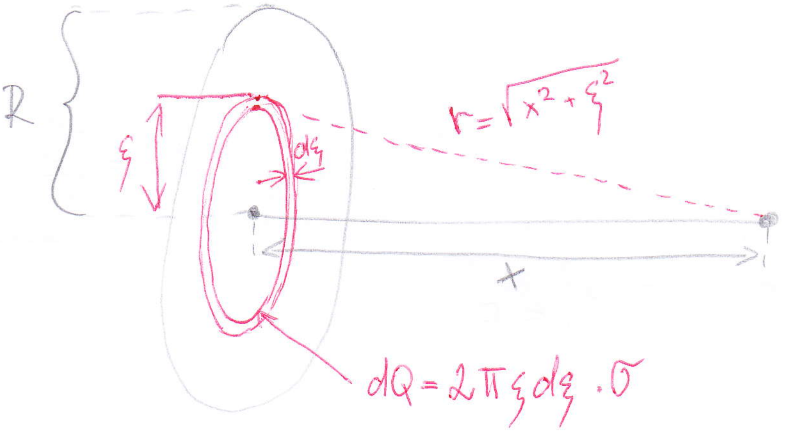
Kruhová deska o poloměru R je rovnoměrně nabita nábojem s plošnou hustotou σ (= konst.).

Úkolem je najít:

1) Potenciál a intenzitu elst. pole v kolmé vzdálenosti $\underline{x}$ od středu desky

2) Limitní hodnotu intenzity pro ∞ - velkou desku ($R \to \infty$)

(opět aplikace potenciálu bod. náboje)



Potenciál vytvoř. náb. dQ ve vzdálenosti x:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{2\pi\,\xi\, d\xi \cdot \sigma}{\sqrt{x^2+\xi^2}}$$

$$\boxed{d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot \frac{\xi \cdot d\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}}}$$ ~~celkový~~

Celkový potenciál od <u>všech</u> nábojů desky:

$$\varphi = \int\limits_{\text{plocha desky}} d\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^R \frac{\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}}\, d\xi = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(\sqrt{R^2+x^2} - \sqrt{0+x^2}\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)}$$ - potenciál elst. pole kruhové desky o poloměru $\underline{R}$ v kolmé vzdálenosti $\underline{x}$

$\boxed{\text{D. cv.}}$ dopočítat intenzitu jako gradient φ

PROBLÉM Č. 6

Uvažujeme elst. pole dvou paralelních opačně nabitých rovin s hustotou náboje o velikosti σ. Odvodíme:

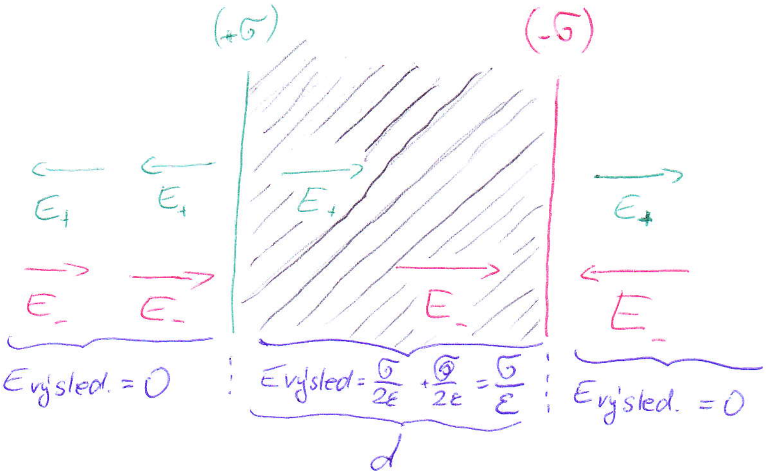
a) Prostorové rozložení intenzity pole

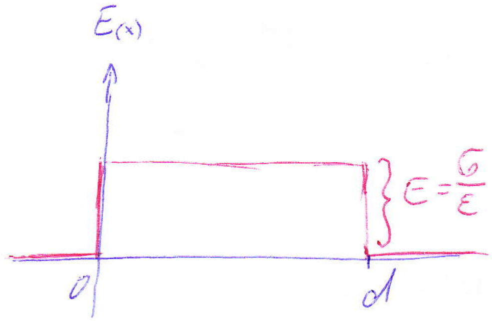
b) Sílu působení jedné roviny na druhou

c) Energii pole mezi rovinami

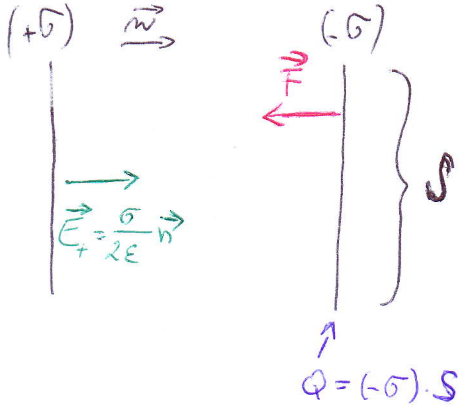
Z výsledku řešení problému č. 3 víme, že nabitá rovina vytváří homogenní pole:

Celkové pole rovin $(+\sigma)$ a $(-\sigma)$





ROVINNÝ KONDENZÁTOR



$$\boxed{\vec{F} = Q\cdot\vec{E}_+ = (-\sigma)\cdot S\,\frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{n}}$$

Dále víme:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \text{(celková intenzita pole)}$$

$$\sigma = \varepsilon\cdot E$$

$$\vec{F} = -\frac{S}{2\varepsilon}\cdot(\varepsilon E)^2\vec{n} = -\frac{1}{2}\varepsilon S E^2\vec{n}$$

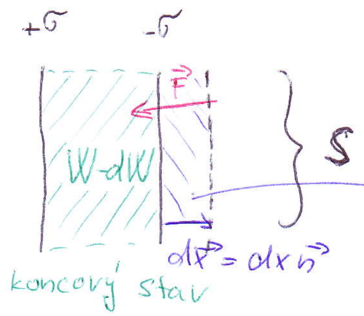
$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon S E^2\cdot\vec{n}}$$

znaménko (-) $\Rightarrow$ síla $\vec{F}$ přibližuje rovinu $(-\sigma)$ k rov. (σ)

$\Rightarrow$ snižuje energii pole

ⓒ

$\rightsquigarrow$



$dV = S\cdot dx$ ... změna objemu pole

$$\underbrace{(W - dW)}_{\text{konc. en. pole}} - \underbrace{W}_{\text{poč. en. pole}} = \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{x}}_{\text{mech. práce síly}}$$

$$-dW = \left(-\frac{1}{2}\varepsilon S E^2\cdot\vec{n}\right)\cdot dx\,\vec{n}$$

$$-dW = -\frac{1}{2}\varepsilon S E^2 dx$$

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 S dx$$

$$dW = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$

OBJEMOVÁ HUSTOTA ENERGIE POLE

$$\Rightarrow \underbrace{W = \int_V \frac{dW}{dV}\cdot dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV}_{\text{Energie pole v objemu } V.}$$

PŘ: Energie elst. pole rovinného kondenzátoru.

$$W = \int \frac{1}{2} \varepsilon \underbrace{E^2}_{\text{konst.}} \cdot dV$$

$V = Sd$ (plocha · vzdálenost rovin)

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \cdot \int_{Sd} 1 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cdot Sd$$

PROBÉM Č.7

Uvažujme rovinný kondenzátor s plošnou hustotou náboje σ, plochou rovin S a jejich vzdáleností d.

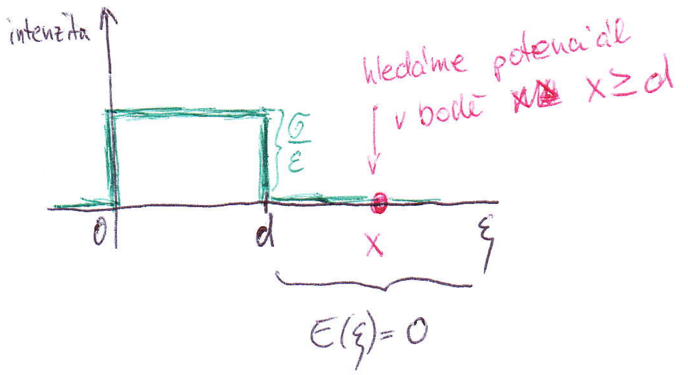
Odvodíme:

a) prostorové rozložení potenciálu pole

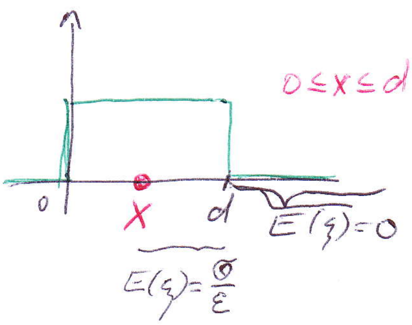
b) napětí mezi rovinami a kapacitu kondenzátoru

c) mech. práci potřebnou k nabití kondenzátoru

d) zákon přeměny a zachování elst. energie

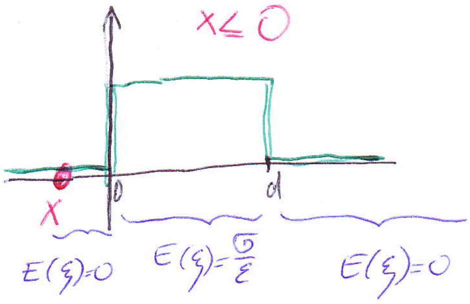


$$\varphi(x) = -\int_{\infty}^{x} \underbrace{E(\xi)}_{=0}\, d\xi = -\left[\text{konst}\right]_{\infty}^{x} = 0$$



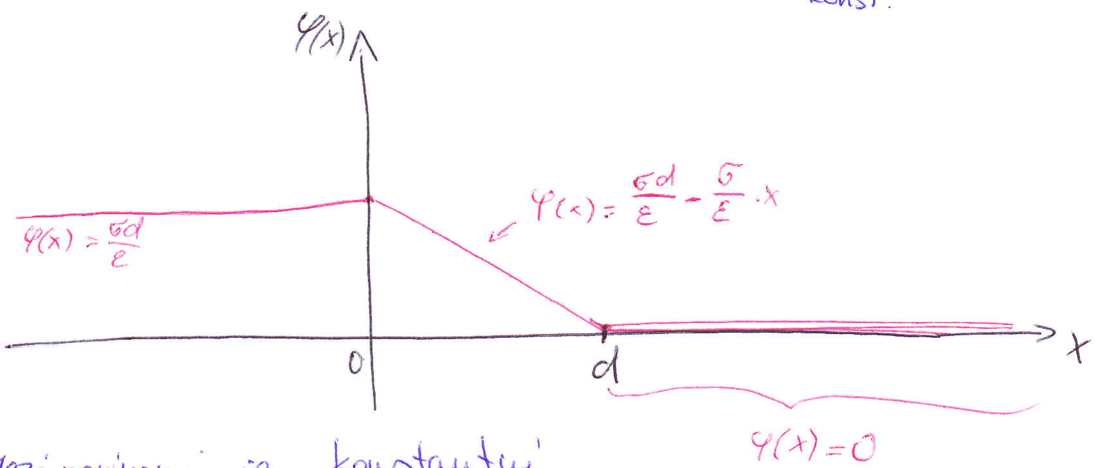
$$\varphi(x) = \underbrace{\left(-\int_{\infty}^{d} E(\xi)\, d\xi\right)}_{=0} + \left(-\int_{d}^{x} E(\xi)\, d\xi\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_{d}^{x} 1\, d\xi$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon}(1 - x)$$



$$\varphi(x) = \underbrace{\left(-\int_{\infty}^{d} 0\, d\xi\right)}_{=0} + \left(-\int_{d}^{0} \frac{\sigma}{\varepsilon}\, d\xi\right) + \underbrace{\left(-\int_{0}^{x} 0\, d\xi\right)}_{=0}$$

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\int_{d}^{0} d\xi = \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon} d}_{\text{konst.}}$$



Mezi rovinami je konstantní potenciál (= napětí)

$$\boxed{U = \underbrace{\varphi(x=0)}_{\frac{\sigma d}{\varepsilon}} - \underbrace{\varphi(x=d)}_{0} = \frac{\sigma d}{\varepsilon}}$$

napětí

Tentýž výsledek můžeme vyjádřit přímo pomocí intenzity, aniž známe prostorové rozložení potenciálu:

$$U = \int_0^d E(x)\cdot dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon}\, dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$$

Napětí U umožňuje shromažďovat náboj: $\underset{\text{náboj}}{Q} = C \cdot \underset{\text{napětí}}{U}$

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$ kapacita kondenzátoru

Př.: Kap. rovinného kondenzátoru

$$C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\varepsilon}} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

c) Elem. práce, kterou musíme vykonat, abychom na kondenzátor s nábojem Q', odpovídajícím napětím $U(Q')$ přenesli dodatečný náboj dQ'.

$$dA = U(Q')\, dQ'$$

Celk. práce pro nabití kondenz. na náboj Q:

$$A = \int dA = \int_0^Q U(Q')\, dQ'$$

Nechť kapacita kondenzátoru je C. $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$ ... $U(Q') = \frac{Q'}{C}$

$$\boxed{A} = \int_0^Q \frac{Q'}{C} \cdot dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' \cdot dQ' = \frac{1}{C} \left[\frac{Q'^2}{2} \right]_0^Q = \frac{1}{2C} Q^2$$

Př.: A pro rovin. kondenz.:

$Q = \sigma \cdot S$

$C = \varepsilon \frac{S}{d}$ ... $$\boxed{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{\varepsilon S} (\overset{=\varepsilon E}{\sigma} S)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 S d$$

Porovnejme s energií elst. pole kond.:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 S d \implies \boxed{A = W}$$

mech. práce potřebná k nabití

energie elst. pole nabitého kondenz.

⇓

ZÁKON PŘEMĚNY A ZACHOVÁNÍ ELST. ENERGIE

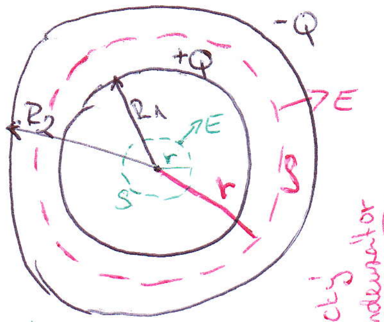
PROBLÉM Č. 8

Dvě soustředné tenkostěné sféry o poloměrech R_1, R_2 jsou nabity náboji $(+Q)$ a $(-Q)$.

a) najdeme prostorové rozložení intenzity pole a ukážeme, že sféry tvoří kondenzátor

b) Spočteme napětí mezi sférami a kapacita kondenzátora

c) Dokážeme platnost zákona přeměny a zachování elst. energie



$r<R_1<R_2$

$r<R_1<R_2$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon}\overbrace{Q_S}^{=0}$$

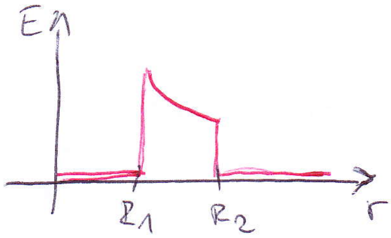
$$\underline{E=0} \quad (0 \le r \le R_1)$$

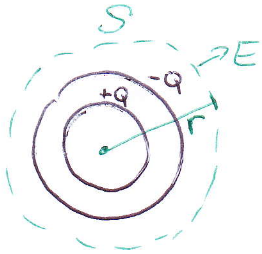
$R_1<r<R_2$

sférický kondenzátor

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon}\overbrace{Q_S}^{=(+Q)}$$

$$\underline{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}} \quad (R_1<r<R_2)$$





$r>R_2$

$r>R_2$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon}\overbrace{\left((+Q)+(-Q)\right)}^{=Q_S}$$

$$\underline{E=0} \quad (r>R_2)$$

b) $$\boxed{U}=\int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(-\frac{1}{R_2}\right)-\left(-\frac{1}{R_1}\right)\right] = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon\cdot\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$$

c) $$\boxed{A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\,\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}} = \boxed{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1\cdot R_2}}$$

$$\boxed{W}=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2\,dV = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr = \boxed{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$$

$$\underline{A=W}$$

PROBLÉM č. 9

6. 11.

Energie elst. pole koule o poloměru R, jejíž celkový náboj Q je rovnoměrně rozložen po celém objemu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Z výsledku problému 2 víme: $E_{uvnitř}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} \cdot r \quad (0 \leq r \leq R)$

$$E_{vně}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (r \geq R)$$

$$W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \, dV = \int_{\substack{\text{vnitřek}\\\text{koule}}} \frac{1}{2}\varepsilon E^2_{uvnitř}(r)\, dV + \int_{\substack{\text{vnějšek}\\\text{koule}}} \frac{1}{2}\varepsilon E^2_{vně}(r)\, dV =$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} \cdot r\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} \int_0^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} \cdot \frac{1}{5} R^5 + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}}_{\substack{\text{energ. pole}\\\text{uvnitř koule}}} + \underbrace{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{R}}_{\substack{\text{en. pole}\\\text{vně koule}}} = \boxed{\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{R} = W}$$

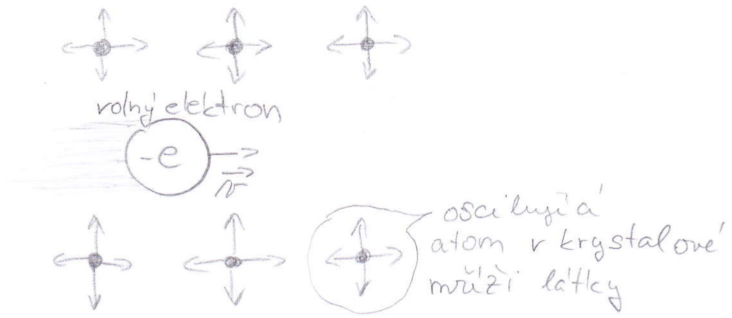
energ. elst. pole koule o poloměru R, rovnoměrně nabité nábojem Q

PROBLÉM Č. 10 (Ohmův zákon)

Pohyb volných elektronů krystalovou mříží pevné látky

elektron ... $Q = (-e)$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$



Volné elektrony se uvedou do pohybu, vložíme-li látku do vnějšího el. pole o intenzitě $\vec{E}$. Na elektron s nábojem $(-e)$ pak působí síla:

$$\vec{F}_{vnější} = (-e)\vec{E}$$

Pozn.: Oscilující atomy však brání elektronům v pohybu, kladou jim určitý odpor, popsaný silou:

$$\vec{F}_{odpor} = -\beta m \vec{v}$$

$\vec{v}$ ... okamžitá rychlost elektronu

m ... hmotnost elektronu

β ... koeficient odporu krystal. mřížky

$$\vec{F}_{celk} = \vec{F}_{vnější} + \vec{F}_{odpor}$$

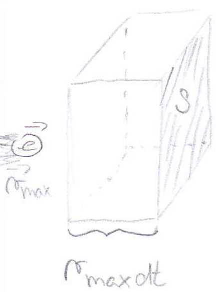
$$\boxed{\vec{F}_{celk} = (-e)\vec{E} - \beta m \vec{v}}$$

S rostoucí rychl. $\vec{v}$ se velikost celkové síly zmenšuje až pro urč. maximální rychlost $\vec{v}_{max}$ dosáhne nuly. $\left((-e)\vec{E} - \beta m \vec{v}_{max}\right) = 0$

$$\boxed{\vec{v}_{max} = \frac{(-e)}{m\beta} \cdot \vec{E}}$$

maximální rychlost elektronu v krystal. mříži

Nyní zkoumejme proud elektronů $\boxed{I \overset{def.}{=} \frac{dQ}{dt}}$ prošlých plochou S.



Počet volných elektronů v jednotce objemu látky označme n_e.

Plochou S projde rychlostí $\vec{v}_{max}$ za dobu dt tolik elektronů n_e, kolik jich je v objemu $dV = S \cdot v_{max} \cdot dt$

$$\boxed{dN = n_e \cdot dV = n_e \cdot S \cdot v_{max}\, dt}$$

Tyto elektrony přenesou za dobu dt náboj $\boxed{dQ = (-e) \cdot dN = (-e) \cdot n_e \cdot S \cdot v_{max}\, dt}$

čímž vytvoří proud $\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = (-e) \cdot n_e \cdot S \cdot v_{max}}$

ad č. 10)

Proud elektronů procházející jednotkou plochy v určitém směru $\vec{n}$ se označuje jako vektor proudové hustoty $\boxed{\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{n}}$

$$\boxed{\vec{j}} = \frac{(-e)\cdot n_e\cdot \cancel{S}\cdot v_{max}}{\cancel{S}}\cdot\vec{n} = (-e)\cdot n_e\cdot\underbrace{v_{max}\cdot\vec{n}}_{\vec{v}_{max}} = \boxed{(-e)\cdot n_e\cdot\vec{v}_{max}}$$

dosadíme:

$$\vec{j} = (-e)\cdot n_e\cdot\frac{(-e)}{m\cdot\beta}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{e^2\cdot n_e}{m\,\beta}}_{=\sigma}\cdot\vec{E}$$

! $\boxed{\vec{j} = \sigma\cdot\vec{E}}$ Ohmův zákon

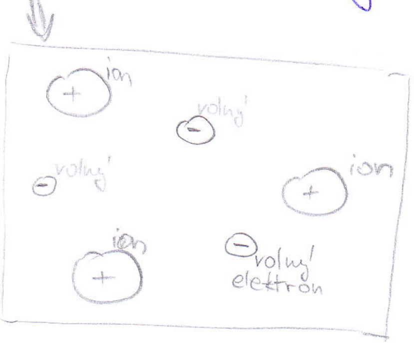
~~vektor proudové hustoty~~

$\boxed{\sigma = \frac{e^2\cdot n_e}{m\cdot\beta}}$ měrná vodivost látky

β ... odpor mřížky

PROBLÉM Č. 11 – Oscilace plazmatu a jeho frekvence

Plazma = ionizovaný plyn



Rovnovážný stav plazmatu: $\boxed{n_- = n_+ = n_0}$

n_- ... počet volných elektr. v objemové jednotce

n_+ ... počet iontů v objem. jednotce

Ionty jsou těžké ⇒ zůstávají v klidu ($n_+ = n_0$)

Elektrony jsou lehké ⇒ snadno se rozpohybují i nepatrnou výchylkou ξ [ksí] z rovnovážného stavu. Tím dojde k následujícím změnám:

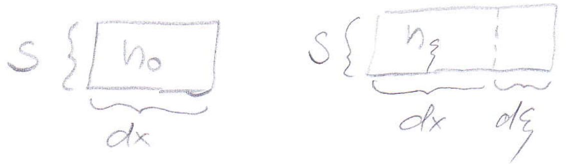
$n_- \to n_\xi$ → nový poč. elektronů v objem. jednotce

V plazmatu tak vzniká nerovnovážná nábojová hustota elektronů:

$$\rho_\xi = (n_\xi - n_0)(-e)$$

Současně se však zachovává celkový počet elektronů před a po výchylce:

$$n_0\, S\,dx = n_\xi\, S\,(dx + d\xi)$$

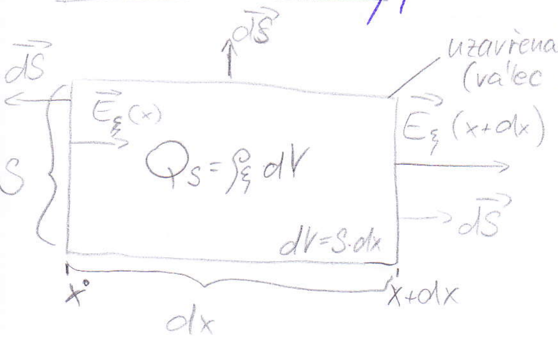


$$n_\xi = n_0\,\frac{dx}{dx+d\xi} = n_0\,\frac{1}{1+\frac{d\xi}{dx}} \cong n_0 - n_0\frac{d\xi}{dx}$$

$$\rho_\xi = (n_\xi - n_0)(-e) = e\cdot(n_0 - n_\xi) = e\cdot\left(n_0 - \left(n_0 - n_0\frac{d\xi}{dx}\right)\right)$$

$$\boxed{\rho_\xi = e\cdot n_0 \frac{d\xi}{dx}} \quad (1)$$

Tato nerovnovážná hustota elektronů vyvolá vznik elektrického pole o intenzitě E_ξ, kterou zjistíme z GCZ.



$$\oiint \vec E_\xi\cdot d\vec S = E_\xi(x)\, S\cdot \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + E_\xi(x+dx)\cdot S\cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + \overset{\text{tok pláštěm}}{0} =$$

$$= \left(\vec E_\xi(x+dx) - \vec E(x)\right)\cdot S$$

$$\oiint \vec E_\xi\cdot d\vec S = \Big[\overbrace{\Big(E_\xi(x) + \frac{dE_\xi}{dx}\cdot dx + \dots\Big)}^{\text{Taylorova řada pro } E_\xi(x+dx)} - E_\xi(x)\Big]\cdot S = \frac{dE_\xi}{dx}\cdot dx\cdot S = \frac{dE_\xi}{dx}\cdot dV$$

GCZ:

$$\oiint \vec E_\xi\cdot d\vec S = \frac{1}{\varepsilon}\rho_\xi\, dV$$

$$\frac{dE_\xi}{dx}dV = \frac{1}{\varepsilon}\rho_\xi\, dV \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{dE_\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\rho_\xi} \quad (2)$$

intenzita pole v závislosti na ξ [ksí]

$$\frac{dE_\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\cdot e\cdot n_0\frac{d\xi}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{dE_\xi}{d\xi} = \frac{e\cdot n_0}{\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_\xi = \frac{e\cdot n_0}{\varepsilon}\cdot\xi}$$

Na elektron s nábojem $(-e)$ toto pole působí silou:

$$F_\xi = (-e)E_\xi = (-e)\frac{e\cdot n_0}{\varepsilon}\cdot\xi$$

$$\boxed{F_\xi = \frac{-e^2\cdot n_0}{\varepsilon}\cdot\xi}$$

Současně platí zákon síly: $F_\xi = \underset{\text{hmotnost elektronu}}{m}\cdot\underset{\text{zrychlení elektronu}}{\frac{d^2\xi}{dt^2}}$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{e^2 \cdot n_0}{\varepsilon}\xi \quad \Big/ \cdot \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{e^2 \cdot n_0}{\varepsilon m} \cdot \xi = 0}$$

řešení $\Rightarrow$

amplituda, fáze

$$\boxed{\xi(t) = A \cdot \sin\Big\{\underbrace{\sqrt{\frac{e^2 \cdot n_0}{m\varepsilon}}}_{\Omega \,..\, \text{frekvence}} \cdot t + \Phi\Big\}}$$

harmonická oscilace

zdvěr

Výchylky elektronů v plazmatu konají harmonické oscilace s frekvencí $\Omega = \sqrt{\frac{e^2 \cdot n_0}{\varepsilon \cdot m}}$ (plazmová frekvence).

PROBLÉM Č. 12

20.11.

- Magnetické pole a jeho zákony, srovnání s elektr. polem.
- Maxwellovy rovnice.

Magnetické pole je vytvořeno proudem pohybujících se nábojů.

Základní veličina: magnetická indukce $\vec{B}$ (analog elektr. intenzity $\vec{E}$)

Zákony:

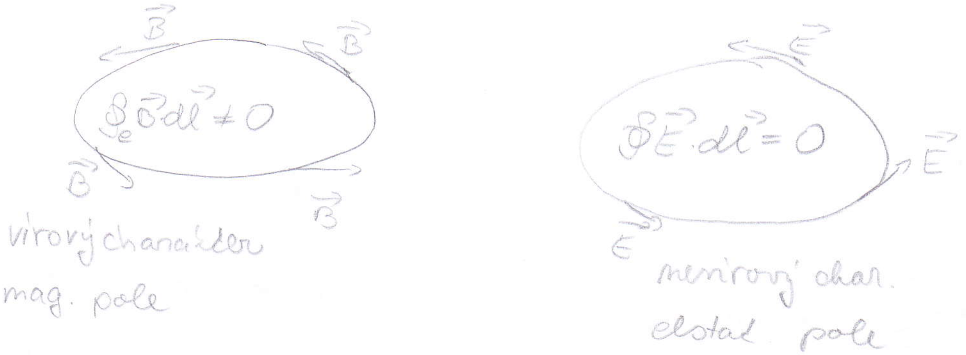
1) Ampérův zákon (AZ) (věta o vírovém charakteru mag. pole)

$$\underbrace{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}}\ = \underbrace{\mu \cdot I_e}$$ (integrální forma)

cirkulace mag. indukce podél libovolné uzavř. křivky l

I_e = proud tekoucí vnitřkem plochy vymezené uzavřenou křivkou l

μ = magnetická permeabilita prostředí

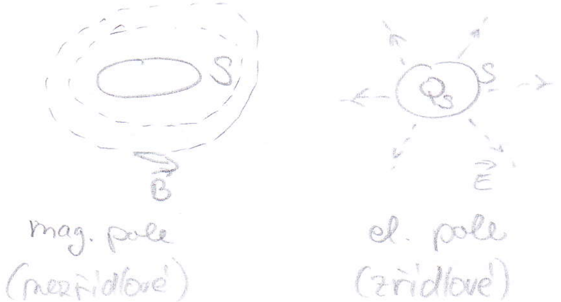


2) Zákon o neexistenci mag. náboje (věta o nezřídlovém charakteru mag. pole)

$$\underbrace{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}} = 0$$

tok mag. indukce lib. uzavřenou plochou S

mag. pole nemá zřídlo, tj. neexistuje analog el. náboje



3)

$$\boxed{w_{mag} = \frac{1}{2\mu} B^2}$$ objemová hustota energie mag. pole

$\Downarrow$

$$\boxed{W_{mag} = \int_V \frac{1}{2\mu} B^2 dV}$$ energie mag. pole v objemu V

analog vztahů pro pole elekt.

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 ; \quad W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$$

4) Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{elektrické napětí} \\ \text{mezi body na} \\ \text{hranici plochy } \underline{S}}}{U} = -\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}_{\substack{\text{tok mag. indukce} \\ \text{nezavřenou plochou } \underline{S}}}\right) \Rightarrow$$ vznik elektromagnetického pole

Maxwellovy rovnice

Ampérův zákon

vektor proudové hustoty

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_c \Rightarrow \boxed{\underbrace{\text{rot}\,\vec{B}}_{\vec{\nabla} \times \vec{B}} = \mu\left(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)}$$

1. Maxwell. rovnice (dif. tvar AZ)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Faradayův zákon

$$U = -\frac{d}{dt}\left(\int \vec{B} \cdot d\vec{S}\right) \Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

2. Maxwell. rovnice (dif. tvar FZ)

Nezřídlovost mag. pole

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \boxed{\underbrace{\text{div}\,\vec{B}}_{\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}} = 0}$$

3. Maxwell. rovnice

Gauss-Coulombův zákon (= zřídlovost el. pole)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} Q_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho}$$

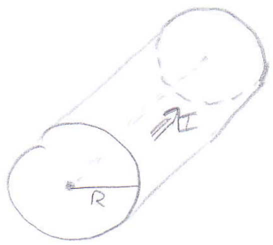
nábojová hustota

4. Maxwell. rovnice

(dif. tvar GCZ)

PROBLÉM Č. 13

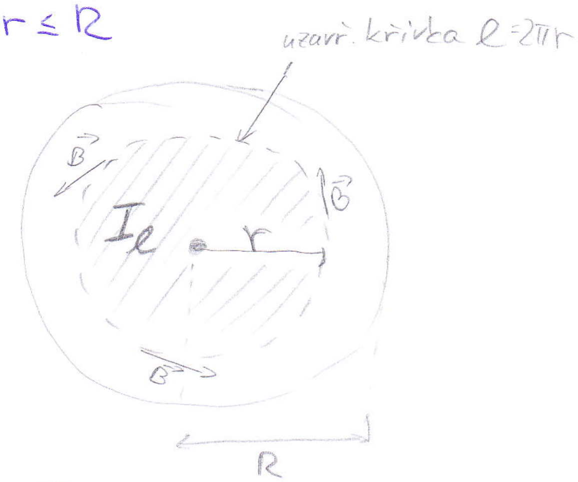
Plným válcovým vodičem o poloměru R prochází el. proud I rovnoměrně rozložený po celém průřezu.
Jak závisí vel. mag. indukce na vzdálenosti r od osy vodiče?



$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

vel. proudové hustoty

a) $0 \le r \le R$



AZ: $\oint_{l=2\pi r} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu I_l$

$I_l = j \pi r^2$

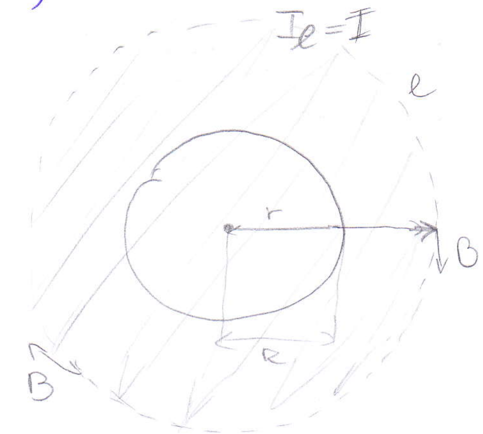
$$\boxed{2\pi r B = \mu j \pi r^2}$$

$\Downarrow$

$$B = \frac{1}{2}\mu j r = \frac{1}{2}\mu \frac{I}{\pi R^2} r$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu I}{2\pi R^2}\cdot r \qquad 0 \le r \le R}$$

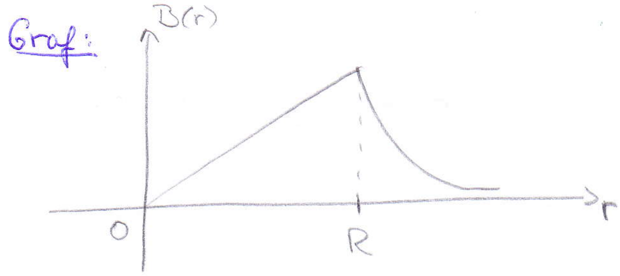
b) $r \geq R$



$B \cdot 2\pi r = \mu I$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \qquad r \geq R}$$

<u>Graf:</u>



PROBLÉM č. 14

Z válcového drátu o poloměru r, vyrobeného z materiálu úměrné vodivosti σ, je vytvořena kruhová smyčka o poloměru R a umístěna do mag. pole o indukci B, jehož vektor je kolmý k ploše smyčky.

Jaké množství náboje projde smyčkou při vypnutí mag. pole?

Podle Faradayova zák. vznikne ve smyčce el. napětí

$$\boxed{U} = -\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\int \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{=B\pi R^2}\Big) = \boxed{-\pi R^2\cdot\frac{dB}{dt}}$$

Napětí souvisí s intenzitou pole:

$$\boxed{U = \int_0^{2\pi R} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2\pi R E}$$

$$\boxed{-\pi R^2\frac{dB}{dt} = 2\pi R E} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2}R\frac{dB}{dt}}$$

Intenzita E vyvolává proudovou hustotu:

$$j = \sigma\cdot E \quad \text{(Ohmův zákon)}$$

$$j = \frac{I}{\pi r^2}$$

plocha drátu

$$\frac{I}{\pi r^2} = -\sigma\cdot\frac{1}{2}R\frac{dB}{dt}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}\sigma R\pi r^2\frac{dB}{dt}}$$

tímto proudem projde za dobu dt smyčkou náboj

$$dQ = I\,dt = -\frac{1}{2}\sigma R \pi r^2 dB$$

Celkový náboj:

koncové (vypnuté) pole

$$\boxed{Q = \int dQ = -\frac{1}{2}\sigma R \pi r^2 \int_B^0 dB = +\frac{1}{2}\sigma R \pi r^2 B}$$

PROBLÉM Č. 15

Šíření elektromagnetického pole ~~a přenos jeho energie ve vakuu~~.

Řešení pomocí Maxwell. rovnic. Ve vakuu netečou žádné proudy ($\vec{j} = \vec{0}$) a nejsou žádné náboje ($\rho = 0$)

Maxwell. rovnice:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

zjednodušení Maxwell. rovnice pro vakuum

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B})$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{E}}_{} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{dt}\right)$$

$$= \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0} - \Delta \vec{E}$$

laplacián

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$-\Delta \vec{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}}$$

vlnová rovnice s fázovou rychlostí

$$c = \frac{1}{\varepsilon \mu} \doteq 3 \cdot 10^8 \, [m \cdot s^{-1}]$$