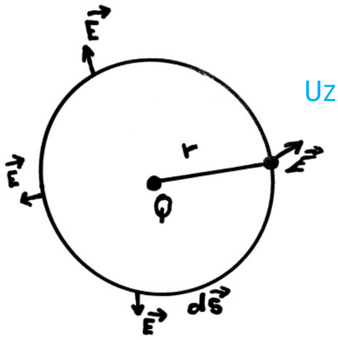
Problém No1

ZADÁNÍ: INTENZITA A POTENCIÁL ELST.POLE BODOVÉHO NÁBOJE **Q**



UZAVŘENÁ PLOCHA **S**
(KOULE O POLOMĚRU **R**)

$$\boxed{\oint\!\!\oint \vec{E} * d\vec{S}} = \oint\!\!\oint E_{konstanta} * dS = E * \underbrace{\oint\!\!\oint dS}_{4\pi r^2} \boxed{= E * 4\pi r^2}$$

$$\boxed{Qs = Q}$$

$$\downarrow$$

$$GCZ \qquad 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon} Q$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{Q}{r^2}}$$ VELIKOST INTENZITY ELST.POLE VE VZDÁLENOSTI **R** OD BOD.NÁBOJE **Q**

VEKTOROVÝ CHAR.INTENZITY

$$\vec{E} = E * \underset{?}{\vec{r}_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{Q}{r^2} * \vec{r_0}$$

POTENCIÁL:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(\vec{r'}) * d\vec{r'} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{(r')^2} * \vec{r_0} * \underbrace{d r \vec{r_0}}_{d\vec{r'}}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \underbrace{(\vec{r_0} * \vec{r_0})}_{=1} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{(r')^2} * dr' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r}$$

$$\varphi(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left\{\left(-\frac{1}{r}\right) - \underbrace{\left(-\frac{1}{\infty}\right)}_{=0}\right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r}}$$ POTENCIÁL BOD.NÁBOJE **Q** VE VZDÁLENOSTI **R**

Problém No2

Zadání: Intenzita elst.pole náboje Q rovnoměrně rozloženého po objemu koule o poloměru R (aplikace Gauss-Soulombova zákona)

$$GCZ: \oiint_S \vec{E} * d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} Q_S$$

1) Intenzita vně koule

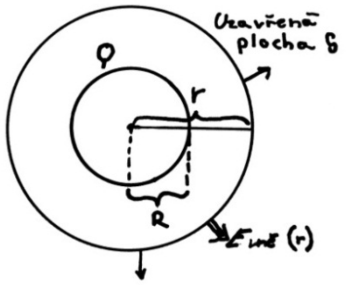
$$\oiint_{S=4\pi r^2} \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi r^2 * E_{vně}(r)$$

↓

$$GCZ \quad 4\pi r^2 * E_{vně}(r) = \frac{1}{\varepsilon} Q$$

$$\boxed{E_{vně}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2}}$$

Stejný výsledek jako kdyby **Q** byl bodový náboj ve středu koule.



2) Intenzita uvnitř koule

$$\oiint_{S=4\pi r^2} \vec{E} * d\vec{S} = 4\pi r^2 * E_{uvnitř}(r)$$

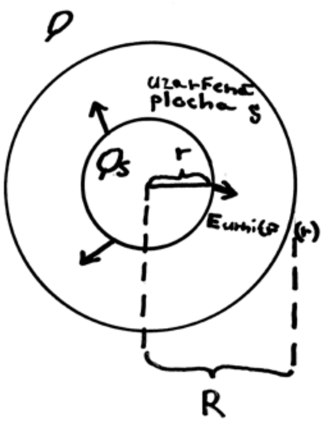
$$Qs = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} * \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

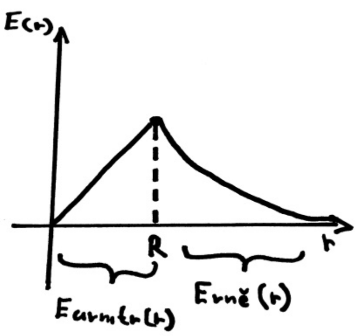
↓

$$GCZ \quad 4\pi r^2 * E_{uvnitř}(r) = \frac{1}{\varepsilon} * Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{E_{uvnitř}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} * r}$$

Zcela jiná závislost než u bodového náboje





Problém No3

ZADÁNÍ: INTENZITA ELST.POLE NEKONEČNĚ VELKÉ ROVINY NABITÉ NÁBOJEM S KONSTANTNÍ PLOŠNOU HUSTOTOU $\text{б} = \frac{dQ}{dS}$ *aplikace GC*

TOK INTENZITY UZAVŘ. PLOCHOU S:

$$\oiint_{\text{válec } S} \vec{E}\, d\vec{S} = 2 \int_{\substack{\text{Podstava}\\ \text{válce}}} \vec{E}\, d\vec{S} + \underbrace{\int_{\substack{\text{Plášť}\\ \text{válce}}} \vec{E}\, d\vec{S}}_{(0 \text{ protože } \vec{E} \perp d\vec{S})} = 2 \underbrace{\int_{\text{Podstava}} \vec{E}\, d\vec{S}}_{(E\,dS \,\to\, \text{součin paralelních vektorů je roven součinu jejich velikostí})} =$$

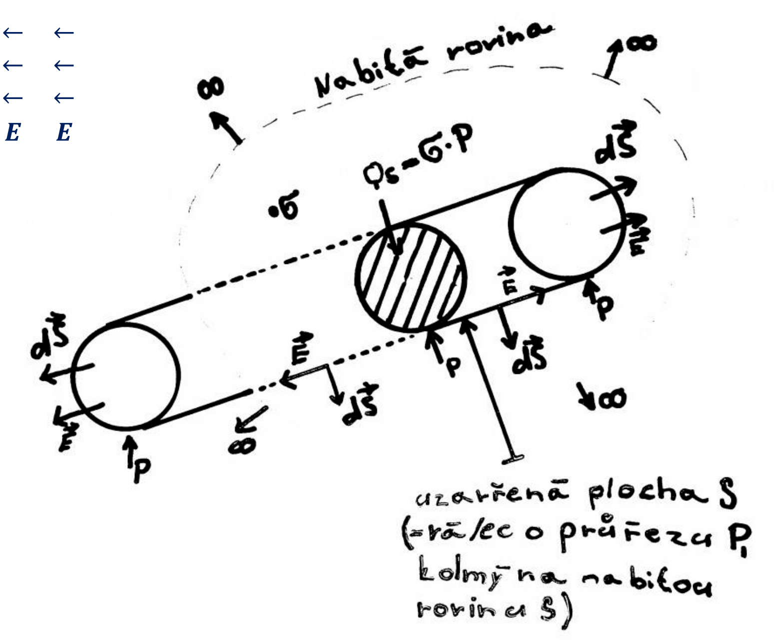
$$= 2 \int_{\text{Podstava}} E_{konstanta}\, dS = 2E \int_{\text{Podstava}} d\vec{s} = \boxed{2EP}$$

$Qs = \text{б}P$

$GCZ \rightarrow 2EP = \frac{1}{\varepsilon} * \text{б}P$

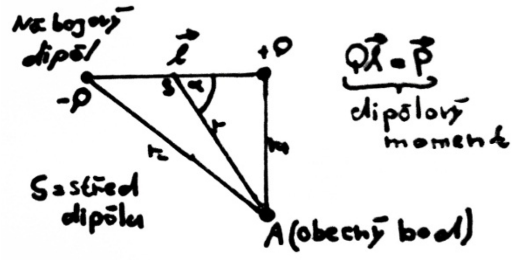
$\boxed{E = \frac{\text{б}}{2\varepsilon}}$ NEZÁVISÍ NA VZDÁLENOSTI OD NABITÉ ROVINY (ELST.POLE JE HOMOGENNÍ)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{б} & & \\
\leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\
\leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\
\leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\
E & & & E & E
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & -\text{б} & & \\
\rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\
\rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\
\rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\
 & & & E & E
\end{array}$$



Problém No4

ZADÁNÍ: ELST.POLE NÁBOJOVÉHO DIPÓLU (APLIKACE POTENCIÁLU BODOVÉHO NÁBOJE)



POTENCIÁL ELST.POLE DIPÓLU V MÍSTĚ A:

$$\varphi(A) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{+Q}{r^+}\right)_{potenciál\ náb.(+Q) ve\ vzdál. r_+} + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{-Q}{r^-}\right)_{potenciál\ náb.(-Q) ve\ vzdál. r_-}$$

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * Q\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}$$

- SOUSTŘEDÍME SE POUZE NA BODY A, KTERÉ JSOU DALEKO OD DIPÓLU, TEDY $r^+ \to l \,\&\, r^- \to l$
  PAK PLATÍ : $r^+ r^- \cong r^2$ & $r^- - r^+ \cong l * cos\alpha$

$$\varphi(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{r^- - r^+}{r^+ r^-} \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{l * cos\alpha}{r^2} = \left(\frac{Q * l * r * cos\alpha}{4\pi\varepsilon r^3}\right)_{=\vec{l} * \vec{r} \gg l * r * cos\alpha} = \frac{Q\vec{l} * \vec{r}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{(\vec{P} * \vec{r})}{4\pi\varepsilon r^3}$$

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \frac{(\vec{P} * \vec{r})}{4\pi\varepsilon r^3}}$$

POTENCIÁL ELST.POLE DIPÓLU S MOMENTEM $\vec{P}$ V MÍSTĚ $\vec{r}$ VŮČI STŘEDU DIPÓLU

INTENZITA ELST.POLE DIPÓLU POMOCÍ GRADIENTU POTENCIÁLU:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} grad\left(\frac{\vec{P} * \vec{r}}{r^3}\right)$$

SPOČTEME DETAILNĚ X-SOVOU SLOŽKU INTENZITY:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{2}{2x}\left(\frac{\vec{P} * \vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{(\vec{P} * \vec{r}) * \frac{2}{2x}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3} * \frac{2}{2x}(\vec{P} * \vec{r})\right\}$$

$$\frac{2}{2x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(-\frac{3}{r^4}\right) * \frac{2}{2x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)_{=r} = -\frac{3}{r^4} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} * 2x = \boxed{-\frac{3}{r^4} * \frac{x}{r}}$$

$$\frac{2}{2x}(\vec{P} * \vec{r}) = \frac{2}{2x}\{p_x * x + p_y * y + p_z * z\} = p_x$$

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{(\vec{P} * \vec{r}) * -\frac{3x}{r^5} + \frac{1}{r^3} p_x\right\} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\frac{3}{r^2}(\vec{P} * \vec{r})x - p_x\right\}}$$

ANALOGICKY:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left\{\frac{3x}{r^2}(\vec{P} * \vec{r})y - p_y\right\} \quad \& \quad E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon r^3}\left\{\frac{3x}{r^2}(\vec{P} * \vec{r})z - p_z\right\}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^3} * \left\{\frac{3}{r^2}(\vec{P} * \vec{r})\vec{r} - \vec{P}\right\}$$ INTENZITA ELST.POLE DIPÓLU

SPACIRM

Problém No5

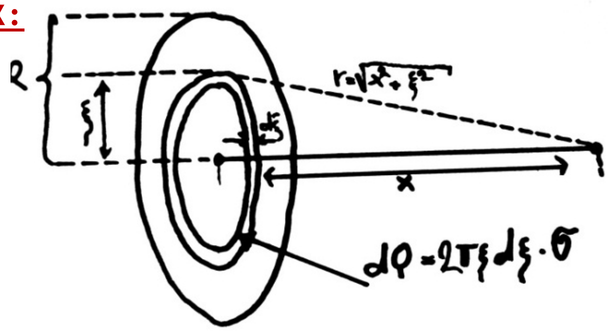
ZADÁNÍ: KRUHOVÁ DESKA O POLOMĚRU **R** JE ROVNOMĚRNĚ NABITÁ NÁBOJE PLOŠNOU HUSTOTOU $\boldsymbol{\rho}$ (=KONSTANTA)

ÚKOL:

1. POTENCIÁL A INTENZITA ELST.POLE V KOLMÉ VZDÁLENOSTI **X** OD STŘEDU DESKY
2. LIMITNÍ HODNOTU INTENZITY PRO ∞ - VELKOU DESKU (R > ∞)

(OPĚT APLIKACE POTENCIÁLU BOD. NÁBOJE)

POTENCIÁL VYTVOŘ.NÁB. DQ VE VZDÁLENOSTI X:



$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} * \frac{2\pi\xi d\xi * \rho}{\sqrt{x^2+\xi^2}}$$

$$d\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon} * \frac{\xi * d\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}}$$

CELKOVÝ POTENCIÁL OD VŠECH NÁBOJŮ DESKY:

$$\varphi = \int_{\substack{plocha\\desky}} d\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon}\int_0^R \frac{\xi}{\sqrt{x^2+\xi^2}} d\xi = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(\sqrt{R^2+x^2} - \sqrt{0+x^2}\right)$$

$$\varphi = \frac{\rho}{2\varepsilon}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$$

POTENCIÁL ELST.POLE KRUHOVÉ DESKY O OLOMĚRU **R** V KOLMÉ VZDÁLENOSTI **X**

!!D.CV. = DOPOČÍTAT INTENZITU JAKO GRADIENT φ!!

Problém No6

ZADÁNÍ: UVAŽUJME ELST.POLE DVOU PARALELNÍCH OPAČNĚ NABITÝCH ROVIN A HUSTOTOU NÁBOJE O VELIKOSTI Ø.

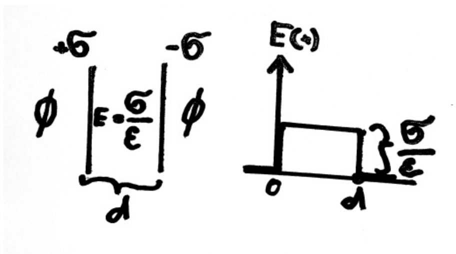
ÚKOL:
1) PROSTOROVÉ ROZLOŽENÍ INTENZITY POLE.
2) SÍLU PŮSOBENÍ JEDNÉ ROVINY NA DRUHOU
3) ENERGII POLE MEZI ROVINAMI.

Z VÝSLEDKU ŘEŠENÍ PROBLÉMU NO 3 VÍME, ŽE NABITÁ ROVINA VYTVÁŘÍ HOMOGENNÍ POLE:

$$\begin{array}{cccccc} & & б & & \\ \leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & | & \rightarrow & \rightarrow \\ E\frac{б}{2\varepsilon} & & & E\frac{б}{2\varepsilon} & E\frac{б}{2\varepsilon} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & -б & & \\ \rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & | & \leftarrow & \leftarrow \\ E\frac{б}{2\varepsilon} & & & E\frac{б}{2\varepsilon} & E\frac{б}{2\varepsilon} \end{array}$$

1) CELKOVÉ POLE ROVIN (+б) A (-б)

$$\begin{array}{ccccccc} & & б & & & -б & \\ \leftarrow & \leftarrow & | & E_+ & & | & E_+ \\ E_+ & E_+ & | & \rightarrow & E_- & | & \rightarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & | & & \rightarrow & | & E_- \\ E_- & E_- & | & & & | & \leftarrow \\ E_{výs} = 0 & & | & E_{výs} = \frac{б}{2\varepsilon} + \frac{б}{2\varepsilon} = \frac{б}{\varepsilon} & & | & E_{výs} = 0 \end{array}$$



2) SÍLA PŮSOBENÍ JEDNÉ ROVINY NA DRUHOU

$$\begin{array}{ccccc} б & \vec{n} & & -б & \\ | & \rightarrow & & | & \\ | & & & | & S \\ | \rightarrow & & \leftarrow & | & \\ | & E_+\frac{б}{2\varepsilon}\vec{n} & & | & \\ & & & \uparrow & \\ & & & Q = (-б)S & \end{array}$$

„←" $\vec{F} = Q\vec{E}_+ = (-б)S\frac{б}{2\varepsilon}\vec{n}$

DÁLE VÍME: $E = \frac{б}{\varepsilon} \rightarrow б = \varepsilon E$

E JE CELKOVÁ INTENZITA POLE

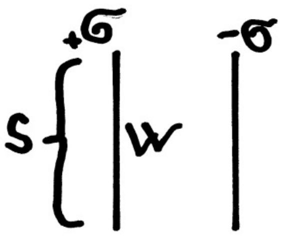
$$\vec{F} = -\frac{S}{2\varepsilon}(\varepsilon E)^2\vec{n} = -\frac{1}{2}\varepsilon S E^2\vec{n}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon S E^2\vec{n}}$$

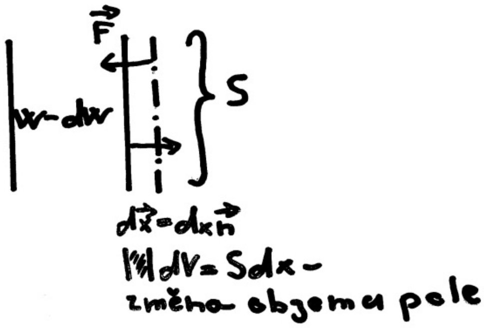
ZNAMÉNKO (-) => SÍLA $\vec{F}$ PŘIBLIŽUJE ROV. $(-б)$ K ROV $(+б)$ => SNIŽUJE EL.POLE

3) ENERGII POLE MEZI ROVINAMI

POČÁTEČNÍ STAV:



KONCOVÝ STAV:



$$\underbrace{(w-dw)}_{\text{koncová energie pole}} - \underbrace{w}_{\text{počáteční energie pole}} = \underbrace{\vec{F} * d\vec{x}}_{\text{mechanická práce síly}}$$

$dW = \left(-\frac{1}{2}\varepsilon S E^2 \vec{n}\right) dx\vec{n} = \frac{1}{2}\varepsilon S E^2 dx$ KDE Sdx JE DV

$dW = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$

$\boxed{\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$ => OBJEMOVÁ HUSTOTA ENERGIE POLE

$W = \int_V \frac{dW}{dV} dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$ => ENERGIE POLE V OBJEMU V.

PŘÍKLAD – ENERGIE ELST. POLE ROVINNÉHO KONDENZÁTORU

$$W = \int_{V=S_{plocha} d_{\substack{vzdálenost \\ rovin}}} \frac{1}{2}\varepsilon \underbrace{E^2_{konstanta}}_{\frac{6}{2\varepsilon}} dV = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 * \int_{Sd} 1 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd$$

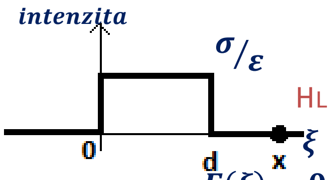
Problém No7

ZADÁNÍ: UVAŽUJME ROV. KONDENZÁTOR S PLOŠNOU HUSTOTOU NÁBOJE σ PLOCHOU ROVIN **S** A JEJICH VZDÁLENOSTÍ **D**.

ÚKOL:

A) PROSTOROVÉ ROZLOŽENÍ POTENCIÁLU POLE
B) NAPĚTÍ MEZI ROVINAMI A KAPACITU KONDENZÁTORU
C) MECHANICKOU PRÁCI POTŘEBNOU K NABITÍ KONDENZÁTORU
D) ZÁKON PŘEMĚNY A ZACHOVÁNÍ ELST.ENERGIE

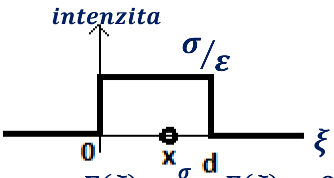
1) PROSTOROVÉ ROZLOŽENÍ POTENCIÁLU POLE



HLEDÁME POTENCIÁL V BODĚ $x \geq d$

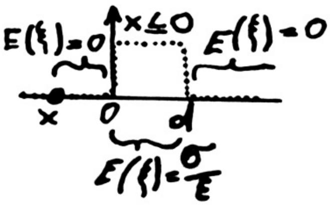
$E(\xi) = 0$

$$\varphi(x) = -\int_{\infty}^{x} E(\xi)d\xi = -[konstanta]_{\infty}^{x} = 0$$

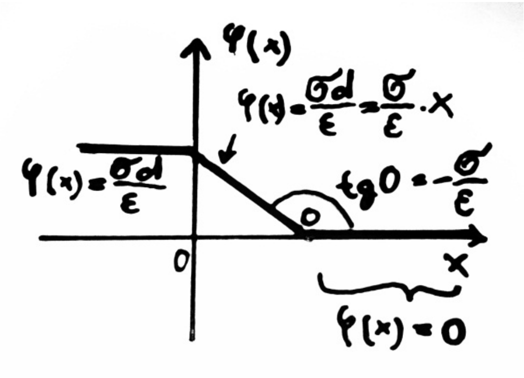


$E(\xi) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $E(\xi) = 0$

$$\varphi(x) = \left(-\underbrace{\int_{\infty}^{d} E(\xi)d\xi}_{0}\right) + \left(-\int_{d}^{x} \underbrace{E(\xi)}_{\frac{\sigma}{\varepsilon}}d\xi\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\underbrace{\int_{d}^{x} 1d\xi}_{(d-x)} = \frac{\sigma}{\varepsilon}(d-x)$$



$$\varphi(x) = \left(-\underbrace{\int_{\infty}^{d} 0d\xi}_{0}\right) + \left(-\int_{d}^{0} \frac{\sigma}{\varepsilon}d\xi\right) + \left(-\underbrace{\int_{0}^{x} 0d\xi}_{0}\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\underbrace{\int_{d}^{0} d\xi}_{(0-d)} = \frac{\sigma}{\varepsilon}d \to kons.$$



MEZI ROVINAMI JE KONSTANTNÍ ROZDÍL POTENCIÁL (=NAPĚTÍ)

$$!\ napětí \bigcup \stackrel{det}{=} \varphi\left(\underset{\frac{\sigma d}{\varepsilon}}{x=0}\right) - \varphi\left(\underset{0}{x=d}\right) = \frac{\sigma d}{\varepsilon}\ !$$

TENTÝŽ VÝSLEDEK MŮŽEME VYJÁDŘIT PŘÍMO POMOCÍ INTENZITY, ANIŽ ZNÁME PROSTOROVÉ ROZLOŽENÍ POTENCIÁLU $U = \int_0^d E(x)dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon}dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$

2) NAPĚTÍ MEZI ROVINAMI A KAPACITU KONDENZÁTORU

- NAPĚTÍ U UMOŽŇUJE SHROMAŽĎOVAT NÁBOJ : $\underset{náboj}{Q} = \underset{konstanta}{C}\ \underset{napětí}{U}$

$\boxed{C \stackrel{det}{=} \left(\frac{Q}{U}\right)}$ KAPACITA KONDENZÁTORU

PŘÍKLAD: KAPACITA ROVNOMĚRNÉHO KONDENZÁTORU $\left|C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\varepsilon}} = \varepsilon * \frac{S}{d}\right|$

3) PRÁCI POTŘEBNOU K NABITÍ KONDENZÁTORU

$$dA = \bigcup(Q')dQ'$$

- ELEMENT.PRÁCE, KTEROU MUSÍME VYKONAT, ABYCHOM NA KONDENZÁTOR S NÁBOJEM Q, ODPOVÍDAJÍCÍM NAPĚTÍM UQ‘, PŘENESLI DOSTATEČNÝ NÁBOJ DQ‘
- CELKOVÁ PRÁCE PRO NABITÍ KONDENZÁTORU: NÁBOJ Q:

$$A = \int dA = \int_0^Q \bigcup(Q')dQ'$$

- NECHŤ KAPACITA KONDENZÁTORU JE C

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C} \quad \rightarrow \quad U(Q') = \frac{Q'}{C}$$

$$A = \int_0^Q \frac{Q'}{C}dQ' = \frac{1}{C}\int_0^Q Q'dQ' = \frac{1}{C}\left[\frac{Q'^2}{2}\right]_0^Q = \boxed{\frac{1}{2C}Q^2}$$

PŘÍKLAD:

A… PRO ROVNOMĚRNÝ KONDENZÁTOR

Q=σS

C=$\varepsilon\frac{s}{d}$

A=$\frac{1}{2}*\frac{d}{\varepsilon s}(\sigma s)^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 sd$

POROVNEJME S ENER.ELST.POLE KONDENZÁTORU

$W=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 sd$

A=W

4) PŘEMĚNY A ZACHOVÁNÍ ELST.ENERGIE

$$\underset{\text{mech. práce potřebná k nabití}}{\overset{A}{\frac{Q^2}{2}}} = \underset{\text{Energie elst. pole nabitého kondenzátoru}}{\overset{W}{\int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV}}$$

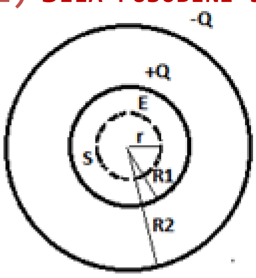
- ZÁKON PŘEMĚNY A ZACHOVÁNÍ ELST.ENERGIE

Problém No8

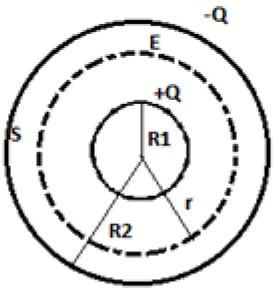
Zadání: Dvě soustředěné tenkostěnné sféry o poloměru R1 a R3 jsou nabity náboji (+Q) a (-Q)

Úkol:
1) Najdeme prostorové rozložení intenzity pole a ukažme, že sféry tvoří kondenzátor.
2) Spočteme napětí mezi sférami a kapacitu kondenzátoru.
3) Dokažme platnost zákona proměny a zachování elst.ene.

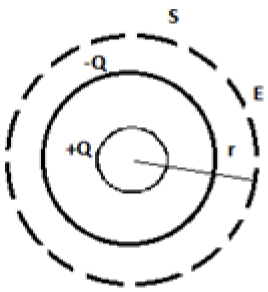
1) Síla působení jedné roviny na druhou



$$r < R_1 < R_2$$
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon} Q$$
$$E = 0$$
$$(0 \leq r \leq R_1)$$

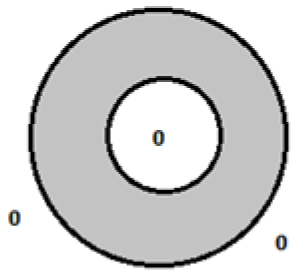


$$R_1 < r < R_2$$
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon}(+Q)$$
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2}$$
$$R_1 < r < R_2$$



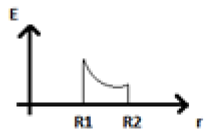
$$r > R_2$$
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon}((+Q) + (-Q))$$
$$E = 0$$
$$r > R_2$$

Příklad – Pro rovinný kondenzátor



$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2}$$
$$R_1 < r < R_2$$

Sférický kondenzátor



2) Napětí mezi sférami

$$U = \int_{R1}^{R2} E(r)dr = \frac{Q}{4\pi} \int_{R1}^{R2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[\left(-\frac{1}{R_2}\right) - \left(-\frac{1}{R_1}\right)\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

$$C = \frac{Q}{U} * \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}} = 4\pi\varepsilon * \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

3) Dokažme platnost zákona proměny a zachování elst.ener

$$A = \frac{1}{2} * \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} * \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} * \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

$$W = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV = \frac{Q}{4\pi} \int_{R1}^{R2} \frac{1}{2} \varepsilon \Bigg(\underbrace{\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2}}_{= E}\Bigg)^2 * \underbrace{(4\pi\varepsilon dr)}_{= dV} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} * \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

$$\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} * \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = A = W$$

Zákon funguje!

Problém No9

ZADÁNÍ: ENERGIE ELST.POLE KOULE O POLOMĚRU **R**, JEJÍŽ CELKOVÝ NÁBOJ **Q** JE ROVNOMĚRNĚ ROZLOŽEN PO CELÉM OBJEMU $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

- Z VÝSLEDKU PROBLÉMU 2 VÍME : $E_{uvnitř}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} * r \; (0 \leq r \leq R)$

$$E_{vně}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2} \; (r \geq R)$$

$$W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \int_{\substack{vnitřek\\koule}} \frac{1}{2}\varepsilon E_{uvnitř}^2(r) dV + \int_{\substack{vnějšek\\koule}} \frac{1}{2}\varepsilon E_{vně}^2(r) dV = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} * r\right)^2 4\pi r^2 dr +$$

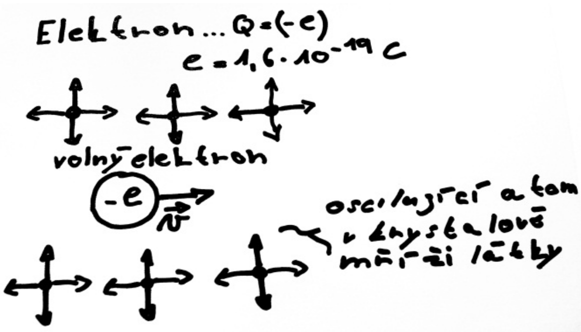
$$+ \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon} * \frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6}\int_0^R r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} * \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R * \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^6} * \frac{1}{5}R^5 + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} * \frac{1}{R} = \underbrace{\frac{1}{5} * \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}}_{El.\,pole\;uvnitř\;koule} + \underbrace{\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon} * \frac{1}{R}}_{El.\,pole\;vně\;koule} = \boxed{\boldsymbol{\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon} * \frac{1}{R} = W}}$$

Energie elst. pole koule o poloměru R, rovno. nabité nábojem Q

Problém No10

Zadání: Pohyb volných elektronů v krystalové mříži pevné látky



Volné elektrony se uvedou do pohybu, vložíme-li látku do vnějšího el.pole o intenzitě $\vec{E}$.
Na elektronu s nábojem (-e) pak působí síla
$\vec{F}_{vnější} = (-e)\vec{E}$

Pozn.
Oscilující atomy však brání elektronům v pohybu, kladou jim určitý odpor, popsaný silou:
$\vec{F}_{odpor} = -\beta m\vec{v}$
$\vec{v}$ … okamžitá rychlost elektronu
m … hmotnost elektronu
β … koeficient odporu krys. mřížky

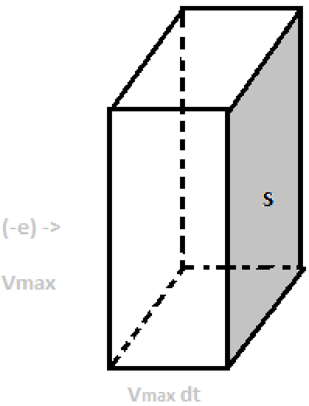
$\vec{F}_{celk} = \vec{F}_{vnější} + \vec{F}_{odpor}$

$$\boxed{\vec{F}_{celk} = (-e)\vec{E} - \beta m\vec{v}}$$

S rostoucí rychlostí $\vec{v}$ se velikost celkové síly zmenšuje až pro určitou maximální rychlost $\vec{v}_{max}$ dosáhne nuly. $(-e)\vec{E} - \beta m\vec{v}_{max} = 0$

$$\boxed{\vec{v}_{max} = \frac{-e}{m\beta}\vec{E}}$$ maximální rychlost elektronu v krystal. mříži

Nyní zkoumejme proud elektronů $I = \frac{dq}{dt}$ (det) prošlých plochou **S**.



Počet volných elektronů v jednotce objemu látky n_e.
Plochou **S** projde rychlostí $\vec{v}_{max}$ za dobu dt tolik elektronů n_e
kolik jich je v objemu $dV = S * v_{max} * dt$.

$$\boxed{dN = n_e * dV = n_\varepsilon * S * v_{max}\, dt}$$

Tyto elektrony přenesou za dobu dt náboj

$$\boxed{dQ = (-e)dN = (-e) * n_e * S * v_{max}\, dt}$$

čímž vytvoří proud $$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = (-e) * n_e * S * v_{max}}$$

PROUD ELEKTRONŮ PROCHÁZEJÍCÍ JEDNOTKOU PLOCHY V URČITÉM SMĚRU $\vec{n}$ SE OZNAČUJE JAKO VEKTOR PROUDOVÉ HUSTOTY $\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{n}$

$$\boxed{\vec{j}} = \frac{(-e) * n_e * S * v_{max}}{S} * \vec{n} = (-e) * n_e * \underbrace{v_{max} * \vec{n}}_{\vec{v}_{max}} = \boxed{(-e) * n_e * \vec{v}_{max}}$$

DOSADÍME:

$$\vec{j} = (-e) * n_e * \frac{-e}{m\beta} * \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{e^2 n_e}{m\beta} * \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = \sigma * \vec{E}}$$ OHMŮV ZÁKON

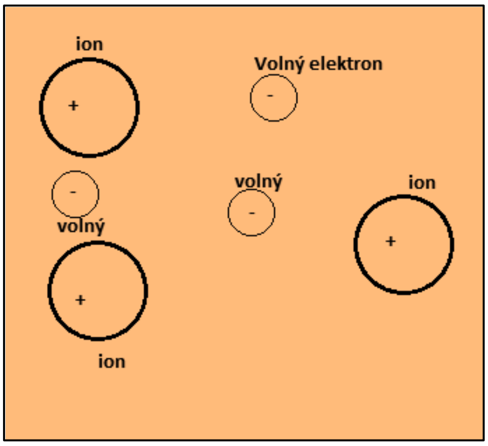
$$\boxed{\sigma = \frac{e^2 n_e}{m\beta}}$$ MĚRNÁ VODIVOST LÁTKY

Problém No11

Zadání: Oscilace plazmatu a jeho frekvence

Plazma = ionizovaný plyn

⇓



Rovnoměrný stav plazmatu: $n^{-} = n^{+} = n^{0}$

$n^{-} \rightarrow$ počet volných elek. v objemové jednotce

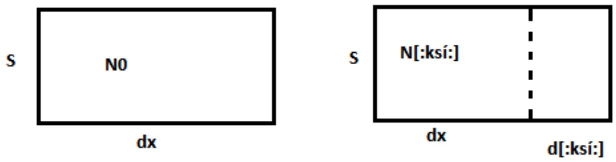
$n^{+} \rightarrow$ počet iontů v objemové jednotce

- Ionty jsou těžké→zůstávají v klidu $n^{+} = n^{0}$
- Elektrony jsou lehké→snadno se rozptilují i nepatrnou výchylkou ξ z rovnovážného stavu. Tím dojde k následujícím změnám : $n^{-} = n^{\xi} \rightarrow$ nový počet elektronů v objemové jednotce.

- V plazmatu tak vzniká nerovnovážná nábojová hustota elektronů:

$$\rho\xi = \left(n^{\xi} - n^{0}\right)(-e)$$

- Současně se však zachovává celkový počet elektronů před a po výchylce:



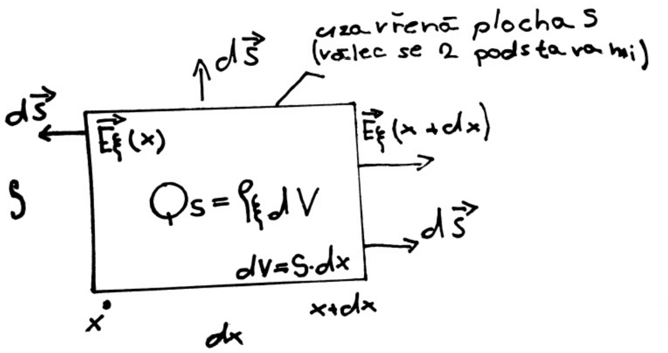
$$n^{0} S dx = n^{\xi} S(dx + d\xi)$$

$$n^{\xi} = n^{0} \frac{dx}{dx + d\xi} = n^{0} \frac{1}{1 + \frac{d\xi}{dx}} \cong n^{0} - n^{0} \frac{d\xi}{dx}$$

$$\rho\xi = \left(n^{\xi} - n^{0}\right)(-e) = e * \left(n^{\xi} - n^{0}\right) = e * \left(n^{0} - \left(n^{0} - n^{0} \frac{d\xi}{dx}\right)\right)$$

$$\boxed{\rho\xi = e * n^{0} \frac{d\xi}{dx}} \quad (1)$$

- Tato nerovnovážná hustota elektronu vyvolá vznik elektrického pole o intenzitě E_{ξ} , kterou zjistíme z GCZ.



$$\oiint \vec{E}_\xi * d\vec{S} = E_\xi(x)S * \underbrace{\cos\pi}_{=-1} + E_\xi(x+dx) * S * \underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{0}_{\text{tok plášťěm}} = \left(E_\xi(x+dx) - E(x)\right) * S$$

$$\oiint \vec{E}_\xi * d\vec{S} = \Big[\Big(\underbrace{E_\xi(x) + \frac{dE_\xi}{dx}dx + \cdots}_{\text{Toylerova řada pro } E\xi(x+dx)}\Big) - E_\xi(x)\Big] * S = \frac{dE\xi}{dx} * dxS = \frac{dE\xi}{dx}dV$$

GCZ:

$$\oiint \vec{E}_\xi * d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon}\rho\xi dV$$

$$\frac{dE_\xi}{dx}dV = \frac{1}{\varepsilon}\rho\xi dV \Rightarrow \boxed{\frac{dE_\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\rho\xi} \; (2)$$

$$\frac{dE_\xi}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} * e * n^0 * \frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \frac{dE_\xi}{d\xi} = \frac{en^0}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{E_\xi = \frac{en^0}{\varepsilon}\xi}$$

Intenzita pole v závislosti na ξ

- NA ELEKTRONU S NÁBOJEM (-E) TOTO PŮSOBÍ SILOU

$$F_\xi = (-e)E_\xi = (-e) * \frac{en^0}{\varepsilon}\xi$$

$$\boxed{F_\xi = \frac{-e^2 n^0}{\varepsilon}\xi}$$

SOUČASNĚ PLATÍ ZÁKON SÍLY : $F_\xi = \underbrace{m}_{\text{hustota elektronu}} * \underbrace{\frac{d^2\xi}{dt^2}}_{\text{zrychlení elektronu}}$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{e^2 n^0}{\varepsilon}\xi \quad /* \frac{1}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{e^2 n^0}{\varepsilon m}\xi = 0} \Rightarrow_{\text{řešení}} \xi(t) = A_{\text{amplituda}} * \sin\left\{\underbrace{\sqrt{\frac{e^2 n^0}{m\varepsilon}}}_{\Omega \text{ frek.}} t + \Phi_{\text{fáze}}\right\}$$

Harmonická oscilace

ZÁVĚR: VÝCHYLKY ELEKTRONŮ V PLAZMATU KONAJÍ HARMONICKÉ OSCILACE S FREKVENCÍ $\Omega = \sqrt{\frac{e^2 n^0}{m\varepsilon}}$

Problém No12

ZADÁNÍ: A) MAGNETICKÉ POLE A JEHO ZÁKONY, SROVNÁNÍ S ELEKT.POLEM
B) MAXWELLOVY ROVNICE

A) MAGNETICKÉ POLE A JEHO ZÁKONY, SROVNÁNÍ S ELEKT.POLEM

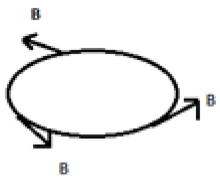
INFO: MAG.POLE JE TVOŘENO PROUDEM POHYBUJÍCÍCH SE NÁBOJŮ.
ZÁKLADNÍ VELIČINA – MAGNETICKÁ INDUKCE $\vec{B}$

- ZÁKONY

1) **AMPERŮV ZÁKON (AZ)**
   - VĚTA O VÍROVÉM CHARAKTERU MAG.POLE

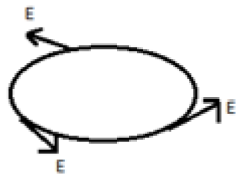
$$\oint_l \vec{B} * d\vec{l} = \mu Il \quad Il \rightarrow elek.proud\ tekoucí\ vnit.plochy\ vymezené\ uzavř.křivkou\ l$$
$$\mu \rightarrow magnetická\ pemeabilita\ prostředí$$
$$Lstrana - Cirkulace\ mag.indukce\ podél.lib.uzavřené\ křivky\ l$$

- POROVNÁNÍ



$$\oint_l \vec{B} * d\vec{l} = 0$$

VÍROVÝ CHARAKTER MAG.POLE



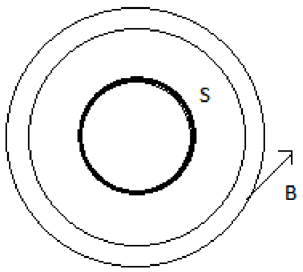
$$\oint_l \vec{E} * d\vec{l} = 0$$

NEVÍROVÝ CHARAKTER ELEK.POLE

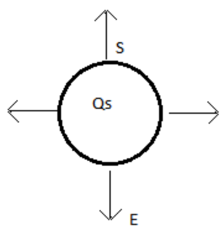
2) **ZÁKON O NEEXISTENCI MAG.NÁBOJE**
   - VĚTA O NEZŘÍDLOVÉM CHARAKTERU MAGNETICKÉHO POLE

$$\oint_S \vec{B} * d\vec{S} = 0 \quad 0 \rightarrow mag.pole\ nemá\ zřídlo, tj.neexistuje\ analog.el.náboje$$
$$Lstrana\ - Tok\ mag.indukce\ lib.uzavřenou\ plochou\ S$$

- POROVNÁNÍ



MAG.POLE (NEZŘÍDLOVÉ)



ELEK.POLE (ZŘÍDLOVÉ)

3)

$$\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2\mu}B^2}$$ OBJEMOVÁ HUSTOTA ENERGIE MAG. POLE

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{mag} = \int_V \frac{1}{2\mu}B^2 dV}$$ ENERGIE MAG. POLE V OBJEMU V

ANALOG. VZTAHŮ $\boxed{W = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \;;\; W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV}$ PRO ELEK.POLE

4) FARADAYŮV ZÁKON ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE

$$U = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\int_S \vec{B} * d\vec{s}\right)}_{Tok\ mag.\ indukce\ neuzavřenou\ plochou}$$

U JE ELEKTRICKÉ NAPŠTÍ MEZI BODY NA KRUŽNICI PLOCHY S

VZNIK ELEKTROMAG. POLE

B) MAXWELLOVY ROVNICE

1) AMPERŮV ZÁKON

$$\oint \vec{B} * dl = \mu I l \quad \rightarrow \text{ INTEGRÁLNÍ FORMA}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{\vec{\nabla} x \vec{B}}{rotace\vec{B}} = \mu\left(\vec{j} + \varepsilon * \frac{\vartheta \vec{E}}{\vartheta x}\right) \quad \vec{j} - vektor\ proudové\ hustoty$$

$$\rightarrow dif.tvar\ AZ(= 1 maxwellova\ rovnice) \qquad \vec{\nabla} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}\vec{z}; \frac{\vartheta}{\vartheta y}\vec{J}; \frac{\vartheta}{\vartheta z}\vec{k}\right)$$

2) FARADAYŮV ZÁKON

$$U = -\frac{d}{dt}\left(\int \vec{B} * d\vec{s}\right) \rightarrow \text{ INTEGRÁLNÍ FORMA}$$

$$\Downarrow$$

$$rotace\vec{E} = -\frac{\vartheta \vec{B}}{\vartheta x}$$

$$\rightarrow dif.tvar\ (= 2 maxwellova\ rovnice)$$

3) NEZŘÍDLOVOST MAG.POLE

$$\oint \vec{B} * d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \text{ INTEGRÁLNÍ FORMA}$$

$$\Downarrow$$

$$divergence\vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\vartheta * Bx}{\vartheta x} + \frac{\vartheta * By}{\vartheta y} + \frac{\vartheta * Bz}{\vartheta z}\right)$$

$$\rightarrow dif.tvar\ (= 3 maxwellova\ rovnice)$$

4) ZŘÍDLOVOST ELEK.POLE (=GCZ)

$$\oint \vec{E} * d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon} Qs \quad \rightarrow \text{ INTEGRÁLNÍ FORMA}$$

$$\Downarrow$$

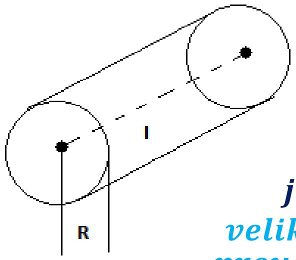
$$divergence\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho_{nábojová\ hustota}$$

$$\rightarrow dif.tvar\ (= 4 maxwellova\ rovnice)$$

Problém No13

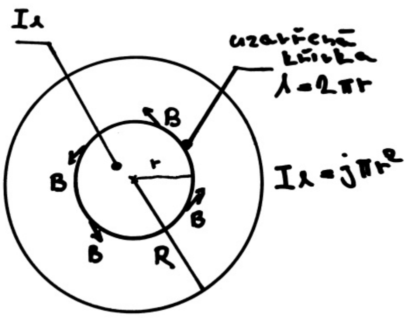
ZADÁNÍ: PLNÝM VÁLCOVÝM VODIČEM O POLOMĚRU **R** PROTÉKÁ EL. PROUD **I** ROVNOMĚRNĚ ROZLOŽENÝ PO CELÉM PRŮŘEZU.

ÚKOL: JAK ZÁVISÍ VELIKOST MAG. INDUKCE NA VZDÁLENOSTI **R** OD OSY VODIČE?



$$\underbrace{j}_{\text{velikost proudové hustoty}} = \frac{I}{\pi R^2}$$

A) $0 \le r \le R$



PODLE AMPEROVA ZÁKONA: $\underbrace{\oint \vec{B} * d\vec{l}}_{2\pi r B} = \mu I l$

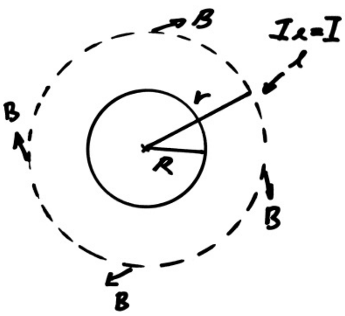
$$\boxed{2\pi r B = \mu j \pi r^2}$$

$$B = \frac{1}{2}\mu * \frac{I}{\pi R^2} * r$$

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi R^2} * r$$

$$0 \le r \le R$$

B) $r^2 \ge R$

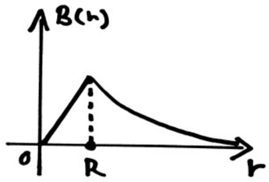


$$\boxed{B * 2\pi r = \mu I}$$

$$\Downarrow$$

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi} * \frac{1}{r}$$

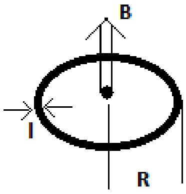
$$r \ge R$$



Problém No14

ZADÁNÍ: Z VÁLCOVÉHO DRÁTU O POLOMĚRU r, VYROBENÉHO Z MATERIÁLU O MĚRNÉ VODIVOSTI σ JE VYTVOŘENA KRUHOVÁ SMYČKA O POLOMĚRU R A UMÍSTĚNA DO MAGNETICKÉHO POLE O INDUKCI B, JEJÍŽ VEKTOR JE KOLMÝ K PLOŠE SMYČKY

ÚKOL: JAKÉ MNOŽSTVÍ NÁBOJE PROJDE SMYČKOU PŘI VYPNUTÍ MAGNETICKÉHO POLE?



➔ PODLE FARADEYOVA ZÁKONA VZNIKNE VE SMYČCE EL.NAPĚTÍ

$$\boxed{U = -\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\int \vec{B} * d\vec{s}}_{B\pi R^2}\Big) = -rR^2\frac{dB}{dt}}$$

➔ NAPĚTÍ SOUVISÍ S INTENZITOU POLE:

$$\boxed{U = \int_0^{2\pi R} \vec{E} * d\vec{l} = 2\pi R\, E}$$

$$\boxed{-\pi R^2 * \frac{dB}{dt} = 2\pi R\, E} \rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}R * \frac{dB}{dt}}$$

➔ INTENZITA E VYVOLÁVÁ PROUDOVOU HUSTOTU

$j \quad = \sigma E (Ohmuv\ zákon)$

$\downarrow \qquad \rightarrow Dosadíme\ E \rightarrow E = -\frac{1}{2}R * \frac{dB}{dt}$

$\frac{I}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad plocha\ drátu$

$$\frac{I}{\pi r^2} = \sigma\left(-\frac{1}{2}R * \frac{dB}{dt}\right)$$

$\Downarrow$

$$I = -\frac{1}{2}\sigma R\pi r^2 * \frac{dB}{dt}\ \Big\}$$

Tímto proudem projde za dobu dt ve smyčce náboj

$$dQ = I dt = -\frac{1}{2}\sigma R\pi r^2 dB$$

!CELKOVÝ NÁBOJ : $\boxed{Q = \int dQ = -\frac{1}{2}\sigma R\pi r^2 \int_B^0 dB = \frac{1}{2}\sigma R\pi r^2 B}$!

Problém No15

ZADÁNÍ: ŠÍŘENÍ ELE.MAG.POLE A PŘENOSU JEHO ENERGIE VE VAKUU
ŘEŠENÍ POMOCÍ MAXWELLOVO ROVNIC

- VE VAKUU NETEČOU ŽÁDNÉ PROUDY $(\vec{J} - \vec{0})$ A NEJSOU ŽÁDNÉ NÁBOJE $(\rho = 0)$

POZNÁMKA AUTORA SPACIRM:
$\vartheta \rightarrow Takov\acute{e}\ to\ obr\acute{a}cen\acute{e}\ G$

MAXWELLOVI ROVNICE

$$\boxed{\begin{aligned} rot\vec{B} &= \mu\varepsilon\frac{\vartheta\vec{E}}{\vartheta x} \\ rot\vec{E} &> -\frac{\vartheta\vec{B}}{\vartheta x} \\ div\vec{B} &= 0 \\ div\vec{E} &= 0 \end{aligned}}$$

$$rot\left(rot\vec{E}\right) - \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(rot\vec{B}\right)$$

$$\underset{matematika}{rotrot\vec{E}} = -\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\mu\varepsilon\frac{\vartheta\vec{E}}{dt}\right)$$

$\downarrow$

$$gran\,div\vec{E} - \Delta\vec{E}$$

0 $\downarrow$

$$\Delta = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_{x^2}} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta_{y^2}} = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_{z^2}}$$

Laplacey

$$-\Delta\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\vartheta^2}{\vartheta_{x^2}}\vec{E}$$

$$\boxed{\left(\frac{\vartheta^2}{\vartheta_{x^2}} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta_{y^2}} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta_{z^2}}\right)\vec{E} = \mu\varepsilon\frac{\vartheta^2}{\vartheta_{x^2}}\vec{E}}$$

VLNOVÁ ROVNICE S FÁZOVOU RYCHLOSTÍ $C = \frac{1}{\mu\varepsilon} \doteq 3 + 10^8[ms^{-1}]$