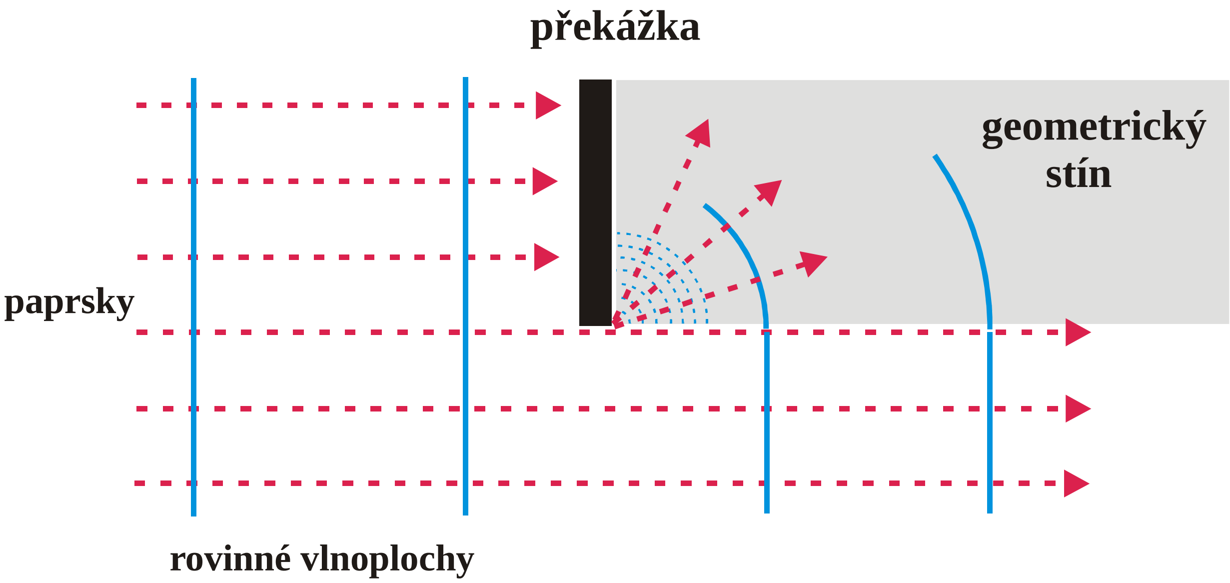
Difrakce vlnění (světla)

Jestliže pozorujeme dopad světla na překážku (například tvaru velké desky, viz obr.), konstatujeme především, že za překážkou vzniká stín a považujeme to za důsledek přímočarého šíření světla.
Přímočaré šíření světla v homogenním izotropním prostředí se projevuje v mnoha dalších situacích a je na něm založen fyzikální obor zvaný ***geometrická optika***.
Vyšetříme-li však přesněji rozhraní mezi světlem a geometrickým stínem, zjistíme, že světlo vniká i do oblasti geometrického stínu. Tato odchylka od přímočarého šíření se nazývá ***ohyb vlnění (difrakce)*** a je charakteristickou vlastností každého vlnění, tedy i mechanického či akustického vlnění.



Difrakce je jevem zásadní důležitosti :

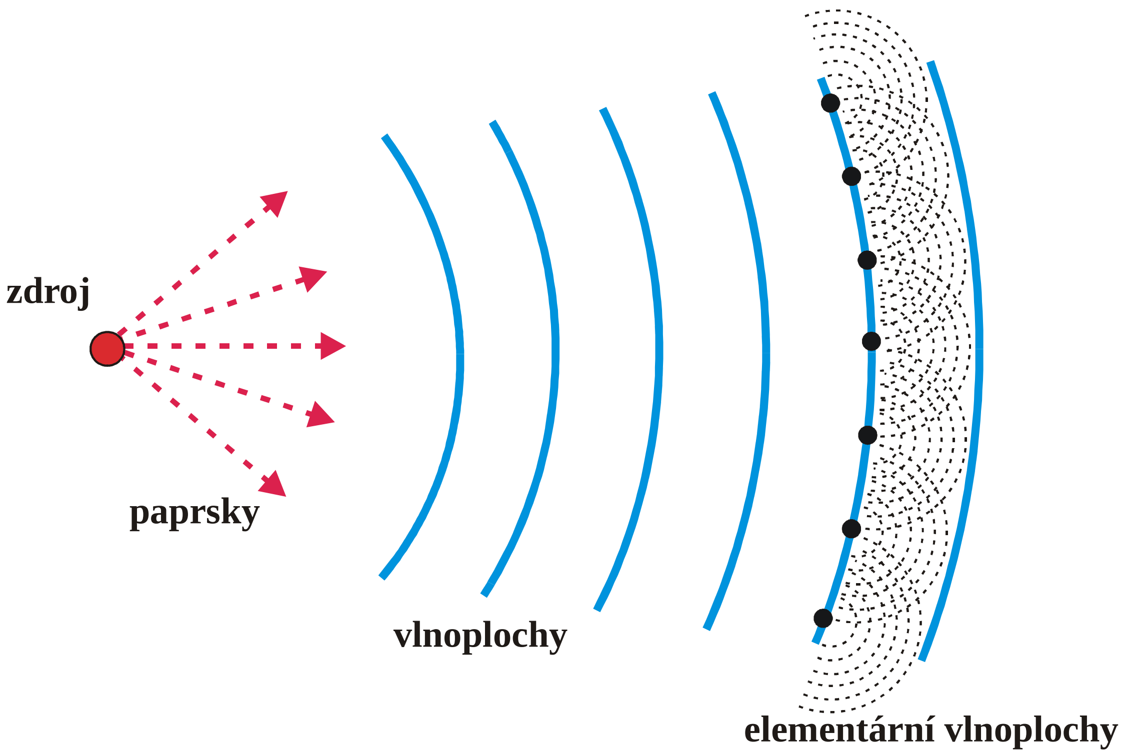
- spolu s interferencí je typickým jevem pro vlnění (byly tak dokázány vlnové vlastnosti světla – Youngův pokus, 1801)
- později byly s jeho pomocí objeveny vlnové vlastnosti mikročástic (difrakce elektronů na krystalické mřížce, 1927, G.P.Thomson – A.Reid, C.Davisson – L.H.Germer, Nobelova cena)
- vždy hraje roli při každé vlnové aplikaci (např. v optických přístrojích, kde jsou světelné svazky vymezovány různými clonami a obrubami čoček)

U mechanického vlnění ve hmotném prostředí je vysvětlení difrakce prosté – je dáno principem - ***způsobem šíření*** vlnění – postupným rozkmitáváním sousedících hmotných bodů pomocí vzájemných vazebních sil. Je to vlastně nejzákladnější, nejobecnější zákonitost, kterou na vlnění vypozoroval již Huygens (1690) a zformuloval ji do následujícího principu ***(Huygensův princip)*** :

Vlnění se šíří prostorem tak, že každý bod, do kterého vlnění dospěje, se stává zdrojem sekundárního – elementárního – vlnění a výsledný stav (vlnění) v libovolném bodě prostoru je pak dán superpozicí (interferencí) všech těchto elementárních vlnění.

Pozn. : Huygensův princip je možno použít pouze ve směru šíření vlnění.

Uvažovaný bod, do kterého vlnění dospěje, je ovšem vždy bodem nějaké vlnoplochy – je tedy možno každý bod jakékoliv vlnoplochy považovat za zdroj elementárního vlnění.
Toto elementární vlnění pak vytváří ***elementární vlnoplochy*** (v izotropním prostředí jsou kulové) a jestliže by jakákoliv další vlnoplocha původního vlnění měla být vytvořena pomocí interference - pak je tedy možno představit si ji jako jakousi „***obálku***“ těchto elementárních vlnoploch (viz následující obrázek) :



Platnost Huygensova principu byla potvrzena nejen u vlnění mechanického, ale i u všech ostatních druhů vlnění (akustické a elektromagnetické vlnění) a tento princip byl vždy využíván při studiu všech ohybových jevů, kdy vlnoplochu bylo možno nahradit souborem elementárních zdrojů.

Exaktní výpočty - tedy kvantitativní popis ohybu vlnění - ale umožnil až pozdější ***Fresnellův dodatek*** :

> **Za zdroj sekundárního (elementárního) vlnění lze považovat každý plošný element vlnoplochy a amplituda tohoto vlnění je pak přímo úměrná velikosti plošného elementu (a amplitudě primárního vlnění).**

Uvedené znalosti použijeme nyní při praktické aplikaci na základní - tzv. ***Fraunhoferovy ohybové jevy*** – při kterých je výsledné vlnění za překážkou pozorováno na stínítku ve velké vzdálenosti - tedy prakticky jako rovinné vlny, jinak řečeno ve svazku rovnoběžných paprsků (nebo ve vzdálenosti libovolné, ale s pomocí spojné čočky, která rovnoběžné paprsky soustředí ve svém ***ohnisku***).

V nejjednodušším případě navíc předpokládáme, že i vlny dopadající na překážku jsou rovinné .

Sledujeme tedy **ohyb rovinného vlnění** (svazku rovnoběžných paprsků) a zajímají nás také **výsledné rovinné vlny** (výsledné rovnoběžné svazky).

Nejprve vyšetříme ohyb jednou štěrbinou.

Představme si tedy štěrbinu o šířce b (a výšce a), na kterou kolmo dopadá (a vyplňuje ji) rovinná vlna (viz následující obrázek). Jestliže označíme její amplitudu A, můžeme ji matematicky zapsat ve tvaru :

$$u(x,t) = A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Nebo komplexně :

$$\hat{u}(x,t) = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

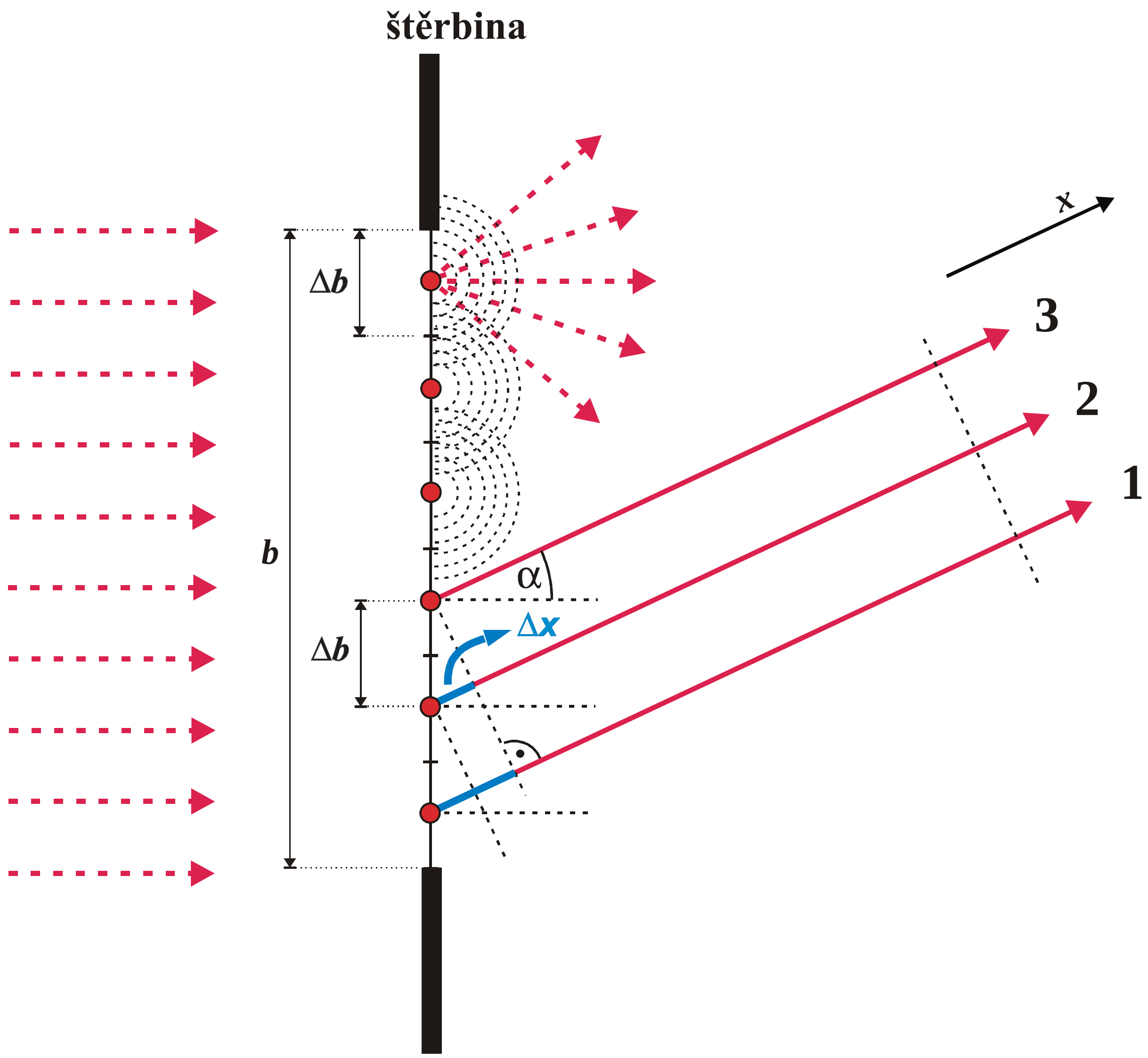
Plocha štěrbiny (a x b) je tedy vlnoplochou – tj. plochou stejné fáze – a podle Huygensova principu je každý její bod zdrojem elementárních vlnění, ze kterého se šíří elementární kulové vlnoplochy.

Podle Fresnellova dodatku budeme ovšem za elementární zdroje považovat malé plošné elementy , které vytvoříme tak, že šířku štěrbiny (myšlenkově) rozdělíme na velký počet (N) malých úseků o velikosti :

$$\Delta b = \frac{b}{N}$$

Celou štěrbinu pak tedy tvoří N malých plošek, každá o velikosti :

$$a \cdot \Delta b = a \cdot \frac{b}{N} = \frac{a \cdot b}{N}$$



Velikost plošných elementů je tedy N – krát menší než plocha celé štěrbiny, proto podle Fresnelova dodatku má elementární vlnění, které z nich vychází amplitudu :

$$A' = \frac{A}{N}$$

Nyní uděláme <u>další zjednodušení</u> – představíme si tyto zdroje jako body (a k této představě se pak budeme blíži pomocí limity pro nekonečný počet N) – a budeme tedy vlastně sledovat interferenci od velkého počtu N koherentních bodových zdrojů.

V určitém směru určeném úhlem α (od kolmice štěrbiny) pak z těchto zdrojů vystupuje N svazků, které mají konstantní vzájemné dráhové rozdíly :

$$\Delta x = \Delta b \cdot \sin\alpha = \frac{b}{N} \cdot \sin\alpha$$

Štěrbinu jsme tedy převedli na interferenci velkého počtu (N) svazků stejné frekvence o konstantním vzájemném fázovém rozdílu, kterou jsme už řešili v předchozí kapitole u optické mřížky – nyní však tento počet bude muset růst nade všechny meze.

Zopakujme nejprve postup řešení této interference a pak se pokusme o nalezení limitního výsledku :

Na obrázku jsou znázorněny paprsky pod úhlem α od kolmice mřížky. Jestliže položíme osu x do tohoto směru, můžeme použít známé rovnice postupné rovinné harmonické vlny ve směru této osy. Předpokládejme **první paprsek** s nulovou fázovou konstantou, pak jeho komplexní vyjádření bude :

$$\hat{u}_1(x,t) = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

Kde komplexní amplituda vlny s nulovou fázovou konstantou je samozřejmě reálné číslo :

$$\hat{A}_1 = A'$$

Potom **druhý paprsek** při stejné amplitudě (jeho zdroj zastupuje stejnou plochu štěrbiny) se od paprsku prvního se odlišuje pouze delší uběhnutou drahou (o hodnotu Δx, viz obr.), tedy napíšeme :

$$\hat{u}_2(x,t) = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot(x+\Delta x))} = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x - k\cdot\Delta x)} = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x + \psi)}$$

Vidíme, že důsledkem delší dráhy – dráhového přírůstku – je vznik konstantního fázového rozdílu (posunu) druhého paprsku oproti paprsku prvnímu :

$$\boxed{\psi = -k\cdot\Delta x}$$

fázový rozdíl sousedních paprsků

Po dosazení za dráhový rozdíl dostaneme :

$$\psi = -k\cdot\Delta x = -k\cdot\frac{b}{N}\cdot \sin\alpha = -\frac{\Psi}{N}$$

Písmenem Ψ jsme označili fázový rozdíl mezi prvním a posledním svazkem (a v limitě nekonečného počtu svazků je to pak fázový rozdíl mezi okrajovými paprsky štěrbiny) :

$$\Psi = -k\cdot b\cdot \sin\alpha$$

A rovnici druhého paprsku s využitím pojmu komplexní amplitudy můžeme zapsat :

$$\hat{u}_2(x,t) = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x + \psi)} = A' \cdot e^{i\cdot\psi} \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

U tohoto paprsku má už komplexní amplituda standardní tvar :

$$\hat{A}_2 = A' \cdot e^{i\cdot\psi}$$

Geometrie **třetího paprsku** je stejná - jeho dráha se oproti druhému paprsku opět zvětší o stejné Δx – a oproti prvnímu paprsku bude tedy **dvojnásobně větší** – o hodnotu $2.\Delta x$:

$$\hat{u}_3(x,t) = A' \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x - k\cdot 2\cdot\Delta x)} = A' \cdot e^{i\cdot 2\psi} \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_3 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

Fázový posun třetího paprsku oproti předchozímu druhému paprsku je tedy opět ψ a vzhledem k prvnímu paprsku pak dvojnásobný - 2ψ :

A pro třetí komplexní amplitudu tedy máme výraz :

$$\hat{A}_3 = A' \cdot e^{i \cdot 2\psi}$$

Je zřejmé, že situace je stejná mezi kterýmikoliv dvěma sousedními paprsky – mají vždy stejný fázový rozdíl ψ a všechny mají stejnou (reálnou) amplitudu A' - můžeme tedy lehce napsat analogické rovnice dalších paprsků :

$$\hat{u}_4(x,t) = A' \cdot e^{i \cdot 3\psi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_4 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

$$\hat{u}_5(x,t) = A' \cdot e^{i \cdot 4\psi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_5 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

$$\vdots$$

$$\hat{u}_N(x,t) = A' \cdot e^{i \cdot (N-1)\psi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_N \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

A jejich komplexní amplitudy jsou vyjádřeny vztahy :

$$\hat{A}_4 = A' \cdot e^{i \cdot 3\psi}$$

$$\hat{A}_5 = A' \cdot e^{i \cdot 4\psi}$$

$$\vdots$$

$$\hat{A}_N = A' \cdot e^{i \cdot (N-1)\psi}$$

Za předpokladu, že všechny tyto paprsky budou přivedeny do jediného místa (ohniska snímacího optického zařízení), dojde v tomto bodě k jejich složení (interferenci) do výsledného vlnění. Jeho komplexní vyjádření získáme, stejně jako u interference dvou vln, součtem jednotlivých komplexních výrazů :

$$\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \ldots\ldots + \hat{u}_N$$

Protože všechny tyto vlny mají stejnou frekvenci a stejný úhlový vlnočet (vlnovou délku), můžeme ze všech výrazů vytknout stejnou exponencielu :

$$\hat{u} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \ldots + \hat{A}_N) \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

Součet všech komplexních amplitud bude opět nějaké komplexní číslo a bude ho možno (jako každé komplexní číslo) zapsat ve standardní exponencielní formě – která potom tedy bude také mít smysl komplexní amplitudy – výsledného vlnění :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \ldots + \hat{A}_N = B \cdot e^{i \cdot \Psi} = \hat{B}$$

Výsledné vlnění bude tedy mít stejnou jednoduchou standardní formu jako všechny výchozí paprsky :

$$\boxed{\hat{u}(x,t) \;=\; \hat{B}\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} \;=\; B\cdot e^{\,i\cdot\Psi}\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}}$$

komplexní tvar výsledné vlny

Proto můžeme konstatovat, že výsledné vlnění je opět harmonické vlnění, stejné frekvence a vlnové délky a jeho fázová konstanta Ψ a výsledná amplituda B jsou dány výslednou komplexní amplitudou , která je určena součtem všech jednotlivých výchozích komplexních amplitud :

$$\boxed{\hat{B} \;=\; B\cdot e^{\,i\cdot\Psi} \;=\; \hat{A}_1 \;+\; \hat{A}_2 \;+\; \hat{A}_3 \;+\; \hat{A}_4 \;+\; \dots \;+\; \hat{A}_N}$$

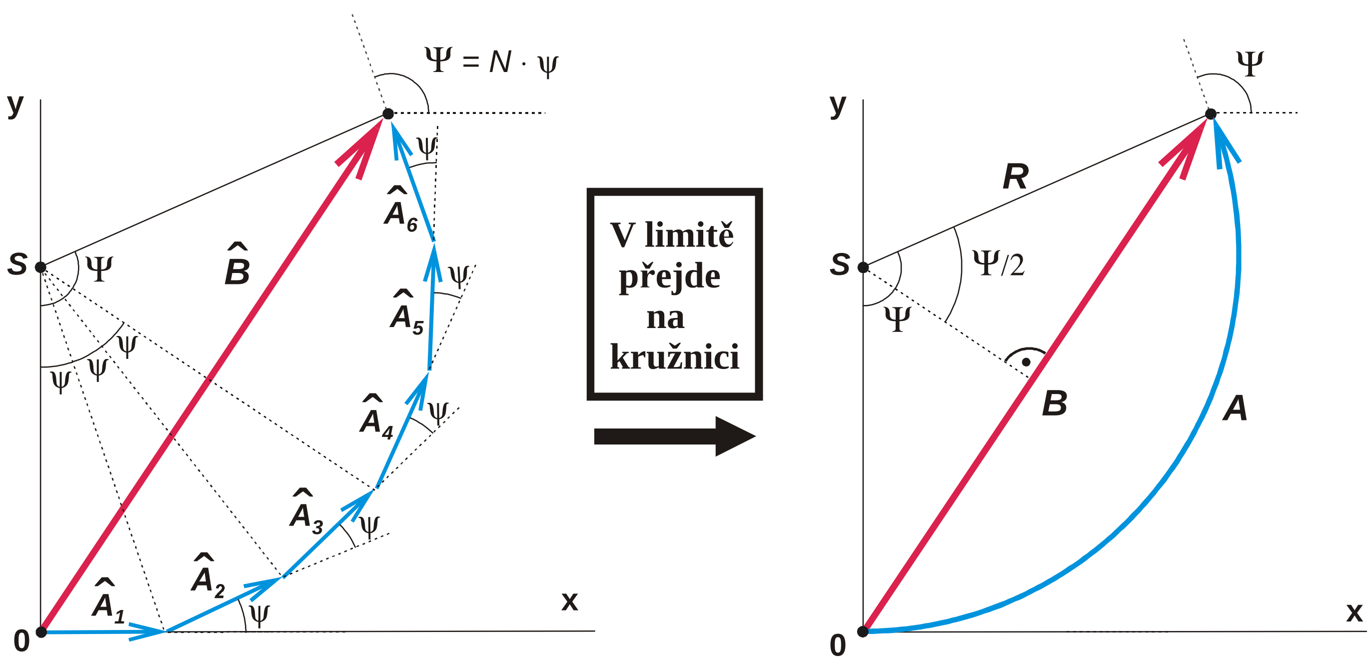
výsledná komplexní amplituda

Nyní dosadíme jednotlivé komplexní amplitudy :

$$\boxed{\hat{B} \;=\; B\cdot e^{\,i\cdot\Psi} \;=\; A' \;+\; A'\cdot e^{\,i\cdot\psi} \;+\; A'\cdot e^{\,i\cdot 2\psi} \;+\; A'\cdot e^{\,i\cdot 3\psi} \;+\dots+\; A'\cdot e^{\,i\cdot(N-1)\psi}}$$

Vidíme, že jednotlivé komplexní amplitudy se stejně jako v případě mřížky vyznačují konstantní velikostí (amplitudou) a konstantním fázovým rozdílem mezi dvěma sousedními členy.

Dostáváme tak součet komplexních čísel, který může být znázorněn v grafu jako součet N vektorů stejné délky (A') přičemž každý vektor je odkloněn od předchozího vektoru o stejný úhel ψ (viz následující obrázek pro $N = 6$).



Za uvedených podmínek, kdy amplitudy jednotlivých svazků jsou velmi malé a rovněž jsou malé i vzájemné fázové rozdíly, leží jednotlivé komplexní amplitudy na obvodu kružnice se středem na ose y, tj. vlastně tvoří strany pravidelného mnohoúhelníka.

A v limitě pro nekonečně jemné rozdělení štěrbiny - tj. pro nekonečný počet svazků - pak tento mnohoúhelník přejde na kružnici, vlastně na kruhový oblouk o poloměru R, se středovým úhlem Ψ (viz obr.).

Délka tohoto oblouku je zjevně tvořena součtem všech amplitud jednotlivých výchozích svazků a je tedy rovná amplitudě A původního vlnění dopadajícího na štěrbinu, tedy :

$$A = R \cdot \Psi = 2 \cdot R \cdot \frac{\Psi}{2}$$

Amplitudu výsledného vlnění ve směru α pak určíme jako velikost vektoru výsledné komplexní amplitudy z vyznačeného pravoúhlého trojúhelníka :

$$B = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\Psi}{2}$$

Dále využijeme znalosti z minulé kapitoly, že (střední) intenzita vlnění je úměrná kvadrátu amplitudy vlnění – intenzita výsledného vlnění tedy bude (vynecháváme znak střední hodnoty) :

$$I = konst \cdot B^2$$

Abychom dostali obecnější vztah, porovnáme tuto intenzitu s výchozí intenzitou vlnění ve štěrbině :

$$I_o = konst \cdot A^2$$

A můžeme stanovit poměr obou intenzit :

$$\boxed{\frac{I}{I_o} = \frac{B^2}{A^2} = \frac{\sin^2\frac{\Psi}{2}}{(\frac{\Psi}{2})^2} = \left(\frac{\sin\frac{\Psi}{2}}{\frac{\Psi}{2}}\right)^2}$$

poměr intenzit výsledného a počátečního vlnění

Nebo osamostatníme výslednou intenzitu :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2\frac{\Psi}{2}}{(\frac{\Psi}{2})^2}}$$

intenzita výsledného vlnění

Stejně jako u interference více paprsků v minulé kapitole můžeme dosadit za fázový rozdíl (zde krajních paprsků štěrbiny) :

$$\Psi = -k \cdot b \cdot \sin\alpha$$

A dostaneme výslednou intenzitu jako funkci α – úhlu odklonu paprsků od kolmice ke štěrbině, tj. od původního směru dopadajícího vlnění (uvážíme-li druhé mocniny, zůstanou v čitateli i ve jmenovateli jen kladné veličiny) :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} k\, b \sin\alpha\right)}{\left(\frac{1}{2} k\, b \sin\alpha\right)^2}}$$

intenzita výsledného difraktovaného vlnění (v proměnné α)

Výsledné vztahy se sice „zdálky“ poněkud podobají rovnicím pro interferenci více svazků, jejich průběhy a extrémy jsou však zásadně odlišné. Pro co nejnázornější analýzu provedeme maximální zjednodušení tím, že zavedeme novou veličinu jako polovinu fázového rozdílu vlnění vycházejících z obou okrajů štěrbiny :

$$u = \frac{\Psi}{2} = -\frac{k \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

Potom můžeme intenzitu difraktovaného vlnění zapsat jako :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}}$$

Vidíme ihned, že intenzita výsledného vlnění je především přímo úměrná intenzitě výchozí vlny ve štěrbině (a ta je úměrná ploše povrchu štěrbiny a intenzitě vlnění na mřížku dopadajícího ze zdroje) - ale **hlavní závislost**, kterou musíme dále vyšetřit je závislost na fázovém rozdílu u (který je určen úhlem α mezi paprsky a normálou mřížky) při zadané intenzitě výchozí vlny I_o .

Protože nás zajímají hlavně maxima a minima intenzity , měly bychom tedy vyšetřit extrémy funkce :

$$I = I(u)$$

To , jak víte, znamená řešení diferenciální rovnice :

$$dI / du = 0$$

Protože toto řešení není snadné, využijeme i pomocných úvah a budeme hledat extrémy funkce v následujících postupných krocích :

1) Zkoumaná funkce je zřejmě nezáporná - její minima mohou proto být nulové body :

$$0 = I = I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

Rovnice bude splněna při nulovém čitateli, tj. za podmínky, že pro argument sinu platí :

$$\boxed{u = m \cdot \pi}$$

podmínka minima intenzity (interference)

Proměnná u musí tedy být celistvým násobkem čísla π , tj. n je libovolné celé číslo, kromě nuly, neboť pak by i jmenovatel zlomku byl nulový :

$$m = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots$$

Jestliže do podmínky minima interference dosadíme za veličinu u , tak jak jsme ji zavedli, dostaneme vztah :

$$u = \frac{\Psi}{2} = -\frac{k \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = m \cdot \pi$$

Vznikla tak podmínka pro úhel odchýlení paprsků :

$$\sin\alpha = -m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{k \cdot b}$$

A po dosazení za úhlový vlnočet :

$$\sin\alpha = -m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{k \cdot b} = -m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{b} \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} = -m \cdot \frac{\lambda}{b}$$

Dostali jsme tedy podmínku minima interference pro difrakční úhel α:

$$\boxed{\sin\alpha = -m \cdot \frac{\lambda}{b}}$$

podmínka minima intenzity (interference)

2) Pro nulové u dostáváme pro intenzitu neurčitým výrazem $0 / 0$, neboť je kromě čitatele roven nule také jmenovatel našeho zlomku - a zřejmě se tedy nejedná o nulový bod intenzity, ale může to být – a také skutečně je – maximum naší funkce .

Kvůli neurčitému výrazu musíme ale jeho hodnotu stanovit jako limitu a ještě pomocí opakovaných derivací podle L'Hospitalova pravidla (zkuste sami) :

$$I(0) = \lim_{u \to 0} I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} = \lim_{\frac{\varphi}{2} \to n \cdot \pi} I_o \cdot \frac{(\sin^2 u)'}{(u^2)'} = \dots\dots\dots = I_o$$

Dostáváme skutečně kladnou hodnotu – je to tzv. hlavní maximum :

$$\boxed{u = 0}$$

podmínka hlavního maxima intenzity (maximum interference)

Velikost hlavního maxima nezávisí na šířce štěrbiny, ale je určena pouze intenzitou dopadajícího záření :

$$\boxed{I = I_o}$$ ***velikost hlavního maxima***

3) V průběhu intenzity ještě existují další, lokální maxima – tzv. ***vedlejší maxima*** – jejich podmínku už ale nelze najít jinak, než opravdu řešením základní rovnice pro extrémy funkce :

$$\frac{dI}{du} = 0$$

Dostaneme :

$$2 \cdot \sin u \cdot \cos u \cdot u^2 - \sin^2 u \cdot 2 \cdot u = 0$$

A po úpravě vznikne transcendentní rovnice :

$$tg\, u = u$$

Která pro maxima poskytuje přibližné řešení:

$$\boxed{u = 0,\ \pm 1{,}43 \cdot \pi,\ \pm 2{,}46 \cdot \pi,\ \pm 3{,}47 \cdot \pi,\ \ldots}$$ ***podmínka vedlejších maxim intenzity***

(řešení ovšem zahrnuje i hlavní maximum v nulovém bodě)

Velikost těchto maxim lze jednoduše získat dosazením uvedených hodnot do základního vztahu :

$$\boxed{I_1 = 0{,}047 \cdot I_o}$$ ***velikost prvního vedlejšího maxima***

$$\boxed{I_2 = 0{,}016 \cdot I_o}$$ ***velikost druhého vedlejšího maxima***

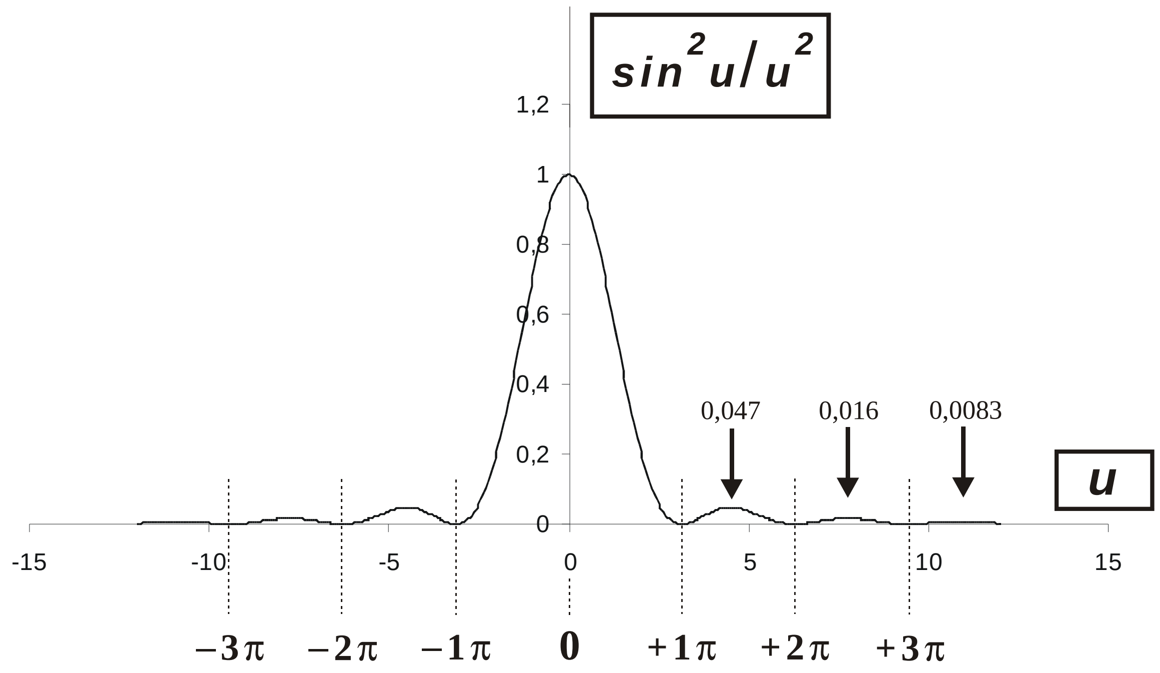
$$\boxed{I_3 = 0{,}0083 \cdot I_o}$$ ***velikost třetího vedlejšího maxima***

$$\vdots \qquad \vdots$$

Na dalším obrázku můžeme sledovat výše popsaný průběh výsledné difrakční intenzity :

1) Průběh intenzity je **symetrický** vzhledem ke kladným i záporným hodnotám proměnné u
2) Intenzita má **jediné hlavní maximum** v nulovém bodě a velmi malá **vedlejší maxima**, jejichž výška ještě prudce klesá
3) **Poloha** pravidelně se střídajících minim a maxim je v proměnné u stále **stejná**

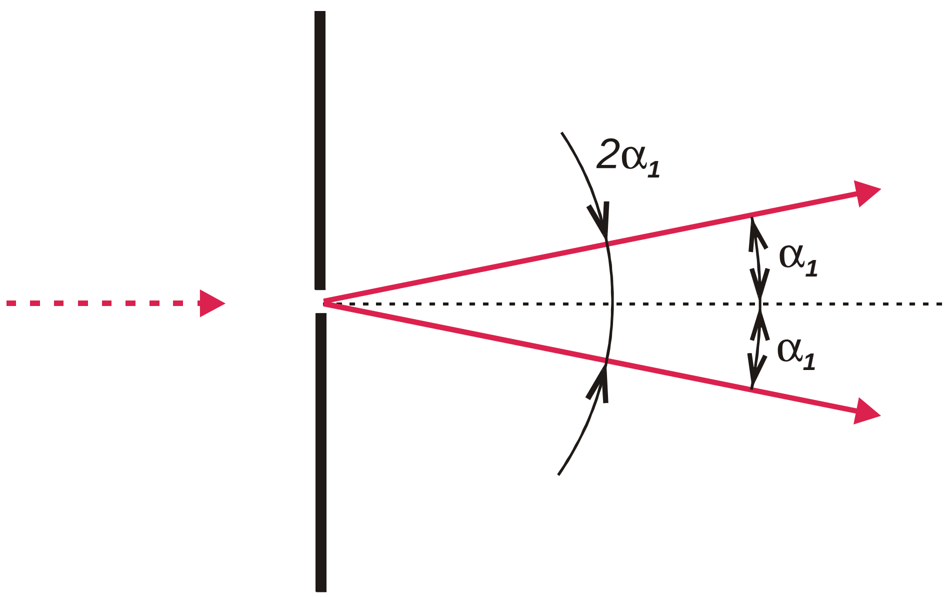
Průběh difrakční funkce se tedy velmi liší od interference více svazků, zejména svým jediným, velikým a relativně širokým, hlavním maximem.



Protože intenzita popisuje tok energie, je zřejmé, že většina energie vychází ze štěrbiny v rámci hlavního maxima, tj mezi prvními minimy na kladné i záporné ose ($+1\pi$ a -1π). Jestliže použijeme podmínku minima interference, do které dosadíme m = 1, dostaneme :

$$\sin\alpha = m \cdot \frac{\lambda}{b} = \frac{\lambda}{b}$$

Pro zadanou šířku štěrbiny a vlnovou délku má tato rovnice řešení pro nějakou velikost úhlu α_1 , který pak vlastně určuje celkový úhel velikosti $2\,\alpha_1$ světelného svazku (od - α_1 , do + α_1 , viz obr.) , ve němž ze štěrbiny vychází celá oblast hlavního maxima - tj. hlavní část energie vlnění.



Nabízí se ihned jednoduchá diskuse :

1) Jestliže by byla velikost štěrbiny daleko větší než vlnová délka, tj. :

$$\boxed{b \gg \lambda}$$

Potom by bylo :

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{b} \rightarrow 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha_1 \rightarrow 0}$$

Světelný svazek je potom určitě velmi úzký - lze konstatovat ***přímočarém šíření*** světla - které je základem ***paprskové optiky*** (poznali jste ji na střední škole při studiu optického zobrazení jednoduchými optickými přístroji, využívajícími lom a odraz světla – čočky, zrcadla, atd.)

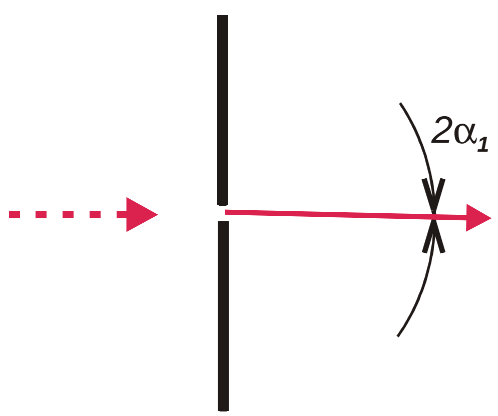
2) Jestliže by byla vlnová délka se štěrbinou srovnatelná, tj. :

$$\boxed{b \approx \lambda}$$

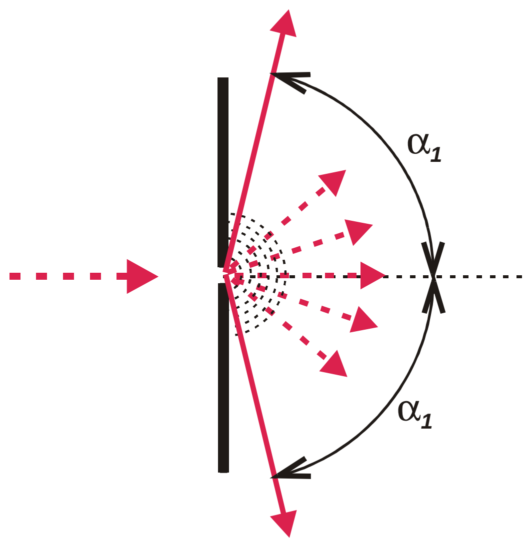
Potom by bylo :

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{b} \approx 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\alpha_1 \approx 90^o}$$

Světlo by se tedy za štěrbinou šířilo do celého poloprostoru, štěrbina by se chovala jako svítící bod – elementární zdroj (viz obr.). V této extrémní situaci se výrazně projevuje jev ohybu světla, zjednodušeně můžeme hovořit o potvrzení Huygensova principu pro elektromagnetické vlnění (elementární bodový zdroj ovšem není izotropní – tj. nemá konstantní intenzitu ve všech směrech – neboť její úhlové rozdělení je dáno průběhem hlavního maxima).



$$\boxed{b \gg \lambda}$$



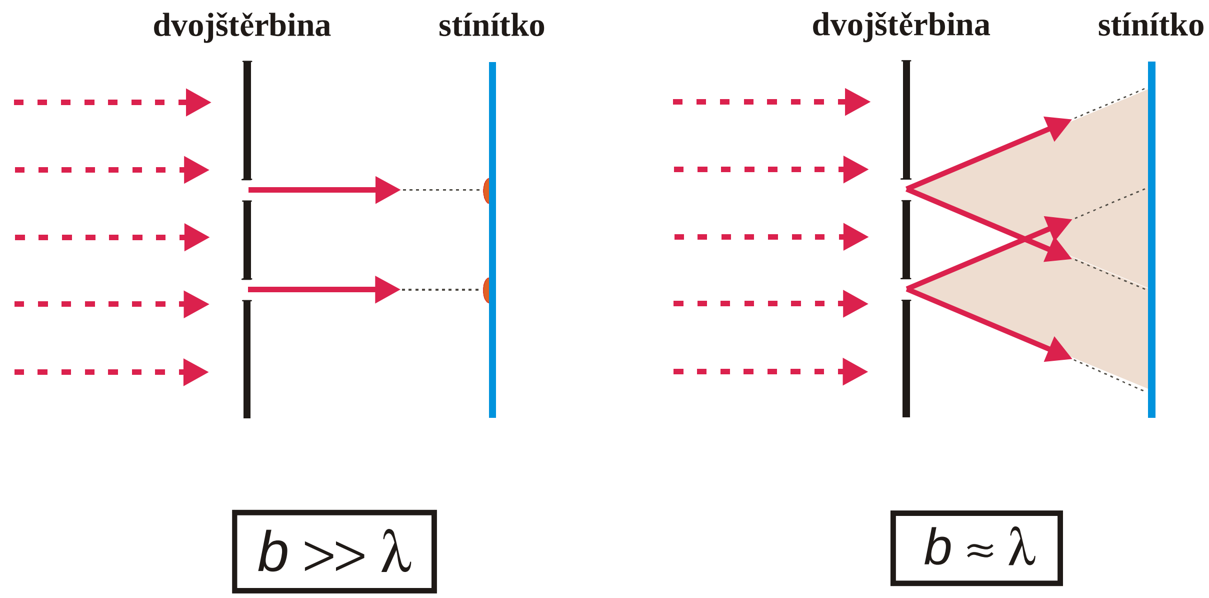
$$\boxed{b \approx \lambda}$$

Tento stav je jistě nevýhodný pro optické zobrazování pomocí paprsků, protože se tyto paprsky „mění“ na kuželovité svazky - a tím se zmenšuje schopnost rozlišení blízkých bodů - tj. drobných detailů na optickém obrazu.

Následující obrázek ukazuje jednoduché zobrazení dvou blízkých bodů (otvorů, mohou to být také dvě blízké štěrbiny - tzv. dvojštěrbina) na nepropustné stínítko, pomocí svazku rovnoběžných paprsků .

Je dobře vidět, že na stínítku bude možno obrazy těchto bodů rozlišit, jen pokud budou otvory dostatečně velké oproti použité vlnové délce – zmenšení otvorů přinese rozšíření obrazů (projeví se jako rozmazání, rozostření), které může vést až k jejich splynutí .

Z druhé strany, při neměnné velikosti zobrazovaných bodů (otvorů), bude k rozlišení jejich obrazů potřeba použít světlo s relativně malou vlnovou délkou – její zvyšování opět přinese „rozmazání“, případně splynutí obrazů.



Proto tzv. ***rozlišovací schopnost*** optického přístroje závisí mimo jiné na vlnové délce použitého světla a snižuje se při vyšších vlnových délkách.

Pozn.1 : Například rozlišení optického mikroskopu (které je přibližně řádu vlnové délky) se tedy zlepší, když na osvětlovací zařízení pod stolkem nasadíme modrofialový filtr.

Pozn.2 : U elektronového mikroskopu se používá elektronů urychlených napětím několika desítek kV (kilovoltů) a jejich „ekvivalentní“ vlnová délka je potom řádu 0,02 nm (setin nanometrů), tedy asi desettisíckrát menší než u viditelného světla – a ve stejném poměru by se mělo teoreticky zvýšit rozlišení (kvůli různým vadám zobrazení a elektromagnetickému rušení je to prakticky „jen“ asi stokrát)

Reálná optická mřížka

Na závěr této kapitoly se vrátíme k optické mřížce, která pracuje na principu interference mnoha svazků vytvořených jejími štěrbinami. Nyní již ovšem víme, že v každé jednotlivé štěrbině nastává také difrakce světla a dochází k interferenci všech „elementárních“ paprsků vycházejících ze štěrbiny. Pokusme se proto v tomto odstavci difrakci i interferenci matematicky spojit.

Oba jevy – interference a difrakce světla – probíhají na mřížce samozřejmě současně , zřejmě je ale možno představit si difrakci na štěrbinách jako „prvotní jev“, bez kterého by následná interference paprsků, ze štěrbin vycházejících, nemohla probíhat.

Jev difrakce se „makroskopicky“ - ve svém výsledku - projevuje tak, že intenzita paprsků vycházejících ze štěrbin závisí na úhlu jejich odchýlení od původního směru (od kolmice mřížky) :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2}}$$

Tuto intenzitu tedy můžeme považovat za výchozí veličinu pro následující jev interference N vln ze všech štěrbin mřížky - z minulé kapitoly víme, že tento jev změní intenzitu vlnění v poměru :

$$\boxed{\frac{I}{I_o} = \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Připomeňme, že proměnnou φ je fázový rozdíl svazků v sousedních štěrbinách, vzdálených o mřížkovou konstantu d :

$$\varphi = k \cdot \Delta x = -k \cdot d \cdot \sin\alpha$$

Výsledná intenzita vlnění vycházejícího z mřížky v určitém směru je tedy dvakrát za sebou pozměněna v uvedených poměrech – matematicky to popíše prostý součin obou výše uvedených vztahů :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

výsledná intenzita reálné mřížky

Mezi všemi čtyřmi používanými proměnnými u, φ , případně Ψ a ψ je samozřejmě jednoznačný vztah, daný jejich závislostmi na úhlu α odklonu paprsků od kolmice mřížky :

$$u = \frac{\Psi}{2} = -\frac{k \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

$$\varphi = k \cdot \Delta x = -k \cdot d \cdot \sin\alpha$$

$$\psi = -k \cdot \Delta x = -k \cdot \frac{b}{N} \cdot \sin\alpha = -\frac{\Psi}{N}$$

A můžeme tedy vztah pro výslednou intenzitu převést na libovolnou jedinou společnou proměnnou : Vypočítáme například $\sin\alpha$ z první rovnice :

$$\sin\alpha = -\frac{2 \cdot u}{k \cdot b}$$

a dosadíme do rovnice druhé :

$$\varphi = -k \cdot d \cdot \sin\alpha = -k \cdot d \cdot \frac{2 \cdot u}{k \cdot b} = \frac{2 \cdot d}{b} \cdot u$$

Pak můžeme vyjádřit výslednou intenzitu v jediné proměnné u :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 N \cdot \frac{d}{b} \cdot u}{\sin^2 \frac{d}{b} \cdot u}}$$

výsledná intenzita reálné mřížky

Maxima a minima tohoto složeného výrazu lze zřejmě složit z extrémů obou jeho částí. Zásadně důležitá maxima, která se používají ve spektrometrických aplikacích, jsou určena hlavními maximy druhého, interferenčního členu podle základní rovnice mřížky :

$$d \cdot \sin\alpha = n \cdot \lambda$$

Nebo pomocí fázového rozdílu :

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{b} \cdot u = n \cdot \pi$$ (n je libovolné celé číslo)

Pro proměnnou u to tedy znamená podmínku :

$$\boxed{u = n \cdot \frac{b}{d} \pi}$$

rovnice pro maxima na reálné mřížce (v proměnné u)

(n je libovolné celé číslo)

Z minim jsou důležitá obě první minima difrakčního členu, která, jak víme, ohraničují svazek hlavní části energie :

$$\boxed{u = m \cdot \pi = \pm 1 \cdot \pi}$$

(m = $+1$, -1)

V rámci tohoto svazku se tedy „realizuje“ pouze prvních n_1 hlavních maxim (na každou stranu od kolmice, nulté maximum napočítáme) , kde n_1 je největší číslo, které ještě splňuje nerovnost :

$$n_1 \cdot \frac{b}{d} \leq 1$$

Jestliže je tedy například vzdálenost štěrbin třikrát větší než šířka štěrbiny, dostaneme nerovnost :

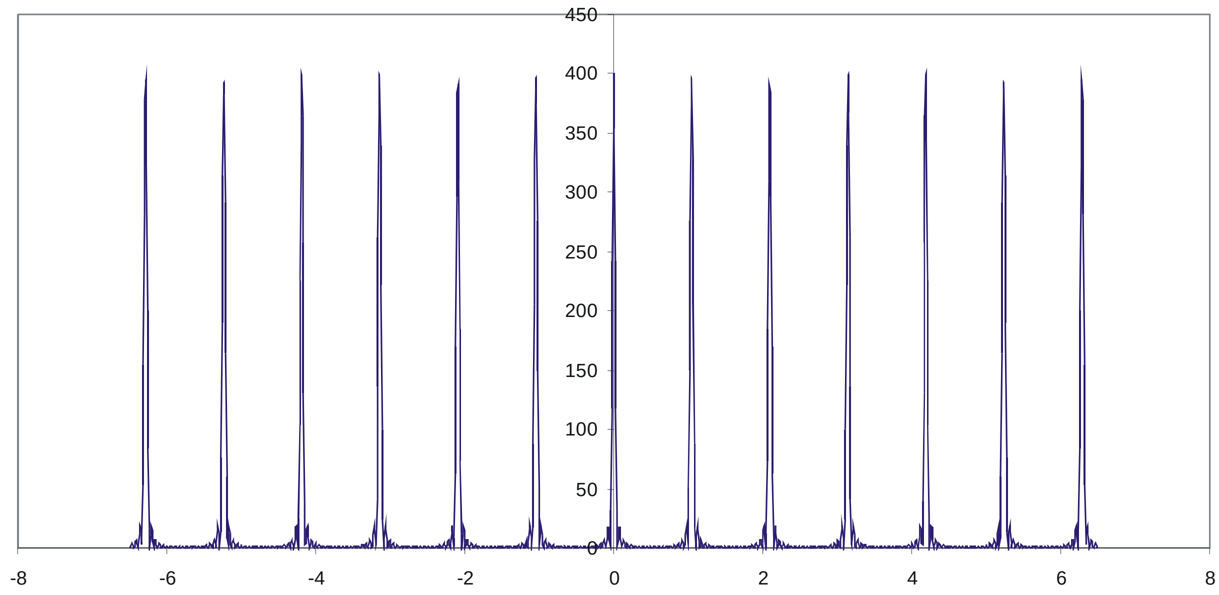
$$n_1 \cdot \frac{1}{3} \leq 1$$

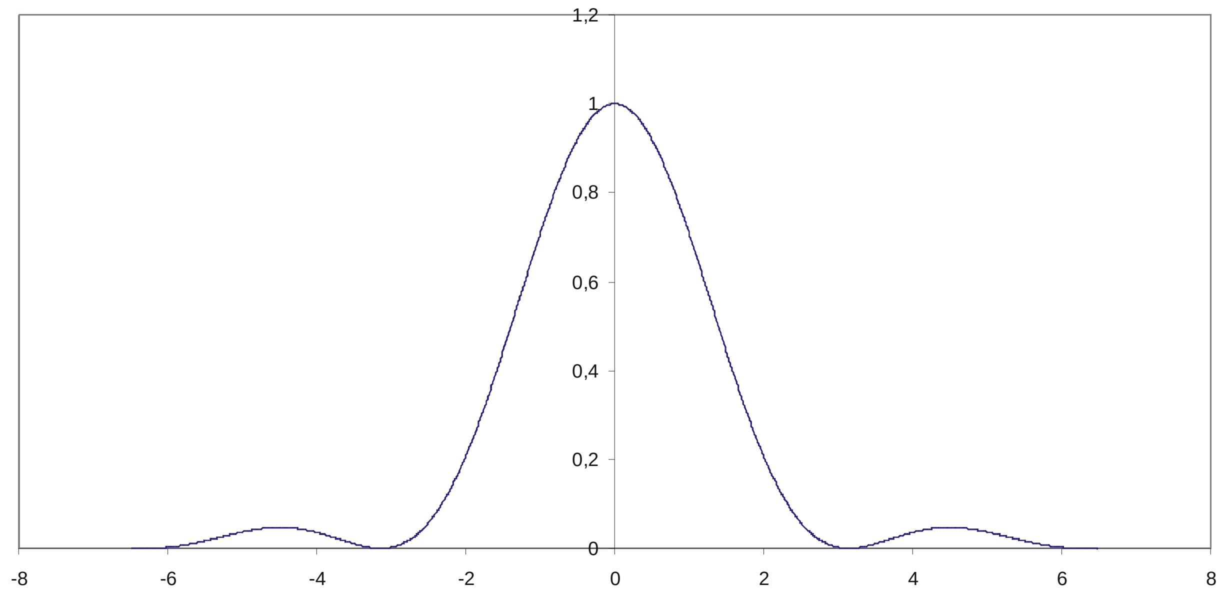
Řešením je tedy $n_1 = 3$.

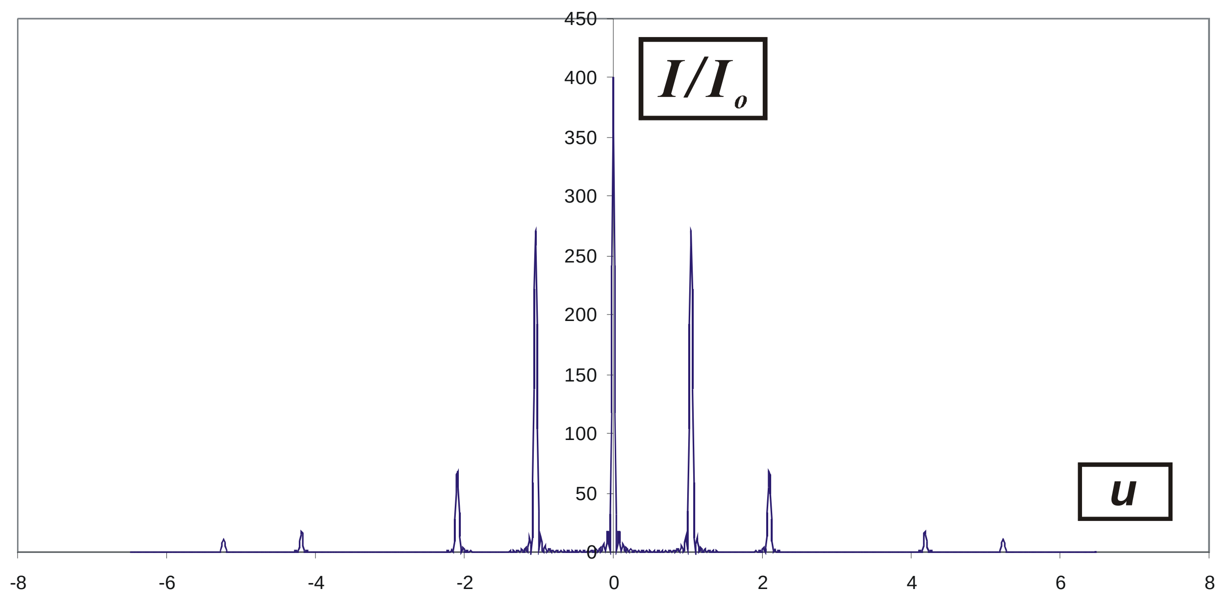
Na následujícím obrázku je znázorněn průběh obou probraných jevů – **interference na mřížce** (viz horní graf, je zadáno N = 20 štěrbin, stejně jako v příkladu v minulé kapitole) - a **difrakce na štěrbinách** mřížky (které jsou třikrát menší než jejich vzdálenost, viz prostřední graf).
Na dolním grafu pak je pak průběh **výsledné intenzity** vlnění na mřížce uvedených parametrů.

Jak ukázal předchozí výpočet, hlavní svazek sice obsahuje první tři hlavní interferenční maxima, ale protože třetí se dostalo přímo na jeho okraj, dobře výrazná budou pouze maxima dvě (na obou stranách nulového svazku).
Na dané optické mřížce lze tedy měřit ve spektrech 1. a 2. řádu - a použití dalších řádů (čtvrtým počínaje, které připadnou do malých vedlejších difrakčních maxim) pak bude vzhledem k mnohonásobně nižší intenzitě jistě velmi nevýhodné.

Konkrétní příklady v této a minulé kapitole tak ukazují, jak pomocí vhodné kombinace hlavních parametrů – počtu štěrbin a jejich šířky – je možné vytvořit optickou mřížku pro požadovaný interval vlnových délek a pro vhodný spektrální řád .
Dalšími parametry, například vlastnostmi a tvarem povrchu u mřížek na odraz, je dále možno zvýraznit (zesílit) určitou část pracovního intervalu vlnových délek.


450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8


450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
I/I$_o$
u
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

Pozn. : Přesné měřicí spektrální přístroje používají výhradně právě optické ***mřížky na odraz*** . Těmito mřížkami dopadající vlnění neprochází, ale odráží se od jejich povrchu, takže výsledné vlnění není vůbec ovlivněno kvalitou materiálu mřížky a není potřeba přesně opracovávat dva povrchy mřížky, pouze jeden.

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 12/07)**