Interference více vlnění

Pojmem ***interference vlnění*** označujeme jev skládání dvou nebo více vlnění, který jsme již řešili v minulém semestru pro mechanické vlnění pružných soustav hmotných bodů. Protože jev vlnění znamená, že se do celého pružného prostředí šíří kmity z nějakého výchozího bodu (zdroje) a po určité době pak kmitají všechny hmotné body soustavy, skládání několika vlnění je tedy ekvivalentní skládání několika různých kmitů v určitém (libovolném) místě sledovaného objemu.

Podle principu superpozice mechanických pohybů se dvě nebo i více okamžitých výchylek hmotného bodu v daném místě od dvou nebo i více vlnění (tyto výchylky jsou určeny rovnicemi vlnění) sečtou – v nejobecnějším případě vektorově – do výsledné výchylky hmotného bodu - tak vznikne rovnice výsledného vlnění :

$$\boxed{\vec{u}(x,y,z,t) = \vec{u}_1(x,y,z,t) + \vec{u}_2(x,y,z,t) + \vec{u}_3(x,y,z,t) + \ldots + \vec{u}_N(x,y,z,t)}$$

Ve FYA1 jsme v kapitole „Kmity a vlnění“ probrali skládání dvou harmonických rovinných vln (paprsků, svazků) stejné vlnové délky, postupujících stejným směrem a také stejně lineárně polarizovaných (tj. kmitajících ve stejném směru). Zopakujme v následujícím odstavci nejprve řešení této nejjednodušší možné situace :

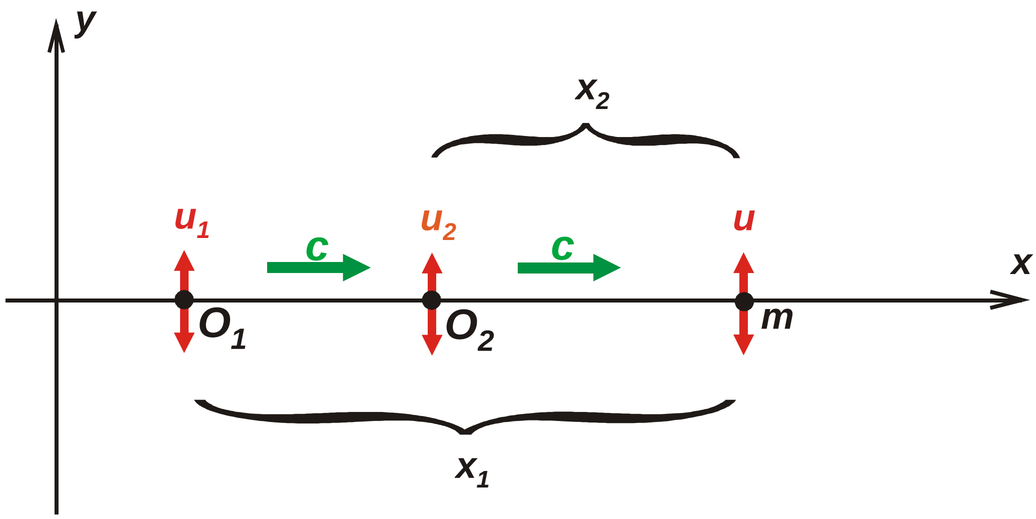
V případě známého, stejného směru obou kmitů lze totiž sčítat pouze jejich velikosti - skaláry, a protože rovinné vlny se popisují stejnými rovnicemi jako bodová řada, můžeme tento problém řešit jako interferenci vlnění v bodové řadě.

Předpokládejme tedy, že v bodové řadě existují na dvou místech (O_1 a O_2) dva zdroje vlnění, které kmitají se stejnou periodou, mají stejný směr kmitání a stejné fáze (nebo alespoň konstantní fázový rozdíl) – to jsou tzv. ***koherentní zdroje*** :

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(O_1) &= A_1 \cdot \sin\omega t \\ u_2(O_2) &= A_2 \cdot \sin\omega t \qquad \textit{nebo} \quad u_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_o) \end{aligned}}$$

V kladném směru osy x se potom šíří fázovou rychlostí c dvě stejně lineárně polarizovaná vlnění stejné vlnové délky. Fázová zpoždění kmitů (oproti zdrojům) v libovolném hmotném bodě m, daná proběhnutými drahami (x_1 , x_2) , pak určují rovnice obou vlnění, tj. okamžité výchylky v tomto bodě :

$$u_1(x,t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x_1)$$
$$u_2(x,t) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$



Výsledná výchylka bodu *m* je pak prostým součtem obou jednotlivých výchylek :

$$u(x,t) \;=\; u_1(x,t)+u_2(x,t) \;=\; A_1\cdot sin(\omega\cdot t-k\cdot x_1)+A_2\cdot sin(\omega\cdot t-k\cdot x_2)$$

Ve sledovaném bodě *m*, tj. pro <u>zadané hodnoty</u> x_1 a x_2 pak tato rovnice znamená „obyčejné“ skládání dvou <u>rovnoběžných kmitů stejné frekvence</u> s různými amplitudami (A_1, A_1) a s různými fázovými konstantami :

$$\varphi_1 \;=\; -k\cdot x_1$$
$$\varphi_2 \;=\; -k\cdot x_2$$

Výsledné kmity tedy zapíšeme :

$$u(x,t) \;=\; u(t) \;=\; A_1\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_1) \;+\; A_2\cdot sin(\omega\cdot t+\varphi_2)$$

Právě při skládání rovnoběžných kmitů jsme si zdůrazňovali <u>výhody</u> používání <u>komplexních</u> funkcí, napišme si proto také zde komplexní tvar naší poslední rovnice :

$$\hat{u}=\hat{u}_1+\hat{u}_2=A_1\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t+\varphi_1)}+A_2\cdot e^{\,i\cdot(\omega\cdot t+\varphi_2)}=A_1\cdot e^{\,i\cdot\varphi_1}\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t}+A_2\cdot e^{\,i\cdot\varphi_2}\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t}$$

A za pomoci komplexních amplitud kmitů :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{A}_1 &= A_1\cdot e^{\,i\cdot\varphi_1}\\ \hat{A}_2 &= A_2\cdot e^{\,i\cdot\varphi_2}\end{aligned}}$$

<u>komplexní amplitudy</u>

Pak vznikne nejjednodušší rovnice pro skládání kmitů :

$$\hat{u} \;=\; \hat{A}_1\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t} \;+\; \hat{A}_2\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t}$$

Zde vidíme, proč je z matematického hlediska nutná podmínka, aby obě harmonická vlnění měla <u>stejné</u> vlnové délky, tj. stejné frekvence – pak totiž můžeme stejnou exponencielu vytknout:

$$\boxed{\hat{u} \;=\; (\,\hat{A}_1 \;+\; \hat{A}_2\,)\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t} \;=\; \hat{A}\cdot e^{\,i\cdot\omega\cdot t}}$$

<u>výsledné vlnění</u>

To, že vznikl standardní komplexní tvar kmitů - formálně stejný jako oba výchozí tvary - znamená, že výsledné kmity v daném bodě a (protože to je bod libovolný) i celé výsledné vlnění jsou opět harmonické a stejné frekvence jako obě původní vlny. Amplituda výsledného vlnění A a jeho fázová konstanta Φ jsou pak „skryty“ ve výsledné komplexní amplitudě :

$$\hat{A} = A \cdot e^{i \cdot \Phi}$$

A ta je podle rovnice výsledných kmitů rovna součtu obou výchozích komplexních amplitud :

$$\boxed{\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2}$$

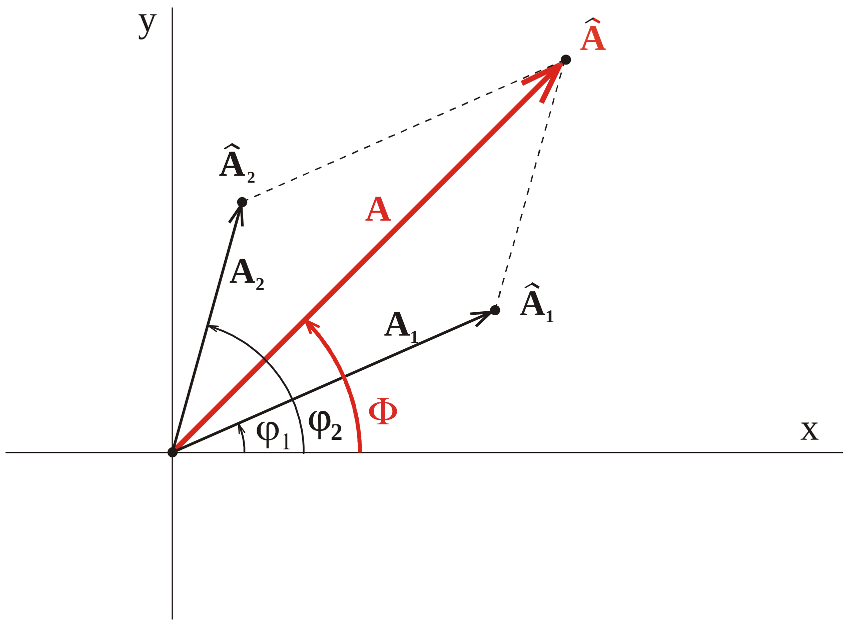
výsledná komplexní amplituda

To znamená, že výslednou amplitudu a fázovou konstantu relativně jednoduše vypočítáme z hodnot těchto veličin u počátečních výchozích kmitů :

$$\boxed{A \cdot e^{i \cdot \Phi} = A_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} + A_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}}$$

výsledná komplexní amplituda

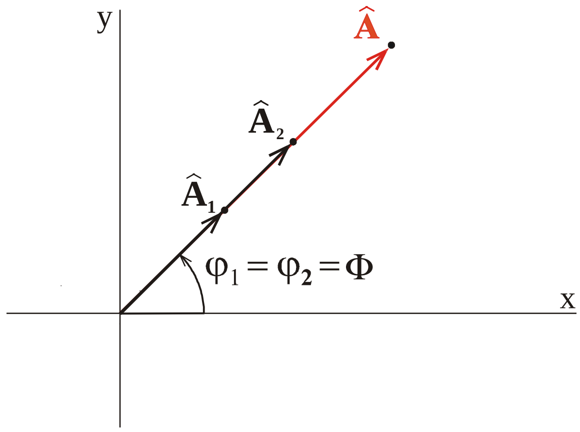
Sečtení dvou komplexních čísel je samozřejmě standardním úkonem matematické analýzy, v tomto případě komplexních exponenciel - je ale možno také s výhodou použít jejich ***grafické znázornění*** a ***sečtení jako vektorů*** , neboť amplituda kmitů je absolutní hodnotou komplexního čísla (délkou vektoru) a fázová konstanta je jeho argumentem (úhlem, který vektor svírá s osou x) :



Amplitudu A výsledných kmitů (vlnění) a jeho fázovou konstantu Φ je pak možno jednoduše odečíst z tohoto grafu jako délku výsledného vektoru a jeho úhel.

Použití komplexních amplitud je také velmi výhodné při hledání maximální a minimální hodnoty výsledné amplitudy, tj. ***maxima a minima interference*** (u mechanických konstrukcí těmto stavům odpovídá maximální a minimální namáhání materiálu, v elektronice vznikají maximální nebo minimální signály, …) :

Například pro ***maximální*** výslednou amplitudu je z obrázku zřejmé, že oba počáteční vektory musí být souhlasně rovnoběžné, tj. pro jejich úhly musí platit :



$$\varphi_2 = \varphi_1 = \Phi$$

Nebo jinak, vyjádřeno pouze pomocí počátečních fázových konstant :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Dostáváme tak podmínku pro ***fázový rozdíl*** obou kmitů. Připustíme-li obecně libovolnou velikost počátečních fázových konstant , můžeme zobecnit :

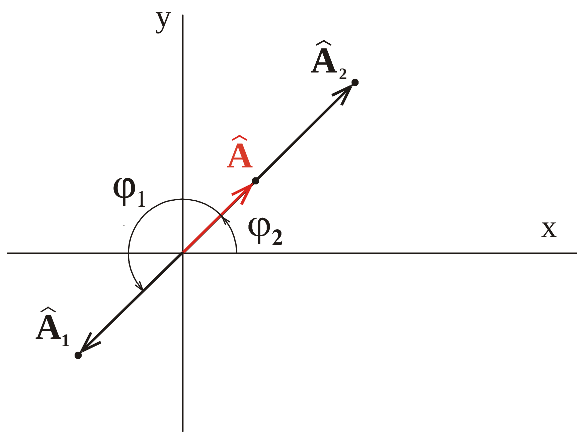
$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \pm n.2\pi$$ n = 0, 1, 2, 3… (celé nezáp. číslo)

V nejjednodušším tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi}$$ **podmínka maxima interference**

Slovně : Fázový rozdíl obou kmitů je roven libovolnému sudému násobku čísla π, oba počáteční kmity jsou tedy „ve fázi“.

Stejně dobře vidíme z grafu podmínku ***minimální*** amplitudy - počáteční vektory musí být nesouhlasně rovnoběžné, tj. pro úhly pak bude platit :



$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \pm n \cdot 2\pi$$ n = 0, 1, 2, 3… (celé nezáp. číslo)

Uvažte, že to lze obecně napsat ve tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\ (2n + 1)\pi}$$

<u>podmínka minima interference</u>

<u>Slovně</u> : Fázový rozdíl kmitů je roven lichému násobku čísla π, kmity jsou tedy „v protifázi“.

<u>Poznámka k oběma podmínkám :</u> Znak „plus mínus“ v obou vztazích zdůrazňuje, že nezáleží na kladné, či záporné hodnotě fázového rozdílu.

Tento znak lze také vypustit, jestliže použijeme absolutní hodnotu, nebo pokud definujeme číslo n jako celé – tj. kladné, záporné i nula - pak tedy např. ***<u>podmínku maxima</u>*** můžeme těmito způsoby napsat :

$$\boxed{|\varphi_1 - \varphi_2| = 2n\pi}$$

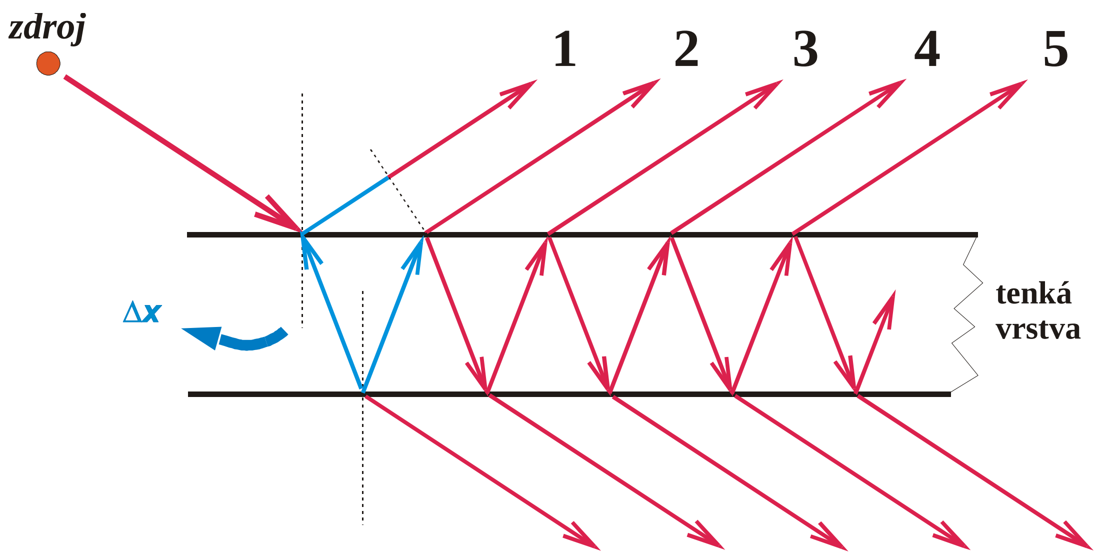
n = 0, 1, 2, 3 … (celé číslo)

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi}$$

n = … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 … (celé nezáp. číslo)

Nyní postoupíme dále : V přírodě i v technických aplikacích však nedochází ke skládání pouze dvou vlnění, ale daleko častěji spolu interferují velké počty koherentních vln (paprsků), které mohou vznikat různým způsobem. Na následujícím obrázku je znázorněna ***<u>interference světla na planparalelní desce</u>*** (je to skleněná destičky s přesně rovnoběžnými vyleštěnými stěnami) , na které z <u>jediného</u> dopadajícího paprsku vzniká důsledkem opakujících se lomů a odrazů světla několik desítek až stovek sekundárních paprsků, které mají konstantní fázové rozdíly .

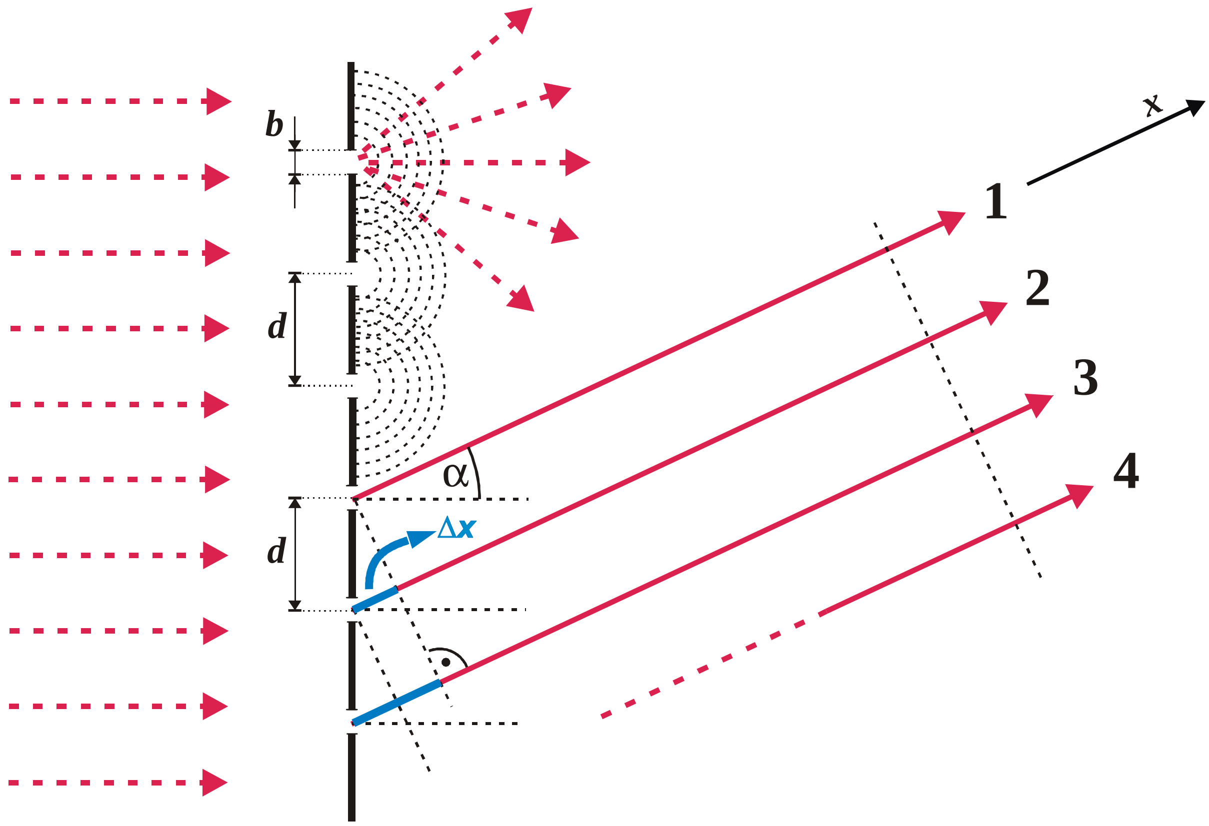
Stejný jev vzniká na průhledné tenké vrstvě, uměle připravené (deponované) na vyleštěné podložce, interferenční obrazce vidíme také například na olejovém filmu rozprostřeném na vodní hladině.



Jiným příkladem, kterým se budeme dále blíže zabývat, je ***interference světla na optické mřížce*** :

Na obrázku je principiálně nakreslena tzv. optická mřížka na průchod světla - na skleněné destičce např. 10 x 10 cm, je fotografickou technikou nebo vyrytím vytvořen systém velkého počtu rovnoběžných průhledných tenkých štěrbin (v pravidelných vzdálenostech d - **konstanta mřížky**), který je při pohledu z boku vidět jako řada malých otvorů.

Na mřížku dopadá (zleva) rovinná světelná vlna (svazek paralelních paprsků) a každá štěrbina (otvor) se stává podle ***Huygensova principu*** elementárním (bodovým) zdrojem vlnění, ze kterého na pravou stranu mřížky vycházejí kulové vlny - tj. paprsky pod všemi možnými směry.



Jestliže pomocí optického zařízení (dalekohledu, spojné čočky) vybereme jeden určitý směr paprsků ze všech štěrbin (daný například úhlem α paprsku a normály ke mřížce – ***difrakční úhel*** paprsku), vznikne soubor velkého počtu (N) paprsků stejné frekvence , vzájemně stejně fázově posunutých , a v ohnisku snímacího optického zařízení (na detektoru záření, na projekčním stínítku, nebo jen na sítnici pozorovatele) dojde k jejich skládání – tedy k interferenci .

Pokusíme se nyní napsat komplexní rovnice tohoto souboru paprsků (rovinných vln), které mají všechny stejné frekvence, tedy i vlnové délky a úhlové vlnočty – a zdůvodníme výše uvedené tvrzení o jejich stejném vzájemném fázovém posunu (rozdílu) :

Na obrázku jsou znázorněny paprsky pod úhlem α od kolmice mřížky. Jestliže položíme osu x do tohoto směru, můžeme použít známé rovnice postupné rovinné harmonické vlny ve směru této osy. Předpokládejme první paprsek s nulovou fázovou konstantou, pak jeho komplexní vyjádření bude :

$$\hat{u}_1(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

Kde komplexní amplituda vlny s nulovou fázovou konstantou je samozřejmě reálné číslo :

$$\boxed{\hat{A}_1 = A}$$

Za předpokladu stejné plochy štěrbiny má potom druhý paprsek stejnou amplitudu a od paprsku prvního se odlišuje pouze delší uběhnutou drahou (o hodnotu Δx, viz obr.) :

$$\hat{u}_2(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot(x + \Delta x))}$$

Roznásobíme výraz v exponentu :

$$\hat{u}_2(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x - k\cdot\Delta x)}$$

Tento vztah ukazuje, že důsledkem delší dráhy – dráhového přírůstku – je vznik konstantního fázového rozdílu (posunu) druhého paprsku oproti paprsku prvnímu (uvidíme dále, že tento fázový rozdíl je stejný pro libovolné dva sousední paprsky) :

$$\boxed{\varphi = -k \cdot \Delta x}$$

fázový rozdíl sousedních paprsků

Zapíšeme s jeho pomocí rovnici druhého paprsku:

$$\hat{u}_2(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x - k\cdot\Delta x)} = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi)}$$

Exponencielu můžeme rozdělit a s využitím pojmu komplexní amplitudy pak psát :

$$\hat{u}_2(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi)} = A \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

U tohoto paprsku má už komplexní amplituda standardní tvar :

$$\boxed{\hat{A}_2 = A \cdot e^{i\cdot\varphi}}$$

Geometrie třetího paprsku je stejná - jeho dráha se oproti druhému paprsku opět zvětší o stejné Δx – a oproti prvnímu paprsku bude tedy **dvojnásobně větší** – o hodnotu $2\cdot\Delta x$:

$$\hat{u}_3(x,t) = A \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x - k\cdot 2\cdot\Delta x)}$$

Fázový posun třetího paprsku oproti předchozímu druhému paprsku je tedy opět φ a vzhledem k prvnímu paprsku pak dvojnásobný - 2φ :

$$\hat{u}_3(x,t) = A \cdot e^{i\cdot 2\varphi} \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = \hat{A}_3 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}$$

Pro třetí komplexní amplitudu tedy máme výraz :

$$\boxed{\hat{A}_3 = A \cdot e^{i \cdot 2\varphi}}$$

Při pravidelném uspořádání mřížky – tj. při stejných vzdálenostech mezi štěrbinami a při stejných plochách štěrbin - je situace stejná <u>mezi kterýmikoliv dvěma sousedními</u> paprsky – mají vždy <u>stejný</u> fázový rozdíl φ a všechny mají <u>stejnou</u> (reálnou) amplitudu A - můžeme tedy lehce napsat analogické rovnice dalších paprsků :

$$\hat{u}_4(x,t) = A \cdot e^{i \cdot 3\varphi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_4 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

$$\hat{u}_5(x,t) = A \cdot e^{i \cdot 4\varphi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_5 \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

$$\vdots$$

$$\hat{u}_N(x,t) = A \cdot e^{i \cdot (N-1)\varphi} \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)} = \hat{A}_N \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

A jejich komplexní amplitudy jsou vyjádřeny vztahy :

$$\boxed{\hat{A}_4 = A \cdot e^{i \cdot 3\varphi}}$$

$$\boxed{\hat{A}_5 = A \cdot e^{i \cdot 4\varphi}}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\hat{A}_N = A \cdot e^{i \cdot (N-1)\varphi}}$$

Za předpokladu, že všechny tyto paprsky budou přivedeny do <u>jediného místa</u> (ohniska snímacího optického zařízení), dojde v tomto bodě k jejich složení (interferenci) do <u>výsledného vlnění</u>. Jeho ***komplexní vyjádření*** získáme, stejně jako u interference dvou vln, součtem jednotlivých komplexních výrazů :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \ldots\ldots + \hat{u}_N}$$

Protože všechny tyto vlny (viz výše) mají stejnou frekvenci a stejný úhlový vlnočet (vlnovou délku), můžeme ze všech výrazů vytknout společnou stejnou exponencielu :

$$\hat{u} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \ldots + \hat{A}_N) \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

Součet všech komplexních amplitud bude opět nějaké komplexní číslo a bude ho možno (jako každé komplexní číslo) zapsat ve standardní exponencielní formě – potom tedy bude mít smysl výsledné komplexní amplitudy :

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \ldots + \hat{A}_N = B \cdot e^{i \cdot \Phi} = \hat{B}$$

Výsledné vlnění bude tedy mít stejnou jednoduchou standardní formu jako všechny výchozí paprsky :

$$\boxed{\hat{u}(x,t) = \hat{B}\cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = B\cdot e^{i\cdot\Phi}\cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)}}$$

komplexní tvar výsledné vlny

Proto můžeme konstatovat, že výsledné vlnění je opět harmonické vlnění, stejné frekvence a vlnové délky a jeho fázová konstanta Φ a výsledná amplituda A jsou určeny výslednou komplexní amplitudou , která je stejně jako u dvou svazků určena součtem všech jednotlivých výchozích komplexních amplitud :

$$\boxed{\hat{B} = B\cdot e^{i\cdot\Phi} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 + \ldots + \hat{A}_N}$$

výsledná komplexní amplituda

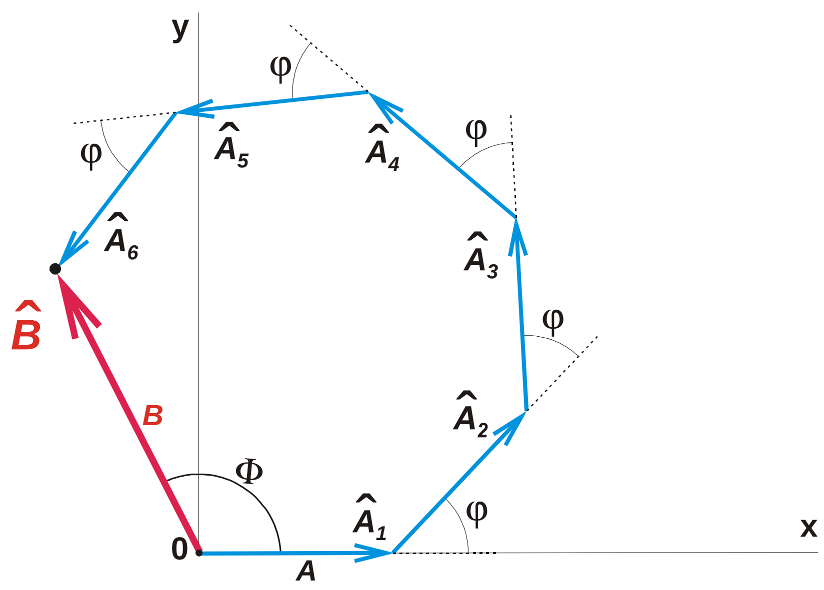
Nyní můžeme dosadit jednotlivé komplexní amplitudy :

$$\boxed{\hat{B} = B\cdot e^{i\cdot\Phi} = A + A\cdot e^{i\cdot\varphi} + A\cdot e^{i\cdot 2\varphi} + A\cdot e^{i\cdot 3\varphi} + \ldots + A\cdot e^{i\cdot(N-1)\varphi}}$$

Vidíme, že komplexní amplitudy všech interferujících paprsků se v případě mřížky vyznačují konstantní velikostí (amplitudou) a konstantním fázovým rozdílem mezi dvěma sousedními členy.

Součet takových komplexních čísel může být znázorněn v grafu jako součet N vektorů stejné délky (A), přičemž každý vektor je odkloněn od předchozího vektoru o stejný úhel φ. (viz následující obrázek pro $N = 6$)

Tímto obrázkem je opět možno demonstrovat jednoduchost a názornost grafického řešení , kde stačí spojit koncový bod s počátkem souřadnic a odečíst délku výsledného vektoru B a jeho úhel Φ.



Není ovšem možno graficky (a ručně) zpracovat <u>větší soubor</u> paprsků – a optická mřížka takový soubor rozhodně vytváří : je-li např. mřížková konstanta d = 1 mikrometr (bývá menší i větší), pak na délce mřížky 10 cm bude počet štěrbin – tedy i paprsků :

$$N = \frac{10 \cdot 10^{-2}\ [m]}{1 \cdot 10^{-6}\ [m]} = 100\,000$$

U stotisícového souboru nemáme samozřejmě šanci uspět s ručním malováním, proto je nutné využít prostředků oblíbené vyšší matematiky a provést analytické sečtení našeho souboru komplexních amplitud. Po vytknutí konstanty hned uvidíme další cestu řešení :

$$\hat{B} = B \cdot e^{i \cdot \Phi} = A(1 + e^{i \cdot \varphi} + e^{i \cdot 2\varphi} + \hat{A}_4 + \ldots + e^{i \cdot (N-1)\varphi})$$

V závorce se totiž „objeví“ známá ***geometrická posloupnost*** (o N – členech) s jasným kvocientem :

$$q = e^{i \cdot \varphi}$$

A tak můžeme použít známý matematický vzorec pro součet takové posloupnosti :

$$\sum_{geom} = \frac{q^N - 1}{q - 1}$$

Dostaneme :

$$\hat{B} = B \cdot e^{i \cdot \Phi} = A \cdot \frac{(e^{i \cdot \varphi})^N - 1}{e^{i \cdot \varphi} - 1} = A \cdot \frac{e^{i \cdot N \cdot \varphi} - 1}{e^{i \cdot \varphi} - 1}$$

Zlomek upravíme formálním vytknutím v čitateli i ve jmenovateli zlomku :

$$\hat{B} = B \cdot e^{i \cdot \Phi} = A \cdot \frac{e^{i \cdot N\varphi} - 1}{e^{i \cdot \varphi} - 1} = A \cdot \frac{e^{i \cdot \frac{N\varphi}{2}} \cdot (e^{i \cdot \frac{N\varphi}{2}} - e^{-i \cdot \frac{N\varphi}{2}})}{e^{i \cdot \frac{\varphi}{2}} \cdot (e^{i \cdot \frac{\varphi}{2}} - e^{-i \cdot \frac{\varphi}{2}})}$$

Vytknuté exponenciely nyní vykrátíme a na dvojčleny v závorkách aplikujeme Moivrovu větu :

$$e^{i \cdot \alpha} - e^{-i \cdot \alpha} = \cos\alpha + i \cdot \sin\alpha - (\cos\alpha - i \cdot \sin\alpha) = 2 \cdot i \cdot \sin\alpha$$

Stejné konstanty ($2\,i$) v čitateli i v jmenovateli se vykrátí a vznikne výrazně jednodušší výraz :

$$\boxed{\hat{B} = B \cdot e^{i \cdot \Phi} = A \cdot e^{i \cdot \frac{(N-1)\varphi}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}}$$

<u>výsledná komplexní amplituda</u>

Porovnáním obou stran rovnice dostaneme vztahy pro amplitudu a pro fázovou konstantu výsledného vlnění :

$$\boxed{B = A \cdot \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}}$$

výsledná amplituda vlnění

$$\boxed{\Phi = \frac{(N-1)\varphi}{2}}$$

výsledná fázová konstanta vlnění

Nyní budeme opět hledat maximální a minimální hodnoty výsledné amplitudy, tj. ***maxima a minima interference*** . Protože intenzita výsledného světla je ve snímacím optickém zařízení měřena většinou kvadratickými detektory záření (dávají signál úměrný právě intenzitě, viz minulá kapitola), je vhodné zkoumat extrémní hodnoty ne amplitudy, ale přímo intenzity vlnění.

Využijeme nejprve znalosti z minulé kapitoly, že (střední) intenzita vlnění je úměrná kvadrátu amplitudy vlnění – ***intenzita výsledného vlnění*** tedy bude (vynecháváme znak střední hodnoty) :

$$I = konst \cdot B^2 = konst \cdot A^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Abychom dostali obecnější vztah, porovnáme tuto intenzitu s intenzitou jednoho výchozího svazku :

$$I_o = konst \cdot A^2$$

Můžeme stanovit poměr obou intenzit :

$$\boxed{\frac{I}{I_o} = \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

poměr intenzit výsledného a počátečního vlnění

Nebo osamostatníme výslednou intenzitu :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

intenzita výsledného vlnění

Vidíme, že intenzita výsledného vlnění je především přímo úměrná intenzitě výchozích paprsků (a ta je úměrná ploše povrchu štěrbin mřížky a intenzitě vlnění na mřížku dopadajícího ze zdroje), ale hlavní závislost, kterou musíme dále vyšetřit je závislost na vzájemném fázovém posuvu výchozích paprsků φ

(který je určen úhlem α mezi paprsky a normálou mřížky) při daném celkovém počtu paprsků N (který je určen mřížkovou konstantou) a při zadané intenzitě výchozích paprsků I_o .

Protože nás zajímají maxima a minima, měly bychom tedy vyšetřit extrémy funkce :

$$I = I(\varphi)$$

To, jak víte, znamená řešení diferenciální rovnice :

$$dI / d\varphi = 0$$

Protože toto řešení není snadné, využijeme i pomocných úvah a budeme hledat extrémy funkce v následujících postupných krocích :

1) Zkoumaná funkce je zřejmě nezáporná , její minima mohou proto být nulové body :

$$0 = I = I_o \cdot \frac{\sin^2 \frac{N\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Rovnice bude splněna při nulovém čitateli, tj. za podmínky, že pro argument sinu platí :

$$\frac{N\varphi}{2} = m \cdot \pi$$

(m je libovolné celé číslo)

Nebo-li :

$$\boxed{\frac{\varphi}{2} = \frac{m}{N} \cdot \pi}$$

podmínka minima intenzity (interference)

(m je libovolné celé číslo)

2) Když si představíme nekonečnou řadu takových čísel m , přijdeme na to, že v této řadě existují jakási „sporná“ čísla, která jsou násobky zadaného parametru N (celkový počet paprsků) :

m = …. , -N , -N+1 , …. -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …. N-1 , N , N+1 , ….. , 2N , 2N+1 , …..

V tomto případě totiž pro číslo m obecně platí :

$$m = n \cdot N$$ (n je libovolné celé číslo, včetně 0)

A z podmínky nulového bodu dostaneme:

$$\frac{N\varphi}{2} = m \cdot \pi = n \cdot N \cdot \pi$$

Po vykrácení počtem svazků vznikne dodatečná podmínka, která platí v těchto výjimečných bodech :

$$\frac{\varphi}{2} = n \cdot \pi$$

A to je podmínka, při které je kromě čitatele roven nule také jmenovatel našeho zlomku a tedy se zřejmě nejedná o nulovou hodnotu intenzity - její velikost je nyní vyjádřena neurčitým výrazem $0/0$.

To je ale velice nadějné, protože to může být – a také bude - maximální hodnota funkce .

Limitu funkce v tomto bodě zjistíme opakovanými derivace podle L'Hospitalova pravidla (zkuste sami) :

$$I(n\cdot\pi) = \lim_{\frac{\varphi}{2}\to n\cdot\pi} I_o \cdot \frac{\sin^2\frac{N\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \lim_{\frac{\varphi}{2}\to n\cdot\pi} I_o \cdot \frac{(\sin^2\frac{N\varphi}{2})'}{(\sin^2\frac{\varphi}{2})'} = \ldots\ldots\ldots = I_o\cdot N^2$$

Dostáváme kladnou hodnotu - maximum funkce – jsou to tzv. hlavní maxima a je velmi důležité, že jejich poloha nezávisí na počtu paprsků :

$$\boxed{\frac{\varphi}{2} = n\cdot\pi}$$

podmínka (poloha) hlavních maxim intenzity (maxima interference)

(n je libovolné celé číslo)

Velikost všech hlavních maxim je stejná a je dána kvadrátem počtu paprsků :

$$\boxed{I = I_o\cdot N^2}$$

velikost hlavních maxim

Pohlédneme-li zpět nahoru na původní řadu čísel m vyjadřujících nulové body, můžeme konstatovat, že každá dvě sousední hlavní maxima intenzity jsou oddělena jejími minimy, vždy v počtu N-1 .

3) V průběhu intenzity ještě existují malá lokální maxima – tzv. ***vedlejší maxima*** – jejich podmínku už ale nelze najít jinak, než opravdu řešením základní rovnice pro extrémy funkce :

$$\frac{dI}{d\varphi} = 0$$

Dostaneme :

$$N\cdot\sin\frac{N\varphi}{2}\cdot\cos\frac{N\varphi}{2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cdot\sin^2\frac{N\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

A po úpravě vznikne transcendentní rovnice :

$$N\cdot tg\frac{\varphi}{2} = tg\frac{N\varphi}{2}$$

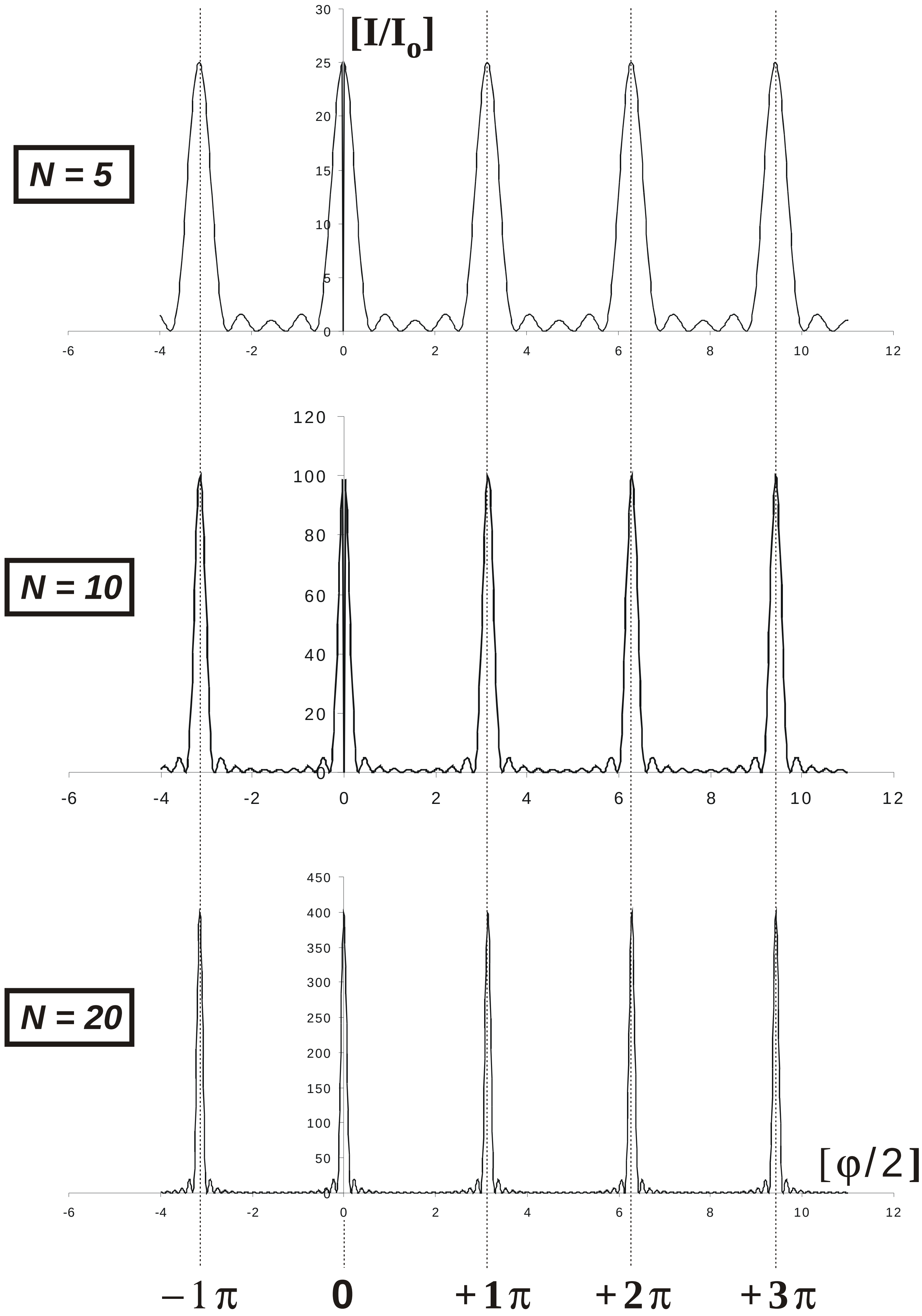
Která pro vedlejší maxima poskytuje přibližné řešení (v intervalu (o,π)) :

$$\boxed{\frac{\varphi}{2} = \frac{2l+1}{2N}\cdot\pi}$$

podmínka vedlejších maxim intenzity

Kde celá čísla l pro $\varphi/2$ z intervalu (o,π) nabývají hodnot $l = 1, 2, 3, \ldots.. N$-2

To znamená, že mezi dvěma sousedními hlavními maximy existuje (kromě nulových minim) také ještě N -2 těchto vedlejších maxim



[I/Io]
N = 5
N = 10
N = 20
[φ/2]
−1π
0
+1π
+2π
+3π

Na přiloženém obrázku můžeme sledovat výše popsaný průběh výsledné intenzity obrázku a jeho změny při rostoucím počtu použitých paprsků :

1) Průběh intenzity je vždy **symetrický** vzhledem ke kladným i záporným hodnotám proměnné $\varphi/2$
2) Poloha hlavních maxim je stále **stejná**
3) S počtem paprsků kvadraticky roste jejich výška. Pro uváděný reálný příklad mřížky se 100 000 paprsky má „**zesílení**“ intenzity světla neuvěřitelnou hodnotu $N^2 = \mathbf{10^{10}}$
4) S počtem paprsků se **zvyšuje** počet minim (N-1) a vedlejších maxim (N-2) mezi každými dvěma hlavními maximy,
5) A tento fakt je dokonce ještě **daleko důležitější**, než výška maxima – vždyť například u mřížky se 100 000 paprsky tak bude mezi každými dvěma hlavními maximy „nacpáno“ 99 999 minim a 99998 vedlejších maxim. Proto budou hlavní maxima enormně **úzká** - něco jako δ - funkce v matematice - jejich polohu bude tedy možno změřit velmi přesně. Proto **interferenční měřicí metody** a přístroje vynikají **vysokou přesností** , kterou jinými postupy nelze dosáhnout.

Výše uvedené výsledky platí zcela obecně – pro jakýkoliv soubor stejně fázově posunutých vlnění, dokončíme však jejich aplikaci na optickou mřížku, se kterou jsme i začínali naše úvahy :

Na optické mřížce je konkrétní situace taková, že dráhový i fázový rozdíl závisí na difrakčním úhlu α – úhlu odklonu paprsků od kolmice k mřížce, tj. od původního směru dopadajícího vlnění - nebude tedy obtížné vztah pro výslednou intenzitu přetransformovat do nové proměnné α

Pro fázový rozdíl sousedních paprsků jsme totiž výše odvodili vztah :

$$\varphi = -k \cdot \Delta x$$

A dráhový rozdíl sousedních paprsků vyjádříme pomocí mřížkové konstanty d (viz obrázek mřížky na začátku kapitoly - pravoúhlý trojúhelník s přeponou d a odvěsnou Δx):

$$\Delta x = d \cdot \sin\alpha$$

Pro fázový rozdíl tedy dostaneme :

$$\varphi = -k \cdot \Delta x = -k \cdot d \cdot \sin\alpha$$

Což můžeme nyní dosadit do vztahu pro výslednou intenzitu : uvážíme-li druhé mocniny sinů (případně jejich poměry), dostaneme jen kladné argumenty :

$$\boxed{I = I_o \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N k d \sin\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} k d \sin\alpha\right)}}$$

intenzita výsledného vlnění (v proměnné α)

Vztah pro intenzitu touto transformací rozhodně nezískal na jednoduchosti a přehlednosti. Raději se proto zřekneme jeho diskuse a místo toho vytvoříme jednoduchou a ze střední školy známou „rovnici mřížky“ tím způsobem, že do proměnné α nyní přetransformujeme vztah pro hlavní maxima :

$$\frac{\varphi}{2} = n \cdot \pi$$ (n je libovolné celé číslo)

Po dosazení za fázový rozdíl dostaneme :

$$n \cdot \pi = \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} k \cdot d \cdot sin\alpha$$

Pro úhlový vlnočet použijeme známý vztah z FYA1 :

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

Po jeho dosazení bude :

$$n \cdot \pi = -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot d \cdot sin\alpha$$

V této rovnici se na levé straně uvažují libovolná celá čísla n - tj. kladná i záporná – a na pravé straně tomu odpovídají kladné či záporné hodnoty difrakčního úhlu paprsků α (tj. měřené na jednu či druhou stranu od kolmice mřížky) a stejně tak i hodnoty dráhového a fázového rozdílu paprsků.

Čísla n stejné absolutní hodnoty však dávají i v absolutní hodnotě stejné úhly, i dráhové a fázové rozdíly paprsků a průběh intenzity výsledného vlnění je naprosto symetrický pro kladné i záporné hodnoty proměnné $\varphi/2$ (viz rovnice intenzity a grafy) – proto můžeme klidně vypustit záporné znaménko pravé strany (jeho ponechání by bylo matematicky exaktní, ale bez fyzikálního významu).

Po vykrácení π a vynásobení vlnovou délkou tak dostaneme :

$$\boxed{d \cdot sin\alpha = n \cdot \lambda}$$ ***<u>rovnice pro maxima na optické mřížce</u>***

(n je libovolné celé číslo)

<u>Pozn. :</u> Je také možno uvažovat úhel paprsku jako pouze kladný a na pravou stranu rovnice dosazovat analogicky pouze celá nezáporná čísla ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), jak je běžné ve středoškolských učebnicích.

<u>Pozn. :</u> Nebo je možné od samého počátku pracovat pouze s absolutními hodnotami dráhového a fázového rozdílu, tj.

$$\left| \frac{\varphi}{2} \right| = n \cdot \pi$$ (maxima interference)

(n je celé nezáporné číslo)

$$\left| \varphi \right| = k \cdot \Delta x$$ (fázový rozdíl sousedních paprsků

Rovnice mřížky obsahuje čtyři veličiny - musí být tedy tři z nich zadány, abychom mohli stanovit veličinu čtvrtou. Konstanta používané mřížky d je většinou známá (ale také ji můžeme počítat – viz úloha ve fyzikálním praktiku), potom - jestliže se zaměříme na konkrétní vlnovou délku λ , tak musíme ještě zadat určité hodnoty čísel n ($n = 1, 2, 3, ..$) a teprve potom jako řešení rovnice můžeme určovat hodnoty úhlu α ($\alpha = \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots$) , při kterých dochází k maximu interference – mluvíme o ***maximu 1. řádu*** (2. řádu, 3. řádu, atd.).
Dále si můžeme představit, že sledujeme v určitém řádu (tj. pro dané číslo n, např. $n = 1$) více vlnových délek, např. celý interval viditelného světla ($360, 760$) nm (samozřejmě za předpokladu, že na mřížku dopadá světlo tyto vlnové délky obsahující, jako například sluneční bílé světlo, ve kterém jsou zastoupeny všechny vlnové délky), pak jako řešení rovnice tomu bude odpovídat také nějaký celý interval úhlů – a na promítacím stínítku budou tyto vlnové délky od sebe prostorově odděleny – dojde k rozkladu světla, vznikne optické ***spektrum 1. řádu*** (a analogicky spektrum 2. řádu, 3. řádu, atd.).

Pozn. : Pro $n = 0$ (***maximum 0. řádu***) dostáváme nulový úhel pro všechny vlnové délky, ve směru kolmém k mřížce tedy žádné spektrum nevzniká (interference neprobíhá, fázové rozdíly jsou nulové).

Standardně se mřížka používá v optickém ***spektrometru*** (monochromátoru) pro ***spektrální analýzu*** světla zkoumaného zdroje (například zářícího plazmatu) tak, že pro při známé mřížkové konstantě a známém řádu spektra se měří úhly interferenčních maxim a stanovují se vlnové délky.

Jak zdůvodněno výše, je toto měření velmi přesné – vlnovou délku lze například změřit na 6 platných číslic – je proto možno přesně identifikovat zářící objekty – částice (v plazmatu to jsou atomy, ionty a molekuly) a změřením velikosti intenzity jejich záření (každý spektrometr má detektor světla, např. fotonásobič, CCD čip) můžeme stanovit jejich koncentraci.
Lze tak určit chemické složení prakticky jakékoliv látky – nejenom plynu - ale také kapaliny i pevné látky (které rozptýlíme nějakým způsobem do plazmatu), což je často používáno v chemických a fyzikálních laboratořích (je to také vhodná metoda pro stanovení znečištění vzduchu, vody ….).

Prozkoumejme na závěr konkrétní rozložení interferenčních spekter v různých řádech :
Z rovnice mřížky plyne pro difrakční úhel :

$$sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

A nyní uvážíme důležitou okolnost - že rovnice mřížky obsahuje omezenou funkci sinus. Musí proto platit (pro nezáporná čísla n):

$$sin\alpha \ = \ n \cdot \frac{\lambda}{d} \ \leq \ 1$$

Aby tedy existovalo pro danou vlnovou délku alespoň jedno maximum (v prvním řádu), musí mřížková konstanta splňovat nerovnost :

$$\boxed{\lambda \ \leq \ d}$$

podmínka funkce mřížky

Běžná optická mřížka pro viditelné světlo ($360, \ 760$) nm je tvořena při šířce 10 cm počtem například 60 000 štěrbin – nebo jak se většinou udává v přepočtu na jednotku délky - **600 štěrbin na 1 mm**. Pak je mřížková konstanta skutečně větší než kterákoliv vlnová délka z uvedeného intervalu:

$$d \ = \ \frac{1\,mm}{600} \ = \ 1{,}667\,\mu m \ = \ 1667\,nm$$

Ověřte si sami, konkrétním výpočtem z rovnice mřížky, že pro tuto mřížkovou konstantu dostáváme pro krajní úhly intervalu viditelného světla v několika řádech následující hodnoty :

$$sin\alpha \ = \ n \cdot \frac{\lambda}{d} \ = \ n \cdot \frac{0{,}36}{1{,}667} \ = \ n \cdot 0{,}216$$

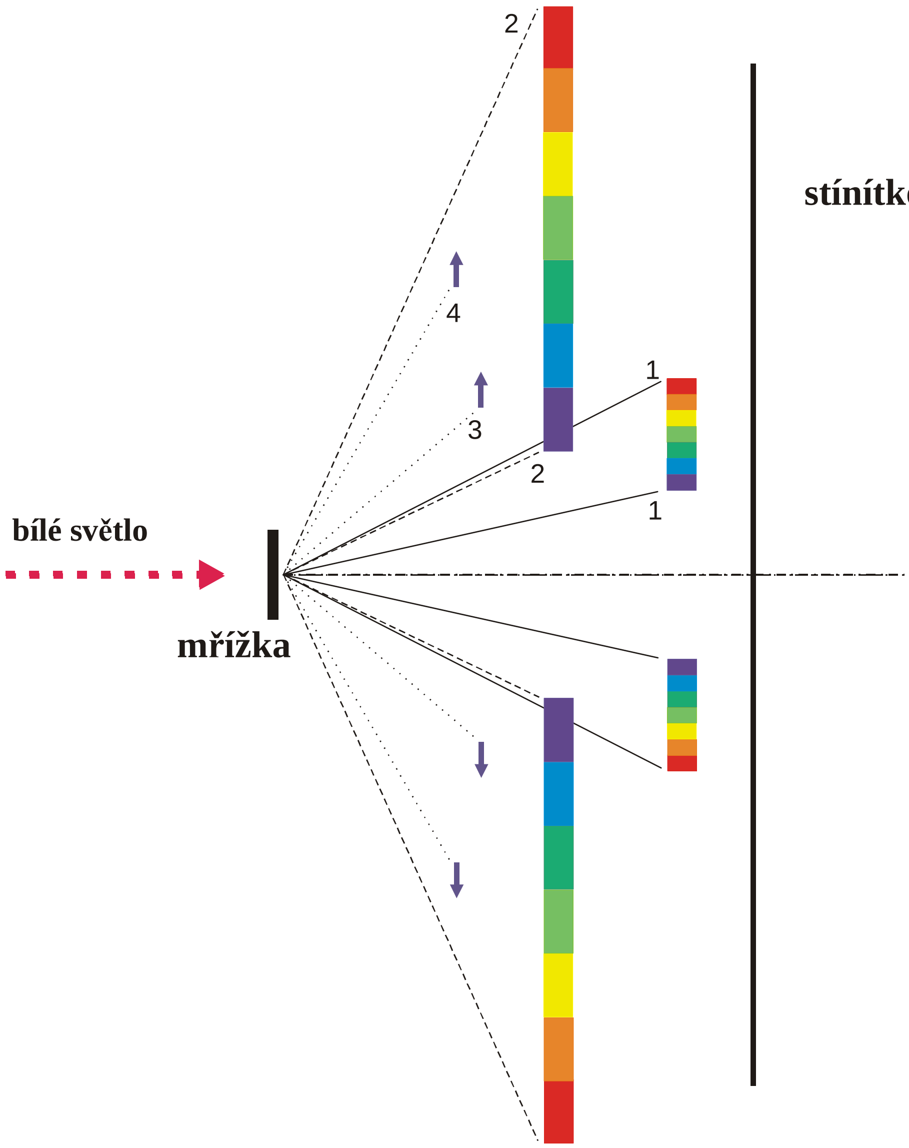
$$sin\alpha \ = \ n \cdot \frac{\lambda}{d} \ = \ n \cdot \frac{0{,}76}{1{,}667} \ = \ n \cdot 0{,}456$$

Pro přehlednost jsou výsledky v tabulce :

	1. řád	**2. řád**	**3. řád**	**4. řád**	**5. řád**
α (360 nm)	12,5 °	25,6 °	40,4 °	59,8 °	-----
α (760 nm)	27,1 °	65,8 °	-----	-----	-----

Je vidět, že fialové světlo 360 nm, vznikne za mřížkou čtyřikrát – tj. ve čtyřech řádech a bude to tedy krátkovlnný začátek čtyř spekter – ale vytvoří se pouze dvě kompletní spektra , obsahující i dlouhovlnný červený konec 760 nm (na každé straně od kolmice, viz obrázek).

Povšimněte si také, že spektrum 2. řádu je výrazně širší - zabírá větší interval úhlů α - ve kterém je pak možné přesnější stanovení vlnové délky – a mřížka má proto výrazně lepší ***rozlišovací schopnost*** ve druhém řádu, než v řádu prvním.



Uvedený příklad 600 štěrbin na 1 mm je zřejmě dosti typický pro mřížky pracující ve viditelném světle, neboť při výraznějším zvýšení počtu štěrbin by poslední uvedená rovnice nemusela být pro $n = 2$ již splněna - tedy výhodné spektrum 2. řádu by bylo neúplné.

Menší počet štěrbin mřížky však v tomto směru nevadí. Například při počtu 286 štěrbin na 1 mm bude mřížková konstanta :

$$d = \frac{1\,mm}{286} \cong 3{,}50\,\mu m = 3500\,nm$$

Ověřte si, opět konkrétním výpočtem z rovnice mřížky, že pro tuto mřížkovou konstantu dostáváme pro krajní úhly intervalu viditelného světla v několika řádech následující hodnoty :

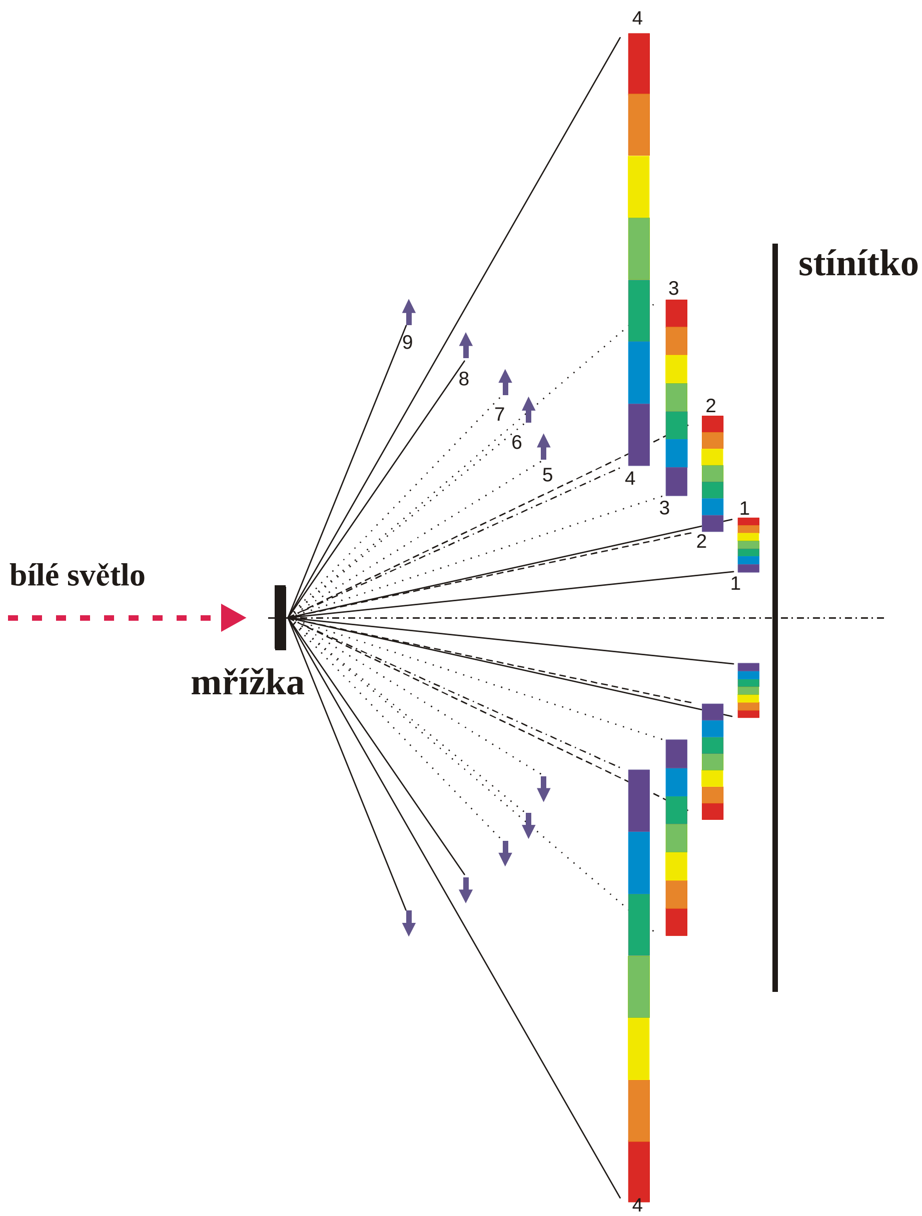
$$\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d} = n \cdot \frac{0{,}36}{3{,}5} = n \cdot 0{,}103$$

$$\sin\alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d} = n \cdot \frac{0{,}76}{3{,}5} = n \cdot 0{,}217$$

Výsledky jsou opět v tabulce a na obrázku :

	1. řád	2. řád	3. řád	4. řád	5. řád
α (360 nm)	5,9 °	11,9 °	18,0 °	24,3 °	31,7
α (760 nm)	12,5 °	25,7 °	40,6	60,2	-----

	6. řád	7. řád	8. řád	9. řád	10. řád
α (360 nm)	39,5 °	46,1 °	55,5 °	68,0 °	-----
α (760 nm)	-----	-----	-----	-----	-----



Nyní již na obou stranách kolmice mřížky vznikly čtyři kompletní spektra viditelného světla, opět ve vyšších řádech více „roztažená“ (rozlišovací schopnost ve srovnatelném řádu je ovšem viditelně menší, než u první mřížky).

Na obrázku je také dobře patrný nepříznivý jev - tzv. „***<u>překrývání spekter</u>***“ jednotlivých řádů, které by bylo ještě výraznější při sledování širšího intervalu vlnových délek, například (100, 1000) nm. Matematicky je tento problém ihned jasný při pohledu na rovnici mřížky :

$$d \cdot sin\alpha = n \cdot \lambda$$

Pro jednu hodnotu difrakčního úhlu α , tj. pro jednu hodnotu levé strany, je pravá strana zřejmě splněna pro více dvojic čísel n a λ :

Např. na jednom a témže místě (úhlu), kde leží v 1. řádu maximum vlnové délky 900 nm, bude současně ležet ve 2. řádu maximum vlnové délky 450 nm, ve 3. řádu maximum vlnové délky 300 nm, ve 4. řádu maximum vlnové délky 225 nm, atd.… !!!

Vznikne tak komplikovaná situace, která neumožní vzájemně od sebe odlišit záření uvedených jednotlivých vlnových délek a stanovit jejich intenzity - změříme jen výslednou intenzitu všech těchto vlnových délek dohromady.

> *<u>Pozn. :</u>* Při analýze **<u>čárových spekter</u>** (které obsahují konečný soubor diskrétních vlnových délek – spektrálních čar) překrývání spekter ale není zásadní překážkou, protože pravděpodobnost shody vyššího řádu nějaké spektrální čáry s jinou spektrální čarou je velmi malá.

Z předchozích úvah je zřejmé, že problém překryvu různých řádů lze vyřešit zmenšením zkoumaného intervalu vlnových délek – například použitím vhodných optických filtrů (tzv. **řádové filtry**). I jen obyčejná destička z běžného okenního skla, zařazená na vstup spektrometru stoprocentně odfiltruje (absorbuje) všechny vlnové délky menší než 320 nm, - tj. veškeré ultrafialové záření

(proto se také za oknem nikdy neopálíte, ledaže by bylo ze speciálního křemenného skla).

Ostatně – jak uvidíme v příští kapitole „Difrakce vlnění“ - uvnitř každého paprsku, vystupujícího ze štěrbiny mřížky, probíhá další interference, která způsobí, že <u>intenzita</u> paprsku závisí na úhlu α takovým způsobem, že od jeho určité hodnoty (první difrakční minimum) dojde k prudkému poklesu intenzity.

Poloha tohoto místa (úhlu) závisí také na šířce štěrbin mřížky, takže její vhodnou volbou lze libovolně omezit počet řádů (velmi často jsou mřížky konstruovány jen na dva řády).

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 01/06)**

rev. a doplň. 11/07