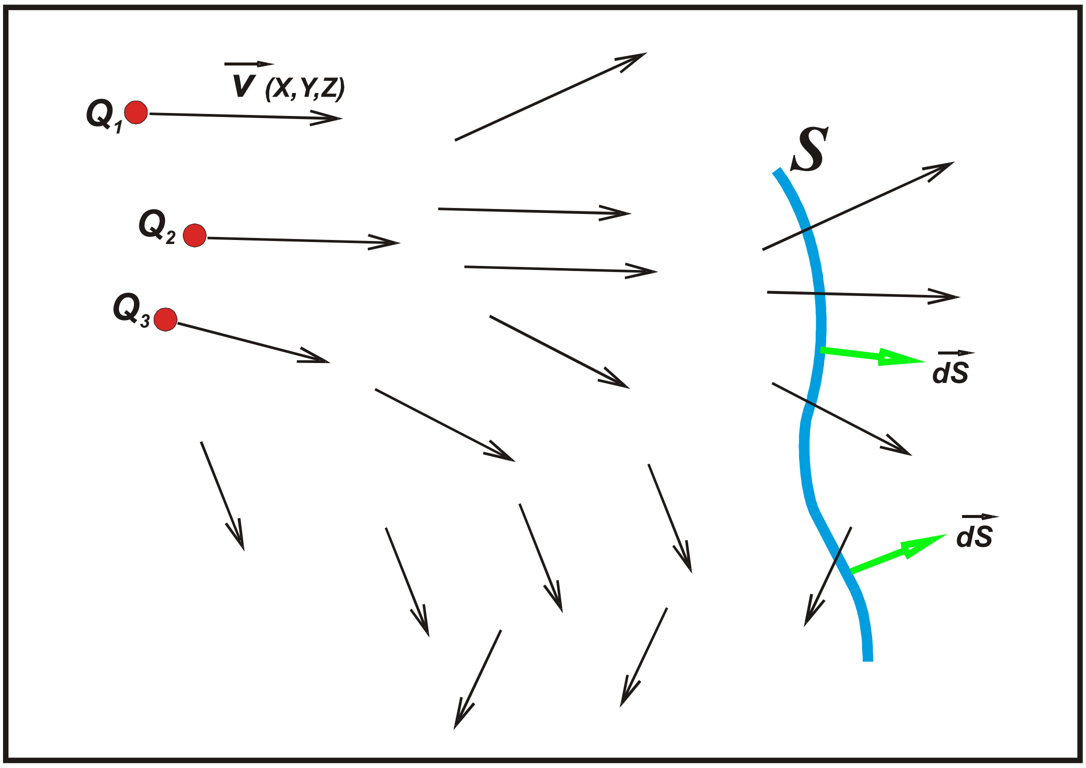
Elektrický proud

V tomto odstavci vlastně již opouštíme elektrostatické pole, protože veličinu **elektrický proud** zavádíme v situaci, kdy elektrické náboje v prostoru nejsou nehybné, ale vykazují nějaký pohyb. Víme již, že jednou ze základních vlastností nábojů je jejich spojení s hmotnými částicemi – při pohybu nábojů tedy jde současně o pohyb hmoty v prostoru, který lze stejně jako v hydrodynamice popsat tak, že stanovíme rychlosti nábojů v každém místě sledovaného prostoru (pole rychlosti) :

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$$

Pro exaktní definici elektrického proudu musíme v prostoru, ve kterém se pohybují náboje, zvolit spojitou (ohraničenou) plochu S (viz následující obrázek, na kterém je plocha nakreslena „z profilu“ a vypadá tedy jako křivka).



Dráhy pohybujících se nábojů pochopitelně někdy protínají naši zvolenou plochu, náboje tak přecházejí bez problémů „skrze, přes plochu S“ (je to pouze myšlená plocha, která nebrání pohybu nábojů). Je zřejmé, že v závislosti na dráze konkrétního náboje existují dvě možnosti směru, či smyslu přechodu plochy – na našem obrázku bychom je popsali jako „z levé strany plochy na její pravou stranu“, a nebo opačně. Slovní popis směru přechodu plochy lze ovšem těžko obecně používat (kromě uzavřených ploch, kde můžeme směr pohybu nábojů jednoznačně popsat jako „z vnitřku plochy ven“, nebo dovnitř) a je proto nutné exaktní vyjádření směru přechodu plochy.

K tomu se dobře hodí normálový vektor plochy $d\vec{S}$ - při jeho používání pak v každém místě plochy můžeme jednoznačně konstatovat, zda náboje procházejí plochu ve směru tohoto vektoru (nebo opačně) – a tyto náboje pak můžeme dobře sčítat (a odčítat náboje procházející v opačném směru) :

Nechť dQ je celkový náboj, který za dobu dt projde přes plochu S ve zvoleném směru (smyslu), potom definujeme:

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$ ***elektrický proud*** (procházející plochou S)

Slovní vyjádření : je to celkový elektrický náboj, prošlý zvolenou plochou S za jednotku času (ve stanoveném směru).

Jednotkou elektrického proudu je :

$$A\ [Amper] = \frac{[C]}{[s]}$$

Poznámka 1 : Je také možné, jak jsem viděl ve vaší učebnici matematické analýzy, nejprve definovat celkový náboj $Q = Q(t)$, který prošel v čase t přes plochu S ve zvoleném směru , pak dQ bude jeho přírůstek (změna) a proud jako přírůstek tohoto náboje za 1 času bude časová derivace. V naší definici však žádná funkce $Q(t)$ není zavedena a dQ tedy není (úplný) diferenciál (jako u procesních veličin v termodynamice) a el. proud není derivace.

(Označení $Q(t)$ pak použijeme pro jiný náboj – viz další text)

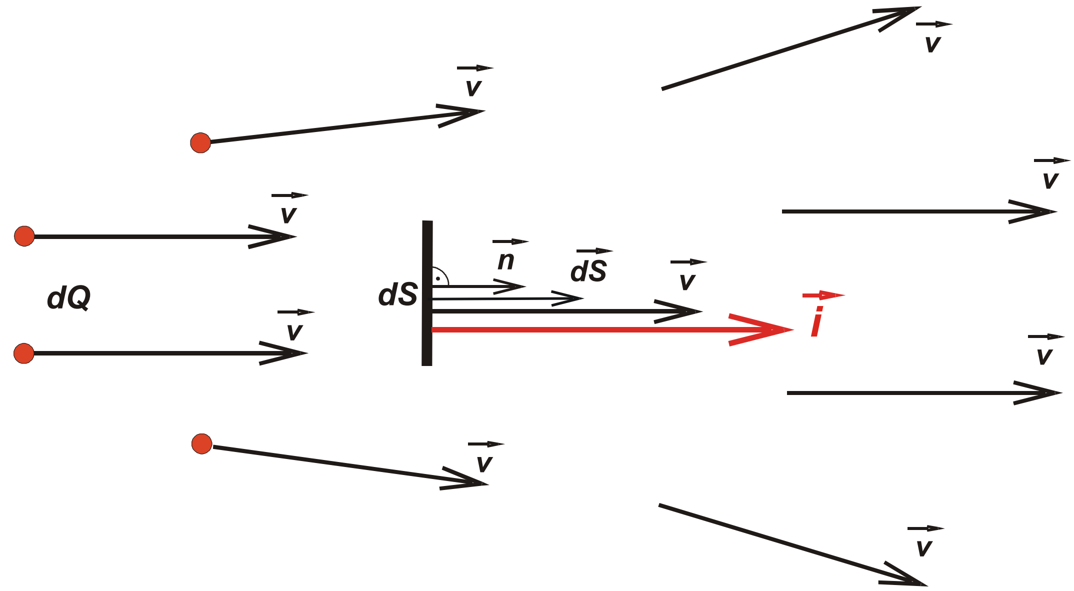
Poznámka 2 : Je zřejmé, že elektrický proud jako spojitou veličinu má smysl definovat zejména v prostředí s velkým množstvím pohybujících se nábojů, nejlépe pak při spojitě rozložených nábojích.,

Z definice a doprovodného textu vidíme, že elektrický proud (a i jiné „proudy“ – kapalin, …) je poněkud „divná veličina“. Není to totiž typická skalární veličina – definujeme přece její směr, smysl - a není to ani typický vektor – jeho směr není určen (jedinou) orientovanou úsečkou.

V každém případě je však elektrický proud „makroskopická (integrální) veličina“ – popisuje pouze celkový , výsledný přesun elektrického náboje přes celou „velkou“ plochu S.

Pro přesný popis pohybu nábojů v daném místě pak zavádíme „skutečnou“ vektorovou veličinu **(plošná) hustota el. proudu (proudová hustota)** $\vec{i}$, a to následovně:

V daném místě zvolíme malou plošku dS kolmou na rychlost nábojů $\vec{v}$ a označíme dI proud procházející touto ploškou ve směru $\vec{v}$ (stejném jako $d\vec{S}$, i jako normálový vektor $\vec{n}$, (viz obr.).



Pak definujeme **vektor proudové hustoty** $\vec{i}$ pomocí jednotkového vektoru a velikosti :

- směr a orientaci mu přiřadíme stejnou jako má rychlost nábojů $\vec{v}$, tj. jako jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ plošky dS
- a jeho velikost stanovíme vztahem :

$$\boxed{i = \frac{dI}{dS}}$$ **proudová hustota** (velikost)

Slovně : *je to elektrický proud, procházející jednotkovou plochou kolmou k rychlosti pohybu nábojů, nebo-li elektrický náboj prošlý za 1 času 1 kolmou plochou.*

Proudová hustota je velmi důležitá při stanovení proudového zatížení vodičů v elektrotechnice, její jednotkou je :

$$[\, A.m^{-2} \,]$$

Vektorový zápis proudové hustoty pak může být vyjádřen :

$$\boxed{\vec{i} = i \cdot \vec{n}}$$ **proudová hustota** (vektor)

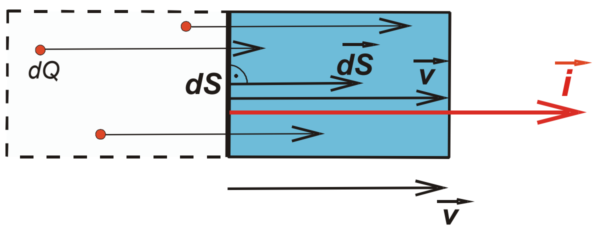
Z definice plošné hustoty elektrického proudu vidíme, že tato fyzikální veličina detailně popisuje pohyby nábojů ve sledované části prostoru (například v proudovém vodiči, v plazmatu elektrického výboje, …), určuje totiž „lokální elektrický proud“ v daném místě a v daném čase, je to tedy zjevně funkce (vektorová) těchto proměnných :

$$\vec{i} = \vec{i}\,(\vec{r}, t) = \vec{i}\,(x, y, z, t)$$

Nyní vyjádříme proudovou hustotu pomocí rychlosti nábojů za předpokladu spojitého rozložení náboje v prostoru s hustotou ρ. V tomto případě - jak víme z kapitoly „Zobecnění Coulombova zákona“ – každý objemový element prostoru obsahuje elektrický náboj :

$$dQ = \rho \cdot dV$$

Tyto náboje o rychlosti $\vec{v}$ se v okolí diferenciální plošky dS pohybují po přímočarých drahách, navzájem rovnoběžných, a přitom přecházejí z jedné strany plošky na stranu druhou (viz obr.) :



Protože s pohybem nábojů je nedílně spojený pohyb hmoty, můžeme použít dřívějších znalostí z hydrodynamiky (viz kapitola Gaussův zákon), že objemový tok ploškou dS, jako objem hmoty proteklý přes tuto plošku za 1 času (na obrázku zvýrazněný), lze vyjádřit skalárním součinem vektoru plošky a rychlosti částic (nábojů), který má v případě rovnoběžných vektorů jednoduchý tvar :

$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = v\,dS$$

Vynásobením hustotou náboje ρ získáme celkový náboj v tomto objemu - a to je také náboj prošlý ploškou dS za 1 času - nebo-li podle definice to je proud přes tuto plošku (která je diferenciálně malá, proto i proud přes ní bude takový a označíme ho tedy diferenciálem) :

$$\rho \cdot v\,dS = dI$$

A nyní můžeme vypočítat velikost proudové hustoty :

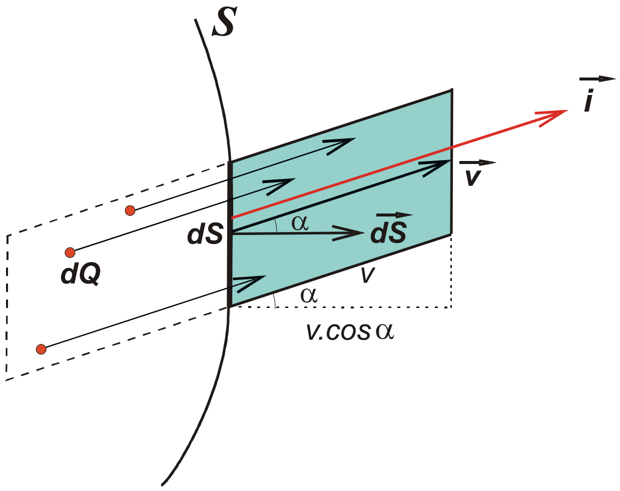
$$i = \frac{dI}{dS} = \frac{\rho\, v\, dS}{dS} = \rho\, v$$

Protože je to vztah mezi velikostmi rovnoběžných vektorů, můžeme změnit rovnici na vektorovou (stačí vynásobit obě strany jednotkovým vektorem $\vec{n}$) :

$$\boxed{\vec{i} = \rho \cdot \vec{v}}$$

vztah proudové hustoty a rychlosti nábojů

Hustota nábojů ve sledovaném prostoru a jejich pole rychlosti nám tedy umožňují stanovit proudovou hustotu a tím získat informaci o lokálních pohybech nábojů v libovolném místě prostoru.
Pak ovšem také musí být principiálně možné určit celkový přenos náboje přes libovolně zvolenou velkou plochu S – tedy **elektrický proud** procházející touto plochou :



Nejprve vypočítáme objemový tok přes její libovolnou elementární plošku dS (protože má nyní tato ploška obecnou polohu, vektory plošky a rychlosti již nejsou rovnoběžné, musíme ponechat obecný tvar skalárního součinu) :

$$\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Vynásobením hustotou náboje ρ získáme celkový náboj v tomto objemu, tj. náboj prošlý ploškou dS za 1 času - tedy proud přes tuto plošku :

$$dI = \rho\,\vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

Pak celkový proud přes celou plochu S je součtem (integrálem) těchto výrazů:

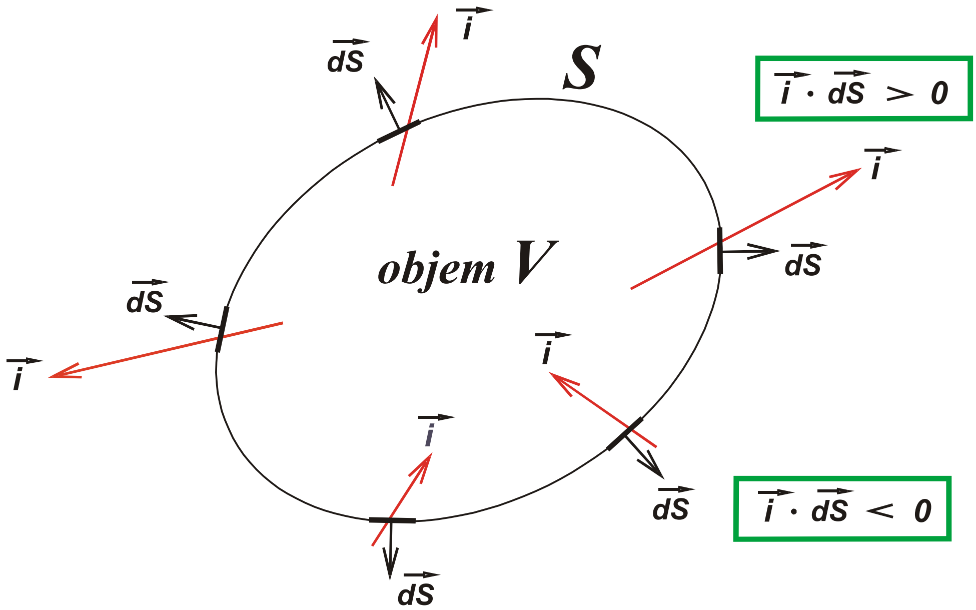
$$\boxed{I = \iint\limits_S \vec{i} \cdot d\vec{S}}$$

elektrický proud jako tok proudové hustoty

Tento velmi obecný vztah, spojující integrální veličinu elektrický proud s lokální (diferenciální) proudovou hustotou, bude dále efektivně využit např. při úpravách rovnic magnetického pole a v následujícím odstavci pak s jeho pomocí nalezneme základní zákon soustavy pohybujících se nábojů :

Rovnice kontinuity elektrického proudu

V oblasti (prostoru), kde se pohybují náboje, zvolme libovolnou spojitou **uzavřenou** plochu S (taková plocha obklopuje, uzavírá nějaký objem V, můžeme si ji proto představit jako povrch tělesa o objemu V, viz obrázek) .



Napišme proud touto plochou, ve směru orientace plošek $d\vec{S}$, z vnitřku plochy (z objemu V) ven :

$$I = \oiint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

Předpokládejme, že tento proud je kladný (tj. vektory rychlostí a plošek svírají většinou ostrý úhel, viz obr.) a uvažme jeho význam pro naši speciální plochu:

- je to náboj prošlý za 1 času přes plochu S, ve směru vektorů $d\vec{S}$
- tento náboj proto pochází z vnitřku plochy S, tedy z objemu V
- za 1 času (po jejím uplynutí) bude tedy v objemu V tento náboj chybět, jinak řečeno - nastane zde úbytek - obecně změna - celkového náboje (protože objem V je částí zkoumané oblasti, ve které existují náboje (a pohybují se), obsahuje vždy nějaký celkový elektrický náboj). Tato změna náboje má ovšem opačné znaménko, než velikost prošlých nábojů (proud) :

$$\boxed{-\oiint_S \vec{i} \cdot d\vec{S}}$$

Protože se náboje pohybují – a důsledkem toho je, že ven z objemu V teče přes plochu S proud – je celkový náboj v objemu jistě funkcí času (stále klesající, v případě stále kladného proudu) :

$$Q = Q(t)$$

A matematickým vyjádřením změny této funkce (za 1 času) je její časová derivace :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}}$$

Porovnáním obou výrazů dostáváme zásadní matematický vztah :

$$\boxed{-\oint\!\!\oint_S \vec{i}\cdot d\vec{S} \;=\; \frac{dQ}{dt}}$$

<u>rovnice kontinuity</u> (integrální tvar)

<u>Fyzikální smysl :</u> Na pravé straně rovnice vyjádřená změna celkového náboje za jednotku času v libovolném objemu prostoru je vždy přesně rovná (na levé straně rovnice uvedenému) celkovému náboji vyteklému za stejný čas z tohoto objemu do okolního prostoru.

Protože tato rovnice jasně ukazuje, jaká je fyzikální příčina úbytku náboje v nějakém objemu - že se náboj „neztrácí“ , ani „neničí“, ale jen odtéká do okolí - považujeme ji za obecný ***<u>zákon zachování elektrického náboje</u>***.

Upravme rovnici kontinuity pro případ objemově rozložených nábojů, kdy lze dobře vyjádřit celkový náboj Q v objemu V jako součet nábojů ve všech objemových elementech :

$$Q \;=\; \iiint_V dQ \;=\; \iiint_V \rho . dV$$

Dosadíme do pravé strany :

$$-\oint\!\!\oint_S \vec{i}\cdot d\vec{S} \;=\; \frac{dQ}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\iiint_V \rho . dV$$

Derivace a integrace na pravé straně se týkají různých proměnných, proto je možné přehodit jejich pořadí. Přitom uvažme, že hustota náboje je stejně jako proudová hustota funkcí místa a času :

$$\rho \;=\; \rho(x,y,z,t)$$

Časová změna hustoty je proto tedy pouze její parciální derivací, dostaneme tak :

$$-\oint\!\!\oint_S \vec{i}\cdot d\vec{S} \;=\; \iiint_V \frac{\delta\rho}{\delta t}\cdot dV$$

Pro úpravu levé strany použijeme ještě Gaussovu větu matematiky, jejíž podmínky jsou jistě splněny :

$$-\iiint_V div\,\vec{i}\cdot dV \;=\; \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot dV$$

Z rovnosti stejných integrálů pak plyne rovnost funkcí :

$$\boxed{-div\,\vec{i} \;=\; \frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

<u>rovnice kontinuity</u> (diferenciální tvar)

Diferenciální tvar rovnice kontinuity se vztahuje – na rozdíl od tvaru integrálního – k danému bodu prostoru, k jeho nekonečně malému okolí ……má však naprosto stejný fyzikální smysl jako integrální tvar :

Divergence je přece výtok vektoru (zde náboje za 1 času) z jednotkového objemu a rovná se časové změně hustoty - tj. náboji v tomto jednotkovém objemu. Diferenciální tvar rovnice kontinuity představuje tedy ***zákon zachování náboje*** v daném místě (v jednotkovém objemu).

Elektrický náboj se tedy „neztratí" ani v nejmenší části prostoru, zákon zachování elektrického náboje platí lokálně i integrálně (na rozdíl o jiných zákonů, platících např. pro uzavřené soustavy mechaniky, či termodynamiky), patří tedy mezi nejobecnější zákony fyziky.

Připomeňme si ještě obecné funkční závislosti :

$$\rho = \rho(x,y,z,t) \qquad \vec{i} = \vec{i}(x,y,z,t)$$

Ve zvláštním případě může ovšem nastat situace – „časově ustálený stav" – kdy obě veličiny budou pouze funkcemi místa :

$$\boxed{\rho = \rho(x,y,z) \qquad \vec{i} = \vec{i}(x,y,z)}$$

stacionární stav

Pak je ovšem časová derivace nulová a obě rovnice kontinuity mají nejjednodušší možný tvar :

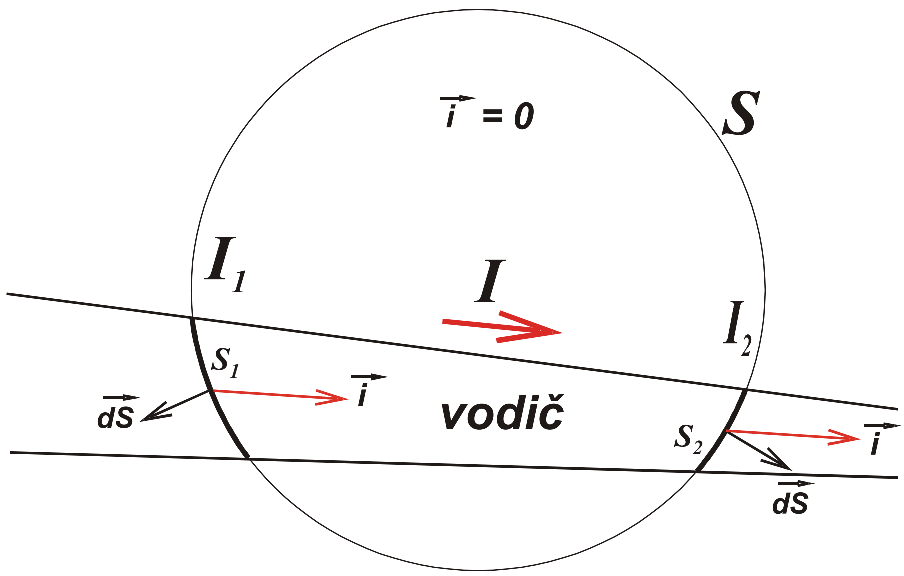
$$\boxed{\begin{aligned} \oiint_S \vec{i}\cdot d\vec{S} &= 0 \\ div\,\vec{i} &= 0 \end{aligned}}$$

rovnice kontinuity stacionárních proudů

Aplikace na vodič se stacionárním proudem:

Podívejme se na „obyčejný" vodič, ve kterém teče elektrický stacionární proud (tj. proud, pro který platí výše uvedené rovnice) a předpokládejme, že mimo tento vodič se žádné náboje nepohybují.

(viz obr.)



Vodič protneme myšlenou uzavřenou plochou S a použijeme rovnici kontinuity v integrálním tvaru :

$$\oiint \vec{i} \cdot d\vec{S} \;=\; 0$$

Mimo vodiče se náboje nepohybují, jejich proudová hustota je tedy nulová a můžeme integrovat pouze přes dva průřezy vodičů S_1 a S_2 (viz obr.) :

$$\iint_{S_1} \vec{i} \cdot d\vec{S} \;+\; \iint_{S_2} \vec{i} \cdot d\vec{S} \;=\; 0$$

Tyto dva integrály představují dva proudy (označíme je I_1 a I_2) na dvou libovolných místech (průřezech) vodiče. Předpokládáme-li zvolený směr proudu totožný se směrem rychlosti nábojů (na obrázku zleva doprava), pak na levém průřezu vodiče S_1 jsou vektory plochy dS a proudové hustoty „opačné“ , skalární součin je tam záporný a bude proto platit :

$$-I_1 + I_2 = 0$$

Dostáváme tak vztah pro hodnoty stacionárního proudu ve dnou libovolných místech (průřezech) vodiče :

$$\boxed{I_1 = I_2}$$

<u>*Slovně :*</u> ***ve stacionárním (ustáleném) stavu protéká každým průřezem vodiče vždy stejný proud***.

Tato znalost je jistě velmi užitečná v praktické elektrotechnice při měření stacionárních proudů (například ve stejnosměrných obvodech).

D. cv. : Jak asi vznikla známá rovnice kontinuity v hydrodynamice, kdy platí a jaký je její fyzikální význam :

$$S_1 \cdot v_1 \;=\; S_2 \cdot v_2$$