Energie elektrického pole

Již v úvodní kapitole jsme poznali, že nehybný (centrální) elektrický náboj vytváří v celém nekonečném prostoru silové elektrické pole, které je konzervativní, to znamená, že jakýkoliv jiný náboj (zkušební) má v tomto poli potenciální energii.

Tato energie tedy jednoznačně souvisí se zkušebním nábojem, je ovšem také zřejmým důsledkem existence centrálního náboje, se kterým spojujeme pojem elektrického pole. Podle příslušného matematického vztahu je potenciální energie jednoznačnou funkcí obou nábojů (viz dříve) :

$$W_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

Tento problém je v důsledku zákona akce a reakce zcela symetrický, pojmy zkušební a centrální náboj je možno bez omezení zaměnit a pojem elektrického pole může být spojen s oběma náboji.

Můžeme tedy učinit dvojí závěr :

1) energie (elektrického náboje) je jednoznačně a současně spojena s oběma elektrickými náboji (také s oběma tělesy, které jsou nositelé nábojů) , a

2) tato energie je v jednoznačném vztahu se vzniklým elektrickým polem.

Prozkoumáme-li nyní tento problém podrobněji, nalezneme několik velmi užitečných vztahů a dojdeme k nečekanému výsledku, že pojem energie může být (formálně matematicky) zcela odtržen od elektrických nábojů, které jsou podle definice jeho nositelem.

Budeme logicky postupovat od nejjednodušší situace k nejobecnější formulaci :

1) energie dvou bodových nábojů :

Představme si dva bodové náboje v obecných polohách, tedy :

první náboj Q_1 …… v místě $\vec{r}_1$

druhý náboj Q_2 …… v místě $\vec{r}_2$

Jsme vlastně zpátky v základní situaci, jako u Coulombova zákona, kdy žádný z nábojů není v počátku souřadnic a oba náboje jsou jinak označeny, jsou to tedy podmínky, za kterých jsme tento zákon zobecňovali. Nebude nám proto jistě činit potíže konstatovat, že náboj Q_1 má v poli náboje Q_2 potenciální energii o velikosti :

$$\boxed{W_{pot} = W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}$$

Víme už také, že je to práce potřebná k přenesení náboje Q_1 z nekonečna do jeho současného, daného místa, tj. $\vec{r}_1$. A můžeme si ještě navíc uvědomit, že ještě před tímto přenášením jsme napřed museli samotný náboj Q_2 také umístit (z nějaké výchozí polohy) do dané polohy $\vec{r}_2$, ale když tu přitom nebyl náboj Q_1 (byl ještě v nekonečnu), pak také neexistovaly žádné síly a při této akci jsme tedy nevykonali žádnou práci.

Uvedená energie je proto veškerou prací vykonanou při vytvoření této soustavy dvou nábojů a může tak být označena za ***energii soustavy*** .

Při rozložení (rozebrání) soustavy bude samozřejmě vykonána práce opačného znaménka, tedy původně vykonanou práci (na její vytvoření) „dostaneme zpátky“ .

Ve speciálním případě, kdy mezi oběma náboji působí přitažlivé síly (tj. náboje musí být opačného znaménka - a situaci lze zobecnit na jakékoliv přitažlivé síly – gravitační, chemické, jaderné, …), se používá pojem ***vazební energie*** soustavy.

Tento pojem je velmi důležitý a stále aktuální, neboť při tzv. ***exoenergetických*** , či ***exotermických*** reakcích (znáte hlavně z chemie) dostáváme část této energie jako teplo vystupující z reakční nádoby.

Nejdůležitější a nejaktuálnější je jistě jaderná energie , což je část vazební energie atomových jader, kterou lze získávat ve specifických jaderných reakcích jako je (řetězová) štěpná reakce, nebo termojaderná syntéza.

Vraťme se k naší elektrostatické potenciální energii, jako práci potřebné k přenášení náboje Q_1 . Jako důsledek zákona akce a reakce bude ovšem stejná práce vykonána i z hlediska druhého náboje, tzn. že potenciální energie náboje Q_2 v poli náboje Q_1 , jako práce potřebná k přenesení náboje Q_2 z nekonečna do jeho místa $\vec{r}_2$, je :

$$W_{pot} = W_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = W_{12}$$

Energii soustavy obou nábojů mohu tedy formálně zapsat:

$$\boxed{W = W_{pot} = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21})}$$

Tento jistě matematicky správný zápis je samozřejmě pro soustavu dvou nábojů nadbytečný, bude však zobecněn a dobře využit při řešení následujícího, komplikovanějšího případu.

2) energie soustavy více bodových nábojů :

V tomto případě tedy budeme mít větší počet bodových nábojů :

první náboj Q_1 …… v místě $\vec{r}_1$

druhý náboj Q_2 …… v místě $\vec{r}_2$

třetí náboj Q_3 …… v místě $\vec{r}_3$

. .

. .

. .

poslední Q_N …… v místě $\vec{r}_N$

Naposled získaný vzorec pro energii dvou nábojů nám nyní pomůže při výpočtu celkové energie všech nábojů tak, že vypočítáme energii libovolné dvojice nábojů soustavy :

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = W_{ji}$$

Formálně ji zapíšeme podle tohoto vzorce:

$$W_{ij} = \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji})$$

A nyní sečteme tyto výrazy pro všechny dvojice nábojů, tj. pro všechny možné kombinace indexů :

$$W = \sum_{\substack{\text{všechny}\\ \text{dvojice}}} \frac{1}{2}(W_{ij} + W_{ji}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1\\ (i \neq j)}}^{N} W_{ij}$$

Výše uvedenou úpravu si ověřte představou konkrétních sčítanců uvedených matematických sum, jinak bylo ještě provedeno triviální vytknutí konstanty. Zákaz stejných indexů je pak spojen s neexistencí výrazů W_{11}, W_{22} , W_{33} , …, které nemají smysl.

Dosadíme konkrétní vztah pro energii dvou libovolných nábojů W_{ij} a využijeme komutativnosti matematického součtu, tj. že sčítání můžeme provádět v libovolném pořadí sčítanců :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i} \sum_{\substack{j\\ (i \neq j)}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_i \cdot Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i} Q_i \left(\sum_{\substack{j=1\\ (j \neq i)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right)$$

Vidíme, že pouhým zavedením pořádku ve sčítání, kdy při konstantním prvním indexu soustavně projdeme všechny hodnoty indexu druhého, se dostáváme k velmi zásadní úpravě vztahu pro energii. Vzniklý výraz v závorce je totiž součet potenciálů všech nábojů (mimo Q_i) v místě $\vec{r}_i$ náboje Q_i a to je ***potenciál výsledného elektrostatického pole*** celé soustavy nábojů ***v místě*** $\vec{r}_i$ (náboj v tomto místě, tj. Q_i vystupuje pouze jako zkušební náboj a proto „nepatří" do soustavy) :

$$\varphi(\vec{r}_i) = \varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Pro energii soustavy nábojů tak dostáváme velmi jednoduchý, a proto dobře použitelný vztah, ve kterém sice ještě nezmizely náboje, jak bylo slíbeno v úvodu tohoto odstavce, ale objevil se již potenciál jako základní veličina elektrostatického pole :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i \cdot \varphi_i}$$

energie soustavy nábojů

Dále bude následovat přechod od teoretické soustavy bodových nábojů k reálné situaci, tj. , k nabitým tělesům a plochám :

3) energie spojitě rozložených nábojů ve vakuu

Tak jako v odstavci „Zobecnění Coulombova zákona" – tzn. pro náboje spojitě rozložené v objemu (tělesa) s objemovou hustotou ρ - nahradíme bodové náboje soustavy diferenciálně malými náboji v diferenciálních objemech :

$$Q_i \rightarrow dQ = \rho \cdot dV$$

A v limitě těchto nekonečně malých výrazů přecházejí matematické sumy na integrály, pro energii nábojů spojitě rozložených v objemu tedy vznikne výraz :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi \cdot dQ = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi \cdot \rho \, dV}$$

energie nábojů v objemu

A pro náboje spojitě rozložené na ploše s plošnou hustotou σ dostaneme analogicky:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \iint_S \varphi \cdot \sigma \, dS}$$

energie nábojů na ploše

Nyní můžeme sestavit užitečný vztah pro energii nabitého tělesa :

$$\boxed{W = W_{objemu} + W_{povrchu} = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \varphi \cdot \rho \, dV + \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_S \varphi \cdot \sigma \, dS}$$

energie tělesa

A speciálně pro nabité vodivé těleso , které má náboje pouze na povrchu, tj. má nulovou objemovou hustotu náboje :

$$W = \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\limits_S \varphi \cdot \sigma \, dS = \frac{1}{2}\varphi \oint\!\!\!\oint\limits_S \sigma \, dS$$

Konstantní potenciál vodivého tělesa umožnil vytknutí a zbylý integrál má jasný smysl celkového náboje na povrchu tělesa, tj. i celkového náboje celého tělesa :

$$Q = \oint\!\!\!\oint\limits_S \sigma \, dS$$

Použijeme-li ještě známý vztah pro kapacitu :

$$Q = C \cdot \varphi$$

Dostaneme jednoduchý výsledek :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\varphi Q = \frac{1}{2} C \varphi^2}$$

energie vodivého tělesa

S využitím tohoto vztahu vypočítáme ještě energie kondenzátoru. Kondenzátor tvoří vlastně dvě nabitá tělesa – desky kondenzátoru :

jedno těleso má náboj Q ..… a potenciál φ_1

druhé těleso má náboj $-Q$ … a potenciál φ_2

Pak celková energie kondenzátoru je zřejmě součtem energií obou těles

$$W = \frac{1}{2}\varphi_1 Q + \frac{1}{2}\varphi_2 (-Q) = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Použijeme-li ještě definici napětí jako rozdílu potenciálů a definici kapacity kondenzátoru, dostaneme opět jednoduchý vztah, velmi používaný v praktické elektrotechnice :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C U^2}$$

energie kondenzátoru

4) energie spojitě rozložených nábojů v dielektriku

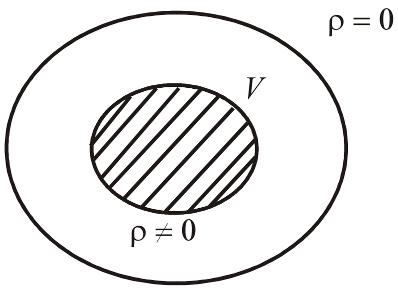
Prozkoumáme na závěr nejobecnější případ nábojů v (nekonečném) dielektriku, tj. volných nábojů spojitě rozložených s hustotou ρ v nějakém (konečném) objemu V.

Protože Coulombův zákon má i v dielektriku stejný tvar jako ve vakuu (pouze permitivita vakua je nahrazena permitivitou dielektrika), má stejný tvar i vztah pro energii :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi \cdot \rho \, dV$$

První úpravou tohoto výrazu bude změna integračního oboru v integrálu. Protože objemová hustota nábojů ρ je rovná nule mimo objemu V (tak jsme ji definovali, viz obr.), lze integrovat beze změny výsledku přes jakýkoliv větší objem, až v limitě i nekonečný (poněkud nesprávně je označen stejným písmenem V integrační obor i objem, ve kterém jsou náboje) :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V \to \infty} \varphi \cdot \rho \, dV$$



Dále použijeme Gaussův zákon :

$$div\,\vec{D} = \rho$$

A dosadíme ho do integrálu za hustotu náboje :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V \to \infty} \varphi \; div\,\vec{D} \; dV$$

Funkci v integrálu upravíme pomocí matematického vztahu :

$$div(\varphi \cdot \vec{D}) = \varphi \, div\,\vec{D} + \vec{D} \cdot grad\,\varphi$$ (zkontrolujte za D.cv.)

Po jeho dosazení vzniknou ve vztahu pro energii dva objemové integrály :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V \to \infty} (div(\varphi \vec{D}) - \vec{D} \cdot grad\,\varphi) dV = \frac{1}{2} \iiint_{V \to \infty} div(\varphi \vec{D}) dV - \frac{1}{2} \iiint_{V \to \infty} \vec{D} \cdot grad\,\varphi \, dV$$

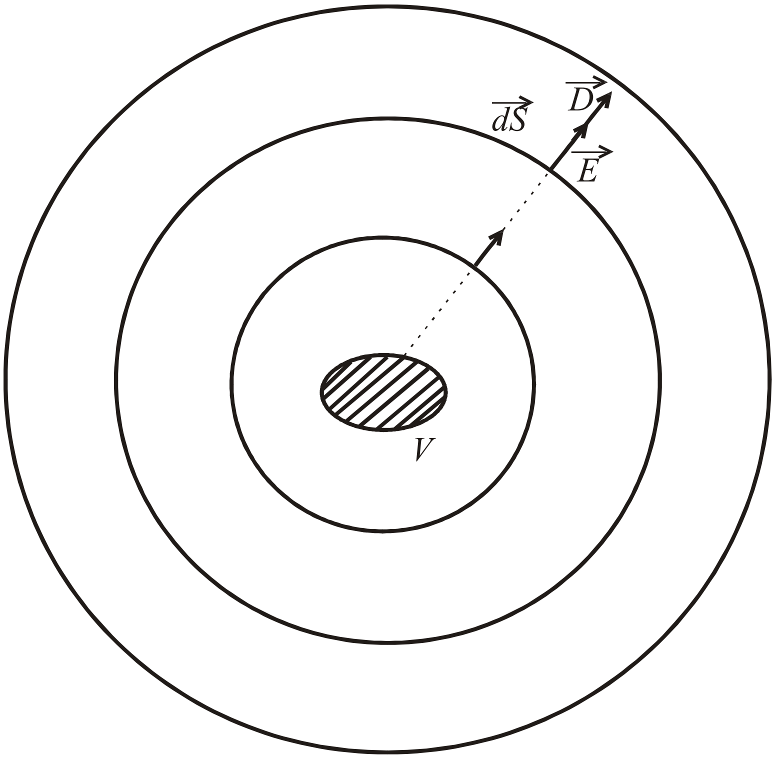
Nejprve se budeme zabývat prvním výrazem. Objemový integrál přes nekonečný objem je možno počítat jako limitu integrálů přes objemy konečné, které se budou zvětšovat (rozpínat) nade všechny meze :

$$\iiint\limits_{V\to\infty} div(\varphi\vec{D})\,dV \;=\; \lim_{V\to\infty}\iiint\limits_{V} div(\varphi\vec{D})\,dV$$

Na <u>tvaru objemu</u> nemůže jistě velikost limity záviset, zvolíme proto integrační objem tvaru <u>koule</u> o poloměru R (který tedy bude konvergovat do nekonečna) tak , aby <u>objem s náboji ležel v jeho středu</u> . Protože kulový integrační objem je obklopený uzavřenou (kulovou) plochou S , můžeme použít Gaussovu větu matematiky :

$$\lim_{V\to\infty}\iiint\limits_{V} div(\varphi\vec{D})\,dV \;=\; \lim_{R\to\infty}\iiint\limits_{V(koule)} div(\varphi\vec{D})\,dV \;=\; \lim_{R\to\infty}\oiint\limits_{S}\varphi\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

.Velikost této limity odhadneme následovně :



Objem V s náboji se pro velmi <u>velký poloměr</u> koule ($R \to \infty$) bude jevit jako <u>bodový náboj</u> velikosti Q , který je ve středu integrační kulové plochy. Elektrická intenzita i indukce jsou pak na tuto plochu v každém místě kolmé, svírají tedy s vektorem plochy nulový úhel a v této limitě můžeme také použít známé <u>vztahy</u> pro intenzitu a potenciál bodového náboje :

$$D \;=\; \varepsilon\cdot E \;=\; \varepsilon\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

Po dosazení máme :

$$\lim_{R\to\infty} \oiint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{R\to\infty} \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \cdot dS = \varepsilon \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{R^3} \cdot \lim_{R\to\infty} \oiint_S dS$$

Vzniklý integrál ovšem udává velikost kulové plochy, takže dostáváme :

$$\varepsilon \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^3} \oiint_S dS = \varepsilon \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = konst \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$$

Ve vztahu pro energii je tedy různý od nuly pouze druhý integrál:

$$W = -\frac{1}{2} \iiint_{V\to\infty} \vec{D} \cdot grad\, \varphi \, dV$$

Jestliže použijeme dříve odvozený vztah pro intenzitu :

$$\vec{E} = -grad\, \varphi$$

Dostaneme konečně pro celkovou energii daných nábojů :

$$\boxed{W = \iiint_{V\to\infty} \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \; dV = \iiint_{V\to\infty} w \cdot dV}$$

<u>celková elektrostatická energie</u>

Kde jsme funkci za integrálem, která má smysl <u>energie obsažené v jednotce objemu</u> v daném místě, označili jako novou fyzikální veličinu :

$$\boxed{w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E^2}$$

<u>hustota energie elektrostatického pole</u>

Vznikl slíbený vztah pro elektrostatickou energii, ve kterém formálně <u>zcela zmizely elektrické náboje</u> , které jsou ovšem podle základní definice s touto energií nedílně spojeny – potenciální energie elektrického náboje je přece <u>schopnost</u> tohoto náboje konat práci – byla a je to jistě jedna z jeho základních <u>vlastností</u>.

Tento vztah pak tedy můžeme interpretovat jako <u>energii celého elektrostatického pole</u> (sahajícího v principu až do nekonečna) , které vytvořily dané elektrické náboje.

Takto se vlastně dostáváme k pojetí energie jako vlastnosti elektrostatického (elektrického) pole , je to ***polní pojetí energie*** .

Z matematického vztahu pro hustotu vidíme, že ***elektrické pole „má energii“*** v každém ***místě***, kde je toto pole nenulové.

Podstata pojmu energie se přitom nemění, je to stále schopnost (možnost), nyní elektrického pole, konat práci – aby se ale tato práce realizovala, musí být v daném místě náboje ….. (a pak už je to jako dříve - schopnost nábojů) .

Toto pojetí energie je velmi užitečné, zejména při použití na obecné elektromagnetické pole a na jev elektromagnetického vlnění, ve kterém pozorujeme pohyb elektromagnetické energie v prostoru (tak jako při každém druhu vlnění) a proto definujeme a v mnoha aplikacích úspěšně používáme veličiny jako ***zářivý tok*** a ***intenzita záření*** , což je v podstatě energie procházející obecnou či jednotkovou plochou za 1 vteřinu, tj. vlastně výkon přenášený elektromagnetickým vlněním.

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 11/05)**