Aplikace Gaussova zákona

1) Pro sestavení základní rovnice elektrostatiky

Základní vlastnosti elektrostatického pole, probrané v minulých hodinách, popisují dvě diferenciální rovnice :

(1) $$\boxed{rot\vec{E} = 0}$$ **konzervativnost el. pole**

(2) $$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ **Gaussův zákon elektrostatiky**

Víme také že pro intenzitu elektrostatického pole také platí :

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Jestliže dosadíme tento vztah do obou rovnic :

$$rot(-grad\varphi) = 0 \qquad (1)$$

$$div(-grad\varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

Potom rovnice (1) je vždy splněna - viz domácí cvičení v otázce „El. pole ve vakuu" - kde jste měli zjistit, že z důvodu záměny druhých smíšených derivací platí pro jakoukoliv spojitou funkci φ :

$$rot\,grad\,\varphi = rot\left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}, \frac{\delta\varphi}{\delta y}, \frac{\delta\varphi}{\delta z}\right) = \left(\frac{\delta}{\delta y}\frac{\delta\varphi}{\delta z} - \frac{\delta}{\delta z}\frac{\delta\varphi}{\delta y}, \ldots.\right) = 0$$

A rovnici (2) dále upravíme :

$$-div\ grad\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Znaménko minus převedeme na pravou stranu a rozepíšeme dvojitý operátor na levé straně :

$$div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Vzniklý matematický předpis je samozřejmě opět operátor, působící na funkci φ . Vzhledem k jeho častému výskytu v důležitých matematických rovnicích má své označení i pojmenování :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}$$

Laplaceův operátor

Je jistě sympatické, že k jeho formálnímu popisu lze opět využít známý operátor ***nabla*** :

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi$$

Rovnici (2) lze tedy jednoduše zapsat ve tvaru :

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}}$$

Poissonova rovnice

Tato rovnice je pak v literatuře označována jako ***základní rovnice elektrostatiky***.

Jejím vyřešením – pro zadané rozložení nábojů (tj. pro hustotu náboje ρ) – získáme potenciál elektrického pole (který, jak víme, toto pole jednoznačně popisuje).

Poissonova rovnice je parciální diferenciální rovnicí 2. stupně, její vyřešení proto není rozhodně jednoduché …. **ale my už řešení známe** … víme totiž, že platí (viz. zobecnění Coulombova zákona) :

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \iiint_V \frac{\rho\, dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

A tento integrál musí být ***řešením Poissonovy rovnice*** !!

Poznámka : Pro $\rho = 0$ dostáváme nejjednodušší možný tvar základní rovnice elektrostatiky :

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Laplaceova rovnice

Tato rovnice vypadá dosti jednoduše, ale pokud bychom ji chtěli přímo řešit (a nevyužít zobecněný Coulombův zákon), práci bychom si příliš neulehčili, protože stanovení **integračních konstant** z **okrajových podmínek** úlohy je vždy velmi pracné.

2) Pro výpočet elektrických polí jednoduchých konfigurací nábojů

Vedle přímého výpočtu intenzity elektrického pole (podle kapitoly „Zobecnění Coulombova zákona“), nebo pomocí elektrostatického potenciálu (stejná kapitola) je často možné, zejména u symetricky rozložených nábojů, použití Gaussova zákona – viz cvičení.

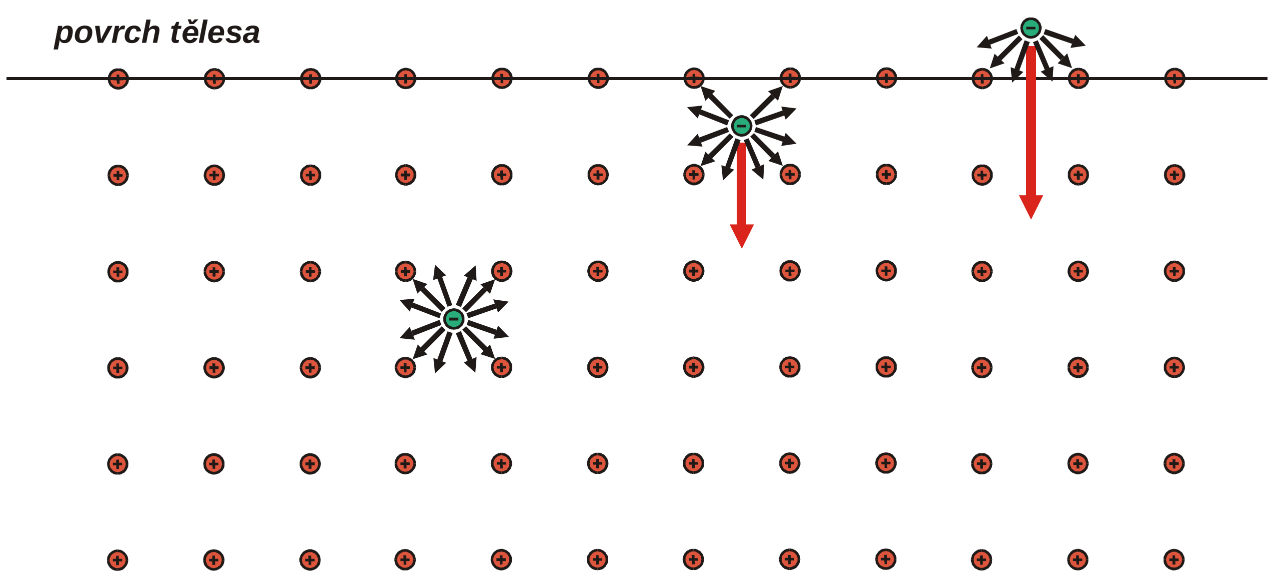
3) Speciálně pro výpočet elektrického pole vodivého tělesa

Zde prozkoumáme pomocí Gaussova zákona vlastnosti elektrostatického pole vodivého tělesa, přitom se dostaneme k velmi důležitému pojmu kapacity tělesa :

Vodivé (pevné) těleso je charakterizované existencí tzv. ***volných nábojů*** , které nejsou na těleso „vázány“ žádnými **vazbovými silami** a mohou se tedy v jeho objemu volně pohybovat a při působení vnějšího pole (na vodič připojíme póly elektrického zdroje) pak vytvoří (makroskopický) elektrický proud .

U kovových těles jsou takové náboje tvořeny volnými, samostatnými ***elektrony*** – ty vznikly odtržením z valenční sféry elektronového obalu atomů kovu silovým působením při tuhnutí a krystalizaci tělesa z kapalné taveniny. Kovové ionty přitom vytvoří pevnou **krystalickou mřížku** tělesa a odtržené valenční elektrony pak zůstanou uvnitř tělesa.

Ačkoliv na každý z těchto elektronů v objemu kovu působí obrovské množství elektrostatických přitažlivých a odpudivých sil (od okolních iontů mřížky a ostatních elektronů) – je výslednice všech těchto sil kupodivu – **nulová** (je tomu právě z důvodu velkého počtu těchto sil a jejich symetrického rozložení – ke každé síle se vždy najde nějaká protisíla,. to ovšem neplatí v blízkosti povrchu, viz obr.)



Jestliže tedy na elektron uvnitř vodivého tělesa nepůsobí žádná síla (přesněji řečeno výslednice všech působících sil je nulová - ale výsledek je stejný), můžeme elektron považovat za „**volnou částicí**“ , která podle zákona setrvačnosti setrvává v klidu a teprve při působení vnější síly (vnější el. pole) se začne pohybovat a vytváří elektrický proud – tak se tedy vysvětluje **dobrá elektrická vodivost kovů** .

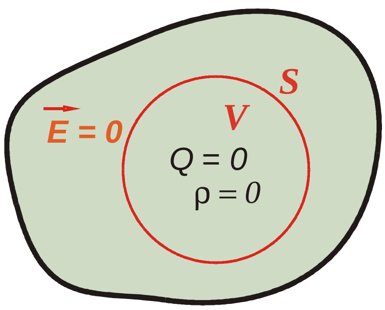
Pozn. 1 :   Poblíž povrchu tělesa je „vějíř“ působících sil zjevně nesymetrický (viz obr.) – proto vzniklá výsledná síla míří do vnitřku tělesa a zabraňuje elektronům opustit objem kovu. Aby elektrony dokázaly vystoupit z kovu do okolního prostředí, musíme jim dodat dostatečně velikou kinetickou energii (její minimální hodnota je rovna ***výstupní práci*** kovu) – to je možné například pomocí tepelné energie (zahřátí kovu vyvolá tepelnou emisi elektronů, termoemisi), urychlením elektronů ve velmi silném vnějším elektrickém poli (polní emise), nebo srážkou s jinou rychlou částicí, například s fotonem (fotoemise) či s elektronem (sekundární emise elektronů).

Pozn. 2 :   Elektrony v objemu vodiče existují vlastně za stejných podmínek jako částice plynu – proto se často označují jako ***elektronový plyn*** – a stejně jako molekuly plynu nejsou nikdy v klidu , ale neustále se pohybují všemi možnými směry i velikostmi rychlosti – tedy známým ***neuspořádaným (tepelným) pohybem*** . Je možné také ukázat, že v rovnováze pro ně platí Maxvellův rozdělovací zákon , včetně např. vztahů pro střední rychlosti. Pohyb, který elektrony získají od vnějšího pole je pak ve skutečnosti malou přídavnou rychlostí k velké „neuspořádané rychlosti“ – je to jakási jejich „driftová rychlost“ (viz také příklad na cvičení – rychlost elektronů ve vodiči při telefonování nám vyšla asi 5,7 mikronů/s, což je skutečně zanedbatelně malé oproti obrovské střední rychlosti jejich neuspořádaného pohybu, která při pokojové teplotě činí asi $1{,}1.10^5$ m/s).

Pozn. 3 :   Vodivými tělesy (látkami) mohou být ovšem také kapaliny a plyny (plazma). Tyto látky nemají žádnou pevnou strukturu, všechny částice plynu jsou zcela volné, u kapalin pak „skoro volné“ - a jejich vodivost proto může být způsobena jak zápornými elektrony, tak kladnými ionty.

Vodivé kovové těleso tedy obsahuje nesmírné množství volných nábojů (řádu Avogadrova čísla) a pokud bychom neznali fakta o jejich chování (elektronový plyn), mohlo by nás překvapit experimentální zjištění, že v „termodynamické rovnováze“ – tedy například v nulovém vnějším poli – neteče v objemu vodiče žádný proud (důkaz je jednoduchý – vodič by se musel „sám od sebe“ zahřívat Jouleovým teplem). To ale znamená, že ani uvnitř vodiče neexistuje elektrické pole - tedy všude v objemu vodiče platí :

$$\vec{E} = 0$$



Na tento poznatek můžeme aplikovat Gaussův zákon následovně :

Jestliže si v objemu vodiče představíme nějakou spojitou uzavřenou plochu S (viz obr.) , pak tok elektrické intenzity touto plochou je zaručeně nulový:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Z toho ovšem podle Gaussova zákona plyne, že musí být nulový také celkový náboj uvnitř této plochy :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q = 0$$

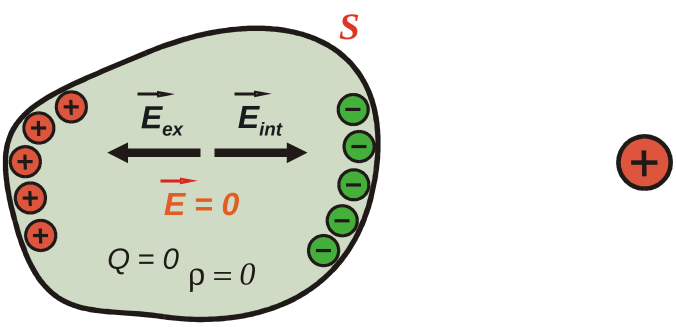
Z dřívějších kapitol víme, že celkový náboj v nějakém objemu V můžeme stanovit pomocí hustoty náboje sečtením (integrací) nábojů ve všech místech tohoto objemu :

$$Q = \iiint_V \rho \, dV = 0$$

Protože tento náboj je nulový pro <u>libovolnou</u> uzavřenou plochu, nemůže to být jen náhodný výsledek součtu kladných a záporných nábojů v různých oblastech tělesa, ale musí být nulová hodnota náboje v každém jeho místě. Protože ale všude v objemu vodiče existují (nepohyblivé) <u>kladné</u> ionty a (volně pohyblivé) <u>záporné</u> elektrony, znamená to, že elektrony jsou tak dokonale „rovnoměrně rozloženy“ v objemu, že přesně „vykompenzují“ kladné ionty krystalické mříže – a proto nejen celkový náboj tělesa, ale i hustota <u>výsledného</u> náboje v <u>každém místě</u> je nulová :

$$\rho = 0$$

Dále bude velmi zajímavé sledovat <u>interakci vodiče s okolními náboji</u> . Představme si, že do blízkosti našeho tělesa umístíme elektrický náboj, tj. nabité jiné těleso, například kladného znaménka (viz obr.).



Pak můžeme pozorovat tzv. ***<u>jev elektrostatické indukce</u>*** : Elektrické pole vnějšího náboje ($\vec{E}_{ex}$) působí na volné náboje uvnitř tělesa - elektrony – a ty se tedy budou v objemu vodiče pohybovat směrem k tomuto náboji – až do <u>maximální</u> možné blízkosti, tj. na <u>přivrácený povrch</u> tělesa. (viz obr.).

Na tomto povrchu tělesa proto vznikne – ***indukuje se*** – záporný náboj, tvořený elektrony - a na povrchu nejvzdálenějším, odvráceném se projeví nedostatek elektronů, tj. objeví se náboj kladný, tvořený kladnými nevykompenzovanými ionty mřížky.
Popsaný pohyb nábojů a zvyšování jejich velikosti na površích tělesa bude trvat určitou (krátkou) dobu, až do okamžiku, kdy vnitřní elektrické pole ($\vec{E}_{int}$), vytvářené indukovanými náboji, přesně vyrovná původní vnější pole, tak, že výsledné elektrické pole ve vodiči bude opět nulové :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{ex} + \vec{E}_{int} = 0}$$

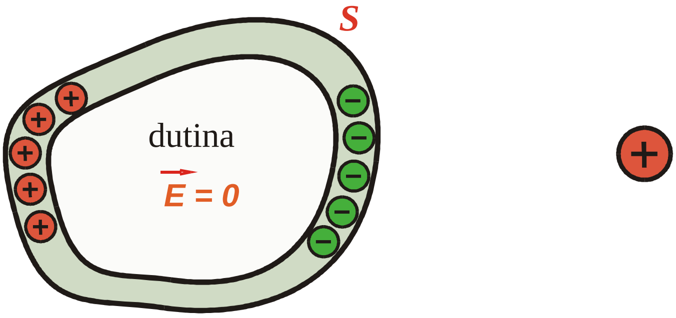
Potom opět nastane rovnovážný strav, charakterizovaný již neměnnou velikostí indukovaných nábojů na povrchu tělesa. Z nulového toku elektrické intenzity libovolnou uzavřenou plochou uvnitř tělesa pak opět konstatujeme nulovost objemové hustoty náboje , i celkového náboje tělesa :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \iiint_V \rho \, dV = 0$$

Jakékoliv vnější náboje tedy nemají vliv na elektrické pole ve vodiči a proto můžeme konstatovat, že :

Vnitřek vodivého tělesa je chráněn před účinky vnějších nábojů.

Jestliže uvnitř vodivého tělesa nejsou náboje, které by mohly způsobit elektrické pole – pak můžeme tento vnitřek vyříznout a ponechat jen (tenkou) uzavřenou povrchovou vrstvu (kde ovšem náboje být mohou) – a situace se nijak nezmění – uvnitř nyní dutého vodivého tělesa bude stále nulové pole.
To je princip ***elektrostatického odstínění*** vnitřního objemu. Citlivé elektrické přístroje lze tedy ochránit před účinkem vnějších nábojů tak, že je vložíme do plechového krytu, nebo aspoň obalíme staniolem … často postačí i síťovaný či děrovaný kryt (Faradayova klec).

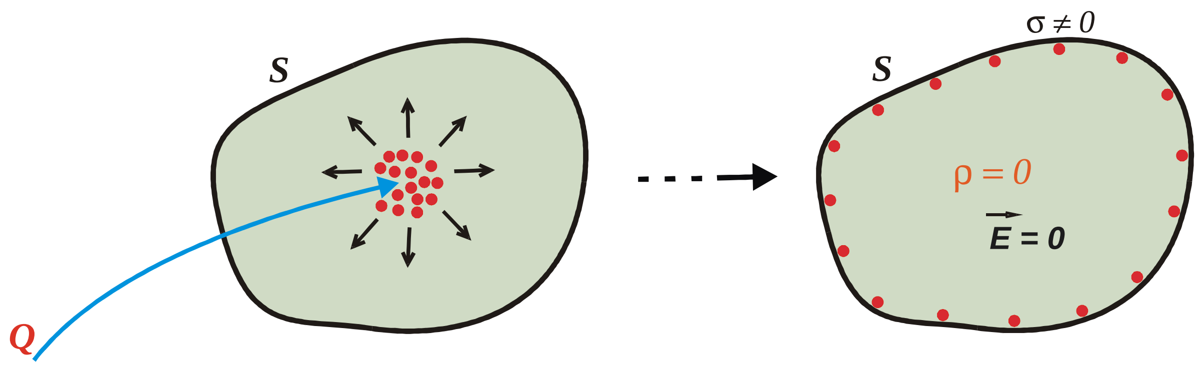


Pozn. : Kdybychom nyní dokázali těleso uprostřed napůl rozdělit, získali bychom dvě tělesa, nabitá opačnými náboji. Mohli bychom také uzemnit jeden povrch tělesa, například záporný – pak by se „přebytečné“ elektrony odvedly do země a po odstranění uzemnění by těleso zůstalo celkově nabité kladným nábojem.

Dále prozkoumejme situaci, že by z nějakého okolního nabitého tělesa mohly na naše vodivé, zatím neutrální těleso přejít elektrické náboje – tzn. budeme sledovat proces ***nabíjení vodiče*** .

Tento proces si můžeme teoreticky jednoduše představit jako myšlený přesun skupiny nábojů celkové velikosti Q (musí to být volné náboje, aby se daly přesunovat, nejlépe pak elektrony) z nekonečna do určeného místa uvnitř vodiče (viz obr.), aniž uvažujeme vliv způsobu přesunu nábojů, případně jejich zdroje.

(Síla, i práce potřebná k takovému přesunu je nulová, protože na přesouvaný náboj nepůsobí žádná síla, ani od nabíjeného, zatím neutrálního tělesa, ani od neexistujícího zdroje.)



Protože jsou tyto přenesené náboje stejného znaménka (elektrony), navzájem se odpuzují elektrostatickými silami a protože jsou volné, pohybují se v objemu tělesa od sebe do maximální možné vzájemné vzdálenosti, tj. až na povrch tělesa.

Po uplynutí nějaké krátké ***přechodné doby*** , ve které v tělese z objemu na povrch vlastně tečou určité proudy, pak opět nastane ustálený, ***rovnovážný stav*** , kdy – bez ohledu na polohu místa, kam byly dopraveny náboje - uvnitř v objemu tělesa nebude již žádný z těchto nábojů, tedy objemová hustota náboje ρ v každém místě objemu bude opět nulová , stejně jako v nenabitém stavu.

Všechny, na těleso přenesené náboje, tedy **budou rozloženy na povrchu** tělesa s nenulovou plošnou hustotou σ (viz předchozí obr.), z níž také můžeme vypočítat celkový náboj nyní již nabitého vodiče :

$$Q = \oiint_S \sigma \cdot dS$$

Protože ani nabitý vodič se sám od sebe nikdy nezahřívá, je jeho vnitřní elektrické pole opět nulové :

$$\vec{E} = 0$$

A z příslušného nulového toku této nulové elektrické intenzity (přes libovolnou uzavřenou vnitřní plochu S) vyplývá podle Gaussova zákona opět nulová hustota náboje v každém místě objemu tělesa – což samozřejmě souhlasí s předchozí úvahou o přechodu nábojů na povrch tělesa.

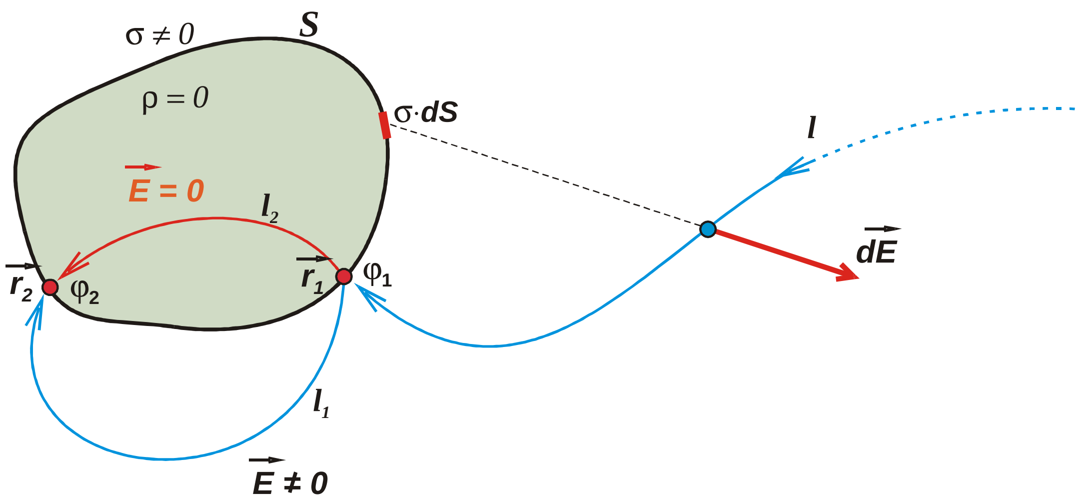
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV = 0$$

Celkem tedy platí : ***V nabitém i nenabitém vodivém tělese, bez vnějších nábojů , i při jejich přítomnosti je (v rovnovážném stavu) vždy nulové elektrické pole i nulová objemová hustota náboje*** :

$$\boxed{\vec{E} = 0 \qquad \rho = 0}$$

uvnitř vodiče je nulové pole a nulový náboj

Dále uvážíme, že na rozdíl od vnitřku objemu, je ve **vnějším okolí** tělesa situace zcela odlišná. Náboje soustředěné na povrchu tělesa samozřejmě vytvářejí vně tělesa **nenulové elektrické pole** a jakékoliv místo v prostoru proto „získává" elektrický potenciál - tedy i každý bod tělesa má svůj potenciál a při přenášení dalších nábojů na těleso již musíme konat práci .
(Pro osamělé těleso předpokládáme přenos nábojů z nekonečna, pak je práce určena přímo tímto potenciálem a velikostí náboje, při přenosu nábojů z jiného tělesa v konečné vzdálenosti je samozřejmě rozhodující rozdíl potenciálů – viz dále kondenzátor.)



Pro potenciál například místa $\vec{r}_1$ na povrchu tělesa (viz obr.) platí :

$$\varphi_1 = \int_{\infty}^{\vec{r}_1}{}_{(l)}\, \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

S využitím této rovnice pak mohu napsat potenciál libovolného jiného místa $\vec{r}_2$ (na povrchu) tělesa :

$$\varphi_2 = \int_{\infty}^{\vec{r}_2}{}_{(l+l_1)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}_1}{}_{(l)} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}{}_{(l_1)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi_1 + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}{}_{(l_1)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Protože v elektrostatickém poli nezáleží na volbě integrační cesty, zvolím mezi oběma místy takovou dráhu (l_2), aby celá ležela v objemu tělesa, kde je nulové pole, tedy bude i nulový poslední integrál. Dostáváme tak další zásadní výsledek pro vodivé těleso :

$$\varphi_2 \;=\; \varphi_1 \;+\; \int_{\vec{r}_1 \,(l_2)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; \varphi_1$$

To zřejmě platí i pro body uvnitř tělesa, tedy celkem :

$$\boxed{\varphi \;=\; konst.}$$

všechny místa vodivého tělesa mají stejný potenciál

Pozn. 1 : Ukažte si na cvičení ještě jednu zajímavou vlastnost nabitého vodiče – intenzita pole u povrchu (vně) je jednoznačně určena povrchovou hustotou náboje a je vždy kolmá na povrchovou plochu.

Pozn. 2 : Pokud si myslíte, že jste pochopili fyziku vodivého tělesa, pokuste se zodpovědět otázky letošní „Fyzikální olympiády“.

4) Zavedení kapacity tělesa

Podívejme se nyní ještě jednou na vztah pro potenciál vodivého tělesa :

$$\varphi \;=\; \varphi_1 \;=\; \int_{\infty}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Za předpokladu, že vodivé těleso je osamělé , je elektrická intenzita určena pouze náboji na tomto tělese :

$$\vec{E} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \oiint \frac{\sigma\cdot dS}{|\,\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)$$

Protože uvnitř tělesa je nulová objemová hustota náboje, je celkový náboj tělesa určen pouze povrchovou hustotou :

$$Q \;=\; \oiint_S \sigma\cdot dS$$

Uvedené veličiny jsou tedy zřejmě navzájem „úměrné´´ :

$$\varphi \;\approx\; E \;\approx\; \sigma \;\approx\; Q$$

Tedy každé přenesení elektrického náboje na těleso zvýší jeho potenciál, čím více náboje přeneseme na těleso, tím vyšší potenciál těleso získá – celkový náboj tělesa a jeho potenciál jsou navzájem přímo úměrné :

$$\boxed{\varphi \;\approx\; Q}$$

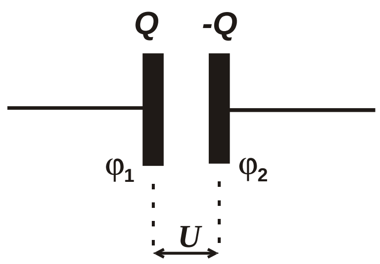
A kapacitu tělesa definujeme jako koeficient této úměry :

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi}}$$

(absolutní) kapacita osamělého vodiče

Pozn. : Uvažte, že ***kapacita závisí na tvaru tělesa***, neboť při jiném tvaru (a při stejném celkovém náboji tělesa Q) vznikne jiné rozložení nábojů , tj. funkce $\sigma(x,y,z)$ – důsledkem je ovšem jiné elektrické pole - těleso tedy bude mít jiný potenciál φ , a proto i kapacitu,

Kondenzátor



Vzhledem k přesně opačným nábojům na deskách mohu stav nabitého kondenzátoru (viz obr.) dostat z neutrálního stavu (opakovaným) postupným přenášením nábojů pouze mezi oběma deskami kondenzátoru (bez použití jiného vnějšího zdroje). Při každém přenesení nějakého náboje se vykoná práce rovná rozdílu jejich potenciálů a zvýší se velikost nábojů na deskách - a tím se zvětší potenciálový rozdíl ….. tento proces může pokračovat, až se dosáhne požadovaného výsledného napětí na kondenzátoru :

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Vzniká tak zřejmě opět přímá úměra - mezi velikostí celkového přeneseného náboje (tj. mezi nábojem kondenzátoru) a vzniklým rozdílem potenciálů mezi deskami (tj. napětím) - a kapacitu kondenzátoru potom definujeme jako koeficient této úměry :

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

kapacita kondenzátoru

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 01/06)**

rev. a doplň. 11/07