# ***Gaussův zákon elektrostatiky***

V elektrostatickém poli nyní stanovíme hodnotu určitého integrálu :

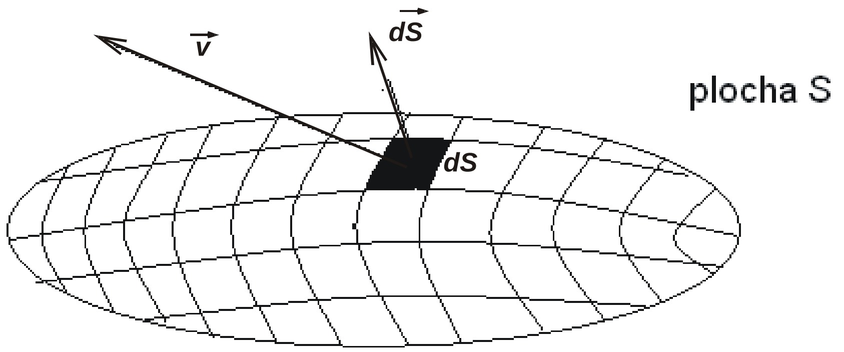
$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

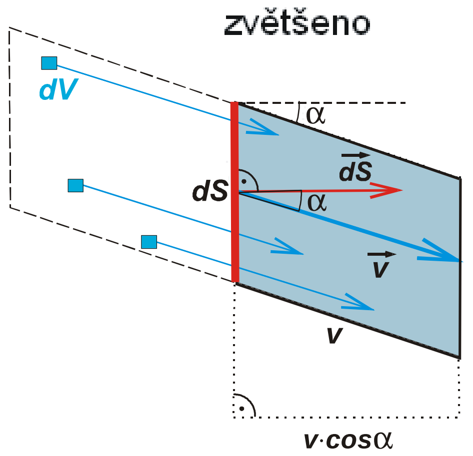
***tok (vektoru) elektrické intenzity uzavřenou plochou S***

Toto pojmenování opět pochází z hydrodynamiky , kde se často počítá analogický integrál pro vektor rychlosti kapaliny, přes plochu, která obecně nemusí být uzavřená (jen spojitá) :

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Podívejme se, s pomocí následujícího obrázku, jaký je význam tohoto integrálu :




Částice kapaliny při svém pohybu protínají zvolenou plochu $S$ . Zvětšený obrázek malé (diferenciální) části plochy $dS$ spolu s vektorem rychlosti v daném místě nám pomůže stanovit důsledek tohoto pohybu : uvědomíme-li si, že dráha částice za jednotku času je číselně rovna její rychlosti, je pak jasné, že veškerá kapalina proteklá za jednotku času přes tuto malou plošku $dS$ musí vyplnit objem (viz. obr):

$$dS \cdot v \cdot \cos\alpha = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

A celkový objem kapaliny proteklý za 1 času přes celou plochu $S$ získáme sečtením – integrací – těchto výrazů přes plochu $S$ :

$$\boxed{Q = \iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{S}}$$

***objemový tok kapaliny***

Proto se každý integrál ve tvaru :

$$\iint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

nazývá ***tok vektoru*** $\vec{A}$ plochou $S$, i když se opět - stejně jako u obecné cirkulace vektoru – nemusí jednat o reálný pohyb hmoty.

**Uveďme dále matematickou větu, která se ve fyzice velmi často používá pro úpravu integrálů typu „tok vektoru“ :**

Nechť $V$ je objem uzavřený spojitou plochou $S$ (tzv. ***uzavřená plocha*** ), pak pro libovolnou spojitou vektorovou funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \left( A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z) \right)$$

platí vztah :

$$\boxed{\oiint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V div\, \vec{A} \cdot dV}$$

***Gaussova (-Ostrohradského) věta matematiky***

kde $d\vec{S}$ je orientovaný vektor plochy a $div\, \vec{A}$ je *matematický operátor* ***divergence vektoru*** $\vec{A}$.

Zopakujme si dále – stejně jako u předchozích operátorů gradient a rotace - matematické znalosti o operátoru divergence. Nejprve jeho definice :

$$\boxed{div\, \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

***divergence vektoru***

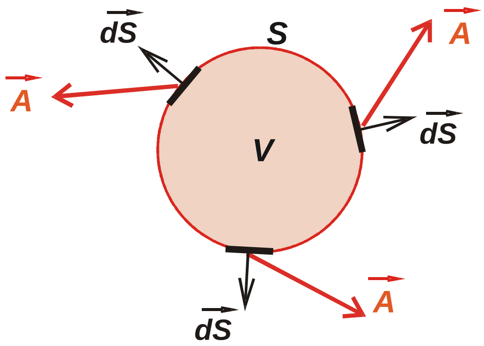
Vidíme, že divergence vytvoří z vektoru (z vektorové funkce) funkci skalární .

Definici lze formálně zapsat opět pomocí známého operátoru nabla, který byl již použit u operátorů gradient a rotace :

$$div\, \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( A_x, A_y, A_z \right) = \nabla \cdot \vec{A}$$

Fyzikální význam lze u tohoto operátoru stanovit kupodivu velmi snadno : Napišme Gaussovu větu matematiky, za předpokladu splnění jejích podmínek :

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{A}\cdot dV$$




A představme si, že uzavřený objem $V$ zmenšujeme, matematicky až v limitě $V \longrightarrow 0$ .

Potom ovšem není potřebné pro integraci dělit takový objem na (nekonečně) malé části, neboť on sám je (nekonečně) malý, a hodnotu integrálu na pravé straně můžeme ihned (přibližně) vyjádřit ve tvaru :

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{A}\cdot dV \doteq div\,\vec{A}\cdot V$$

*Pozn. :* Uvažte s pomocí obrázku, že u plošného integrálu na levé straně rovnice ale podobné přibližné vyjádření není možné.

Divergenci nyní můžeme v rovnici osamostatnit - rovnost bude ovšem platit přesně jen ve výše uvedené limitě :

$$div\,\vec{A} = \lim_{V\to 0}\frac{\oiint \vec{A}\cdot d\vec{s}}{V} = div\,\vec{A}(\vec{r})$$

Tato limita, ve které se objem $V$ zmenší až do nuly - tj. do bodu, nám dobře ukazuje, že $div\,\vec{A}$ je (skalární) funkcí polohy (místa).

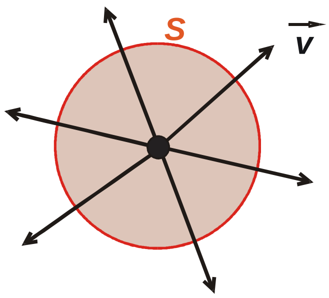
**Pokusme se dále určit smysl pravé strany :**

- tok vektoru přes uzavřenou plochu je vlastně výtok vektoru z daného objemu $V$ (předpokládáme kladné hodnoty integrálu, tj. $\vec{A}\cdot d\vec{S} \ge 0$ , viz. obr.)
- děleno objemem $V$ znamená přepočet na jednotkový objem …… tedy výtok z jednotkového objemu

**Divergence vektoru $\vec{A}$ je (číselně) rovna výtoku vektoru $\vec{A}$ z jednotkového objemu v daném místě.**

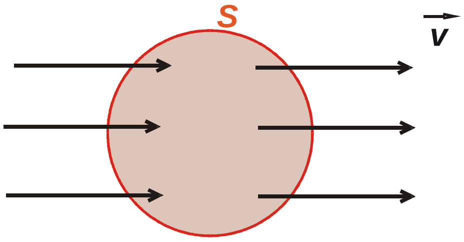
Speciálně, kdyby se jednalo o kapalinu ( $\vec{A} = \vec{v}$ ), pak případ nenulové divergence znamená, že v daném místě je zdroj (zřídlo) kapaliny :

$\boxed{div\,\vec{A} \neq 0}$ ***zřídlové pole***




Nulová divergence pak samozřejmě popisuje kapalinu bez zdrojů :

$\boxed{div\,\vec{A} = 0}$ ***nezřídlové pole***




Pojmy ***zřídlové pole*** a ***nezřídlové pole*** potom opět formálně používáme v jakémkoli vektorovém poli, které i nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty (například v silovém poli).

Nyní se vraťme k elektrostatice:

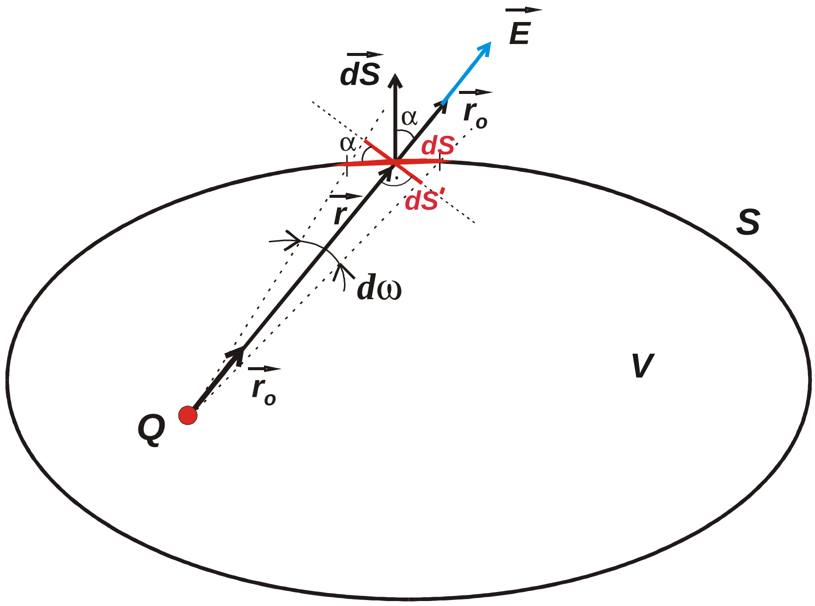
Předpokládejme nejprve nejjednodušší možný případ, kdy elektrické pole by bylo způsobeno jediným bodovým nábojem $Q$ a vypočítejme tok elektrické intenzity - tj. hodnotu určitého integrálu :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Rozlišíme pak dvě možné polohy tohoto náboje vzhledem ke zvolené ploše :

**1) Nechť náboj $Q$ leží uvnitř plochy $S$ , tj. v objemu $V$ :**

Položme pak do místa náboje počátek soustavy souřadnic a do integrálu dosadíme dříve odvozený vztah pro elektrickou intenzitu bodového náboje :




$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; \oint\!\!\!\oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\vec{r}_o\cdot d\vec{S} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\oint\!\!\!\oint_S \frac{\vec{r}_o\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Skalární součin v čitateli vypočítáme pomocí známého matematického vztahu, se znalostí velikosti jednotkového vektoru a s využitím geometrických vztahů (viz obr.) :

$$\vec{r}_o\cdot d\vec{S} \;=\; 1\cdot dS\cdot\cos\alpha \;=\; dS'$$

Tento skalární součin tedy vyjadřuje průmět plošky $dS$ do roviny kolmé k průvodiči v daném místě - a velikost tohoto průmětu je označena $dS'$.

Dosaďme zpět do integrálu a uvažme, že diferenciální plošku na výše uvedené rovině kolmé k průvodiči si lze představit i na kulové ploše poloměru velikosti průvodiče $r$ . Pak za integrálem vznikl výraz, který je přímo podle matematické definice <u>prostorovým úhlem</u> , pod kterým je vidět z místa náboje ploška $dS$ (a rovněž ploška $dS'$ ). Integrál, tj. součet těchto úhlů přes <u>uzavřenou</u> plochu S , má potom zřejmě hodnotu <u>celého prostorového úhlu</u> , tedy $4\pi$ steradiánů :

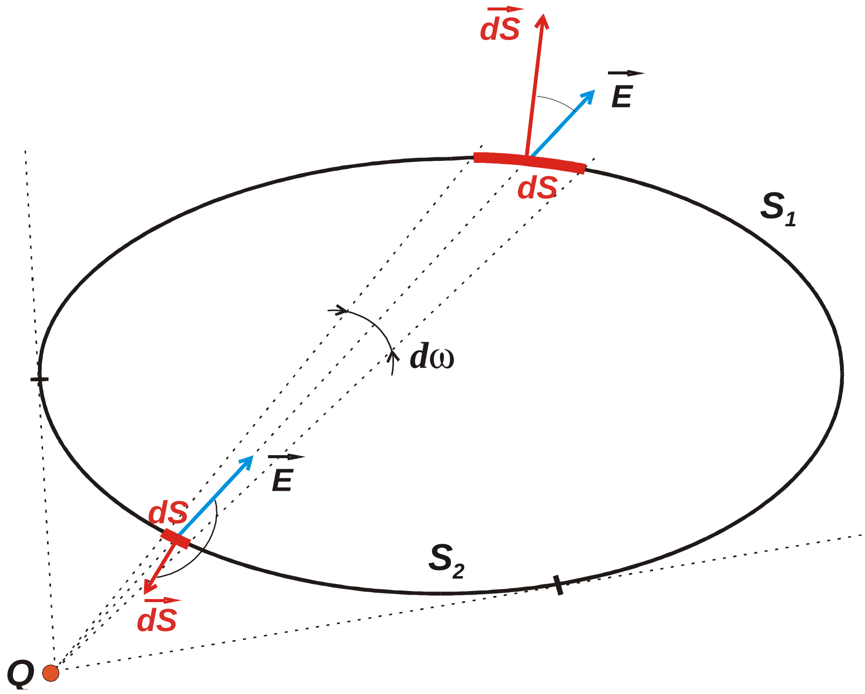
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\oint\!\!\!\oint_S \frac{dS'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\oint\!\!\!\oint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Velikost toku elektrické intenzity tedy překvapivě vůbec <u>nezávisí na poloze náboje</u> $Q$ (uvnitř plochy S).

**<u>2) Dále uvažme situaci, kdy bodový náboj leží vně plochy *S* :</u>**

Postup výpočtu musí být zajisté principiálně stejný, tzn. za integrálem opět vznikne prostorový úhel odpovídající diferenciálnímu elementu plochy. Z obrázku však vidíme, že tento <u>prostorový úhel je vždy</u>

společný dvěma ploškám na „protilehlých“ částech $S_1$ a $S_2$ dané uzavřené plochy (kromě limitní situace na tečnách, kdy je samozřejmě tento úhel nulový, viz obr.) :




Integrál je ovšem (limitní) součet, nezáleží tedy na pořadí „sčítanců“ , a mohu proto sčítat – integrovat – po těchto dvojicích protilehlých plošek. Uvažme ale ještě, že vektor „dolní“ plošky (viz obr.) je protilehlý vektoru intenzity (svírají úhel větší než pravý), a proto je jejich skalární součin a tedy i hodnota prostorového úhlu záporná (a stejně veliká jako pro „horní“ plošku) :

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\oint\!\!\oint_S d\omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint_{S_1} d\omega + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint_{S_2} -d\omega$$

Po vytknutí – a tím vlastně aplikujeme uvedené sčítání po dvojicích - tak dostáváme jednoznačný výsledek:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint_{S_1,S_2}(d\omega - d\omega) = 0$$

Velikost toku elektrické intenzity uzavřenou plochou tedy ani v tomto případu (náboj vně plochy) nezávisí na jeho poloze a je vždy nulová.

***Získané výsledky nyní zobecníme pro soustavu více nábojů :***

Jestliže v prostoru zvolíme libovolnou uzavřenou plochu, pak jistě nějaké náboje budou uvnitř této plochy a ostatní zůstanou vně :

Nechť tedy uvnitř uzavřené plochy jsou náboje : $Q_1$ , $Q_2$ , $Q_3$ , ….

A <u>vně této plochy</u> nechť leží náboje : $Q_1'$ , $Q_2'$ , $Q_3'$ , ….

Pro každý z těchto nábojů nyní napíšeme Gaussův zákon :

$$\oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$\vdots$$

$$\oiint_S \vec{E}_1' \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{E}_2' \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vdots$$

-----------------------------------

A všechny tyto rovnice <u>sečteme dohromady</u> , tj. sečteme dohromady jejich levé i pravé strany :

$$\oiint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_1' + \vec{E}_2' \ldots) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (Q_1 + Q_2 + \ldots)$$

V závorce na levé straně je součet intenzit od <u>všech</u> nábojů, tedy ***<u>intenzita výsledného elektrického pole</u>*** celé naší soustavy nábojů :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_1' + \vec{E}_2' \ldots$$

Na pravé straně rovnice je ovšem součet <u>pouze</u> těch nábojů, které leží ve <u>vnitřku</u> uzavřené plochy, tj. ***<u>celkový náboj uvnitř plochy S</u>*** :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots$$

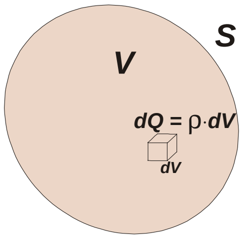
Dostáváme tak obecný vztah :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

***<u>Gaussův zákon elektrostatiky</u>*** (integrální tvar)

<u>*Slovní vyjádření :*</u> *Tok vektoru výsledné intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je určen celkovým nábojem uvnitř této plochy.*

Ve skutečnosti jsou ovšem elektrické náboje rozloženy na různých tělesech uvnitř uzavřené plochy – předpokládejme ihned nejobecnější případ náboje spojitě rozloženého s hustotou $\rho$ v celém vnitřním objemu V této plochy :




Pak vyjádříme celkový náboj $Q$ uvnitř plochy $S$ :

$$Q = \iiint_V dQ = \iiint_V \rho \, dV$$

a dosadíme ho do Gaussova zákona :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot \iiint_V \rho \, dV$$

Levou stranu ještě upravíme pomocí Gaussovy věty matematiky :

$$\iiint_V div \, \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\varepsilon_o} \cdot \iiint_V \rho \, dV$$

Porovnáním obou stran dostaneme rovnost integrovaných funkcí :

$$\boxed{div \, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}}$$

***Gaussův zákon elektrostatiky*** (diferenciální tvar)

Při znalosti smyslu operátoru divergence dobře pochopíme, že diferenciální tvar Gaussova zákona popisuje situaci v daném místě (bodu) elektrického pole, ale má **stejný fyzikální význam** jako jeho integrální tvar - divergence na levé straně přece znamená výtok elektrické intenzity z jednotkového objemu (tj. přes plochu obklopující 1 objem) ……..a na pravé straně je objemová hustota náboje, tj. náboj obsažený (uvnitř) právě v tomto jednotkovém objemu.

Jestliže tedy například nějaké místo elektrického pole je **bez nábojů** , tj. $\rho = 0$ , potom je nulová divergence, tedy :

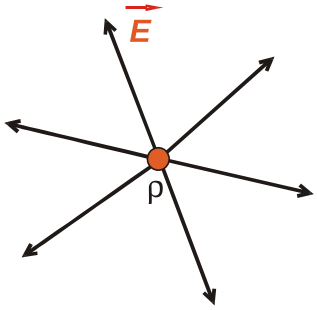
$$\boxed{div \, \vec{E} = 0}$$

***pole je nezřídlové***

Ale v případě, že v daném místě **jsou elektrické náboje** , tj. $\rho \neq 0$ , potom ovšem bude :

$\boxed{div\,\vec{E} \;\neq\; 0}$ ***pole je zřídlové***

Můžeme proto tvrdit, že ***elektrické náboje jsou zřídla (zdroje) elektrického pole*** .




(Vektory vycházející ze zdroje ovšem v elektrickém poli nepopisují skutečný mechanický pohyb hmoty, jako by tomu bylo v hydrodynamice, v poli proudící tekutiny - jde jen o „geometrii“ silového pole v daném místě prostoru.)

---

**(konec kapitoly)** **(K.Rusňák, 10/05)**

**rev. a doplň. 11/07**