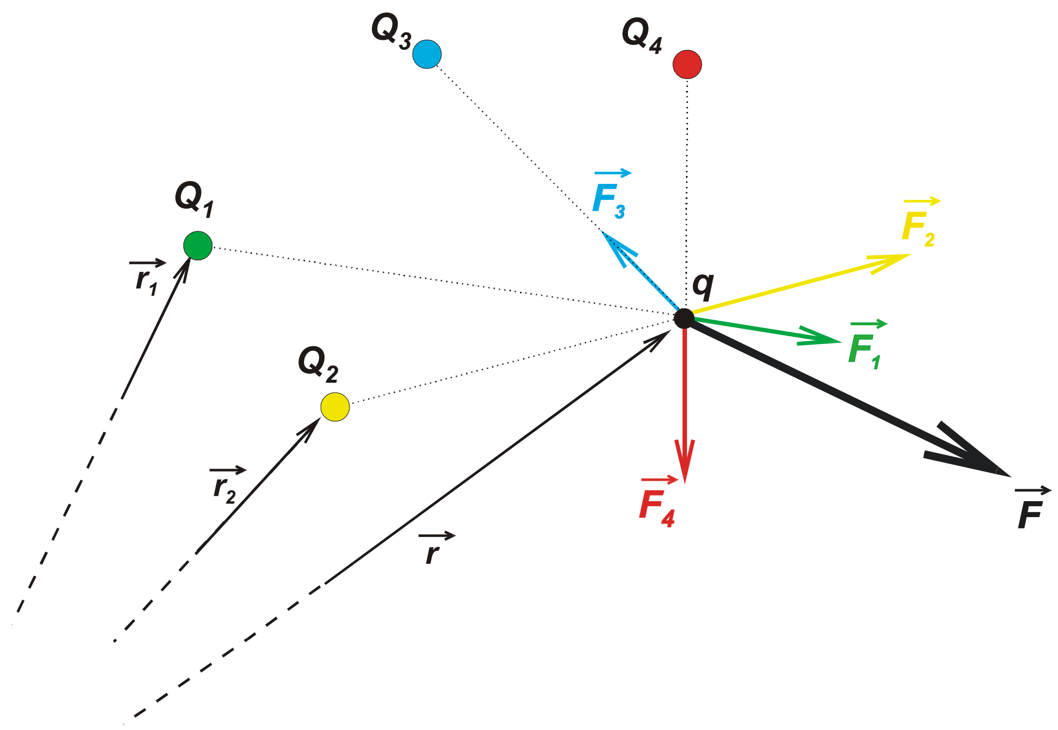
Zobecnění Coulombova zákona

Uvažme nyní, jaké elektrostatické pole vytvoří ne jeden (centrální) bodový náboj Q, ale více nábojů, tzv. *soustava (bodových) nábojů* :



Nechť je náboj Q_1 v místě $\vec{r}_1$

Q_2 v místě $\vec{r}_2$

. .

. .

Q_N v místě $\vec{r}_N$

Pak podle *principu superpozice* síly působící od jednotlivých nábojů na zkušební náboj q (v místě $\vec{r}$) se sčítají a vznikne tak celková síla :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

Rovnici vydělíme nábojem q a dostaneme hned *analogický vztah* pro celkovou (výslednou) el. intenzitu jako součet dílčích intenzit od jednotlivých nábojů (jak jinak, intenzity přece jsou také síly) :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

A za jednotlivé intenzity můžeme dosadit z Coulombova zákona (viz. dříve) :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_2) + \ldots$$

Zapíšeme opět zkráceně pomocí matematické sumy :

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

intenzita el. pole soustavy bodových nábojů

Stejným způsobem je možno také sečíst potenciály (potenciální energie) jednotlivých nábojů do výsledného potenciálu (i pro potenciální energie tedy platí princip superpozice – přemýšlejte, proč tomu tak je) :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N = \sum_i \varphi_i$$

A po dosazení vztahu pro potenciály jednotlivých bodových nábojů :

$$\boxed{\varphi = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}}$$

potenciál el. pole soustavy bodových nábojů

Při praktických výpočtech v elektrotechnice se ovšem bodové náboje vyskytují zřídka, většinou se jedná o *(kvazi)spojitě rozložené náboje* na reálných hmotných objektech. Podle geometrie těchto objektů můžeme rozlišovat :

a) Objemově rozložené náboje

(tj. elektrické náboje spojitě rozložené v nějakém objemu V – jde tedy například o nabitý objem tělesa)

Principem řešení je představa nabitého tělesa jako soustavy nábojů, použití výše odvozených matematických vzorců (sum) a jejich přechod k limitním tvarům :

- objem V rozdělíme (myšleně) na velký počet malých (v limitě pak nekonečně malých) částí ΔV (dV)
- každá tato nepatrná objemová část obsahuje nějaký velmi malý elektrický náboj ΔQ (dQ)
- můžeme je tedy považovat za bodové náboje a použít vztahy pro soustavu bodových nábojů:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_i) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Jde ale vlastně o *přibližné vztahy* pro intenzitu a potenciál el. pole objemově rozložených nábojů. Tyto vztahy platí tím přesněji, čím je rozdělení objemu na části „jemnější“, tj. čím je větší počet částí ΔV.

Exaktní vzorce lze tedy očekávat až *v limitě* pro nekonečný počet nekonečně malých částí objemu, tj. pro $N \to \infty$, $\Delta V \to dV \to 0$

Zavedeme ještě novou fyzikální veličinu, popisující *rozložení nábojů* ve sledovaném objemu :

$$\boxed{\rho = \frac{dQ}{dV}}$$

objemová hustota náboje

Slovní vyjádření : objemová hustota náboje je (číselně) elektrický náboj obsažený v jednotce objemu.

Jde zřejmě o *funkci* místa (a obecně, mimo elektrostatiku, i funkci času) :

$$\rho = \rho(\vec{r}\,) = \rho(\,x, y, z\,)$$

Při znalosti této veličiny lze pak jednoduše vyjádřit velikost náboje v libovolném malém objemu, v libovolném místě nabitého tělesa (objemu) :

$dQ = \rho \cdot dV$ nebo samozřejmě $\Delta Q = \rho \cdot \Delta V$

Pomocí objemové hustoty náboje můžeme tedy výslednou intenzitu a potenciál napsat ve tvaru :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{\rho \cdot \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{\rho \cdot \Delta V_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

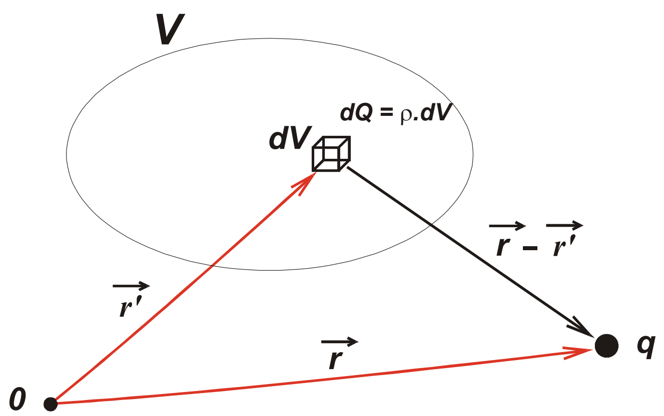
A nakonec uvážíme, že v limitním případě (pro nekonečný počet nekonečně malých objemových části ($N \to \infty$, $\Delta V \to dV$) přejdou matematické sumy na integrály (objemové):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \iiint_V \frac{\rho\, dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

intenzita el. pole objemově rozložených nábojů

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \iiint_V \frac{\rho\, dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

potenciál el. pole objemově rozložených nábojů



b) Plošně rozložené náboje

(tj. elektrické náboje spojitě rozložené v nějaké ploše S – např. elektricky nabitý povrch tělesa)

Řešíme analogicky, tj. plochu S rozdělíme na malé plošky ΔS (dS) s nábojem ΔQ (dQ), který vyjádříme jako :

$$dQ = \sigma \cdot dS$$

kde opět definujeme pomocnou veličinu :

$$\boxed{\sigma = \frac{dQ}{dS}}$$

plošná hustota náboje

Slovní vyjádření : plošná hustota náboje je (číselně) elektrický náboj obsažený v jednotce plochy.

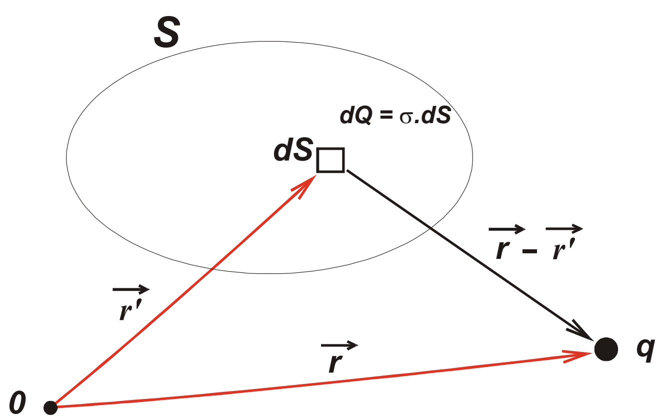
A vztahy pro intenzitu a potenciál přejdou nyní na plošné integrály:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma\, dS}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

intenzita el. pole plošně rozložených nábojů

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_S \frac{\sigma\, dS}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

potenciál el. pole plošně rozložených nábojů



c) Lineárně rozložené náboje

(tj. elektrické náboje spojitě rozložené na nějaké křivce – např. elektricky nabité vlákno)

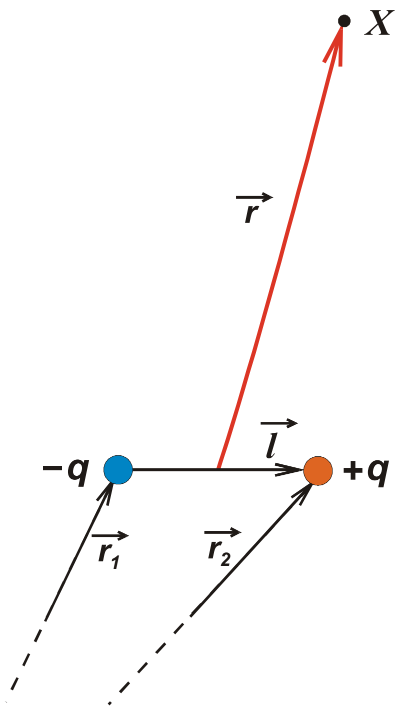
- viz. cvičení (zavede se ***délková hustota náboje***)

Otázka za D.cv. : Je el. pole soustavy nábojů, nabitých těles, ploch a křivek také konzervativní?

Elektrický dipól

je speciálním případem soustavy elektrických nábojů.

Je tvořen dvěma bodovými náboji stejné velikosti, ale opačného znaménka (tj. $+q$ a $-q$), které jsou umístěny v místech $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ ve vzájemné vzdálenosti l (kterou lze také definovat jako vektor $\vec{l}$, směřující od náboje záporného k náboji kladnému, viz obr.)



Vzniká tak zajímavá situace – když by oba náboje byly v jediném stejném místě, byly by jejich účinky dokonale „vykompenzovány“ – tj. jejich výsledné pole by bylo nulové. Avšak při nenulové vzájemné vzdálenosti vzniká sice relativně malé, ale také nenulové elektrické pole (elektrické dipólové pole).

Elektrický dipól má obrovský praktický význam pro popis „vnitřku“ hmotných těles : základní částice struktury všech látek - atomy (molekuly) jsou sice celkově neutrální (mají stejný počet kladných protonů v jádru a záporných elektronů v elektronovém obalu), ale v důsledku nesymetrického uspořádání nábojů se často jeví právě jako elektrické dipóly (více viz kapitolu „Elektrické pole v látce“).

Uvážíme-li nepatrné rozměry těchto dipólů (jako atomy, řádu 10^{-10} m) a že jejich elektrické pole pak vlastně působí v celém objemu tělesa (i třeba „mikroskopického“, o rozměrech řádu mikrometrů, tj. 10^{-6} m), pak je nám jasné, proč se účinky elektrického dipólu vyšetřují většinou jen ve vzdálenosti od dipólu, která je nesrovnatelně větší než vzdálenost nábojů :

$$\boxed{r \gg l}$$

A přitom se ještě předpokládá

$$\boxed{l \to 0}$$

Vypočítejte sami na cvičení, že elektrické pole dipólu, který je umístěn v počátku souřadnic, lze za výše uvedených podmínek popsat potenciálem :

$$\boxed{\varphi = \varphi(\vec{r}\,) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o \cdot r^3}}$$

kde jsme definovali :

$$\boxed{\vec{p} = q\cdot\vec{l}}$$ (elektrický) ***<u>dipólový moment</u>***

Tato veličina, jak vidíme ze vztahu pro potenciál, velmi dobře popisuje „elektrické" působení dipólu na okolní náboje, neboť v daném místě $\vec{r}$ je potenciál elektrického pole dipólu vždy úměrný velikosti dipólového momentu.:

$$\varphi \approx p$$

<u>Pozn. :</u> Známe-li potenciál, lze pak snadno vypočítat také intenzitu pole podle standardního vztahu :

$$\vec{E} = -\,grad\,\varphi$$

Na rozdíl od popisu obecné soustavy nábojů v první části této kapitoly probereme nyní zajímavý problém.

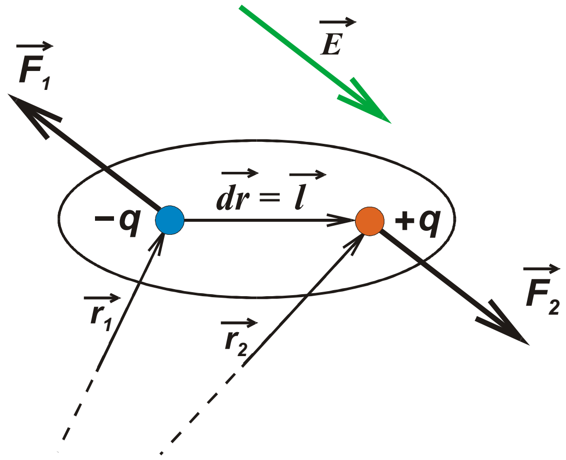
<u>Silové působení elektrického pole na dipól</u>

Víme již, že elektrický dipól – jako každá soustava nábojů - sám vytváří (svoje <u>vlastní</u>) elektrické pole, zde ale budeme zkoumat, co se bude dít, když dipól umístíme do nějakého <u>vnějšího</u> elektrického poli (od jiných nábojů) :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}\,)$$

Jde opět o velmi důležitou situaci uvnitř hmotného prostředí, neboť žádný dipól v látce není osamocený, izolovaný, ale je v poli nějakých jiných okolních nábojů, včetně okolních dipólů.

Na obrázku je znázorněn elektrický dipól jako malé tělísko (například „polární" molekula $NaCl$) a vektor vnějšího el pole, které existuje „v místě" dipólu :



Na oba jednotlivé bodové náboje dipólu $-q$ a $+q$ působí vnější elektrické pole určitými silani, které označíme $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$.

Nyní můžeme využít znalostí z mechaniky, neboť jde zjevně o působení vnějších sil na hmotné těleso (i když velmi malé) – a důsledkem tohoto působení je obecný pohyb tělesa, která můžeme vždy rozložit na dva nezávislé pohyby :

1) Translaci tělesa určuje výsledná vnější síla :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$$

Vyjádříme jednotlivé síly na náboje pomocí intenzit elektrického pole v místě nábojů :

$$\vec{F} = -q \cdot \vec{E}(\vec{r}_1) + q \cdot \vec{E}(\vec{r}_2) = q \cdot (\vec{E}(\vec{r}_2) - \vec{E}(\vec{r}_1)) = q \cdot d\vec{E}$$

Neboť výraz v závorce je vlastně přírůstkem (změnou) intenzity pole $d\vec{E}$ mezi místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$. Tento přírůstek napíšeme nyní jako diferenciál vektorové funkce tří proměnných :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z) = \left(E_x(x, y, z),\ E_y(x, y, z),\ E_z(x, y, z) \right)$$

Při přechodu z místa prvního náboje $\vec{r}_1$ do místa druhého náboje $\vec{r}_2$, tj. při změně nezávisle proměnné o hodnotu :

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{l} = d\vec{r} = (dx,\ dy,\ dz)$$

Tento diferenciál je samozřejmě také funkce tří proměnných :

$$d\vec{E} = (dE_x, dE_y, dE_z) = \left(dE_x(x, y, z),\ dE_y(x, y, z),\ dE_z(x, y, z) \right)$$

Každá ze souřadnic tohoto vektoru je pak diferenciálem „obyčejné“ skalární funkce tří proměnných, který můžeme standardně matematicky vyjádřit pomocí gradientu :

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial E_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial E_x}{\partial z} \cdot dz = d\vec{r} \cdot grad\, E_x$$

$$dE_y = \ldots \qquad \ldots = d\vec{r} \cdot grad\, E_y$$

$$dE_z = \ldots \qquad \ldots = d\vec{r} \cdot grad\, E_z$$

To lze zapsat vektorově :

$$d\vec{E} = d\vec{r} \cdot grad\, \vec{E}$$

A dosadíme do vztahu pro výslednou vnější sílu :

$$\vec{F} = q \cdot d\vec{E} = q \cdot d\vec{r} \cdot grad\, \vec{E}$$

Uvážíme-li o několik řádek výše uvedenou rovnost přírůstku průvodiče a vektoru vzdálenosti nábojů, dostáváme nakonec jednoduchý a zajímavý vztah :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{p} \cdot grad\, \vec{E}}$$ ***síla působící na dipól***

Samozřejmě nás překvapí vzniklý gradient vektoru, ale jen do té doby, než si uvědomíme, že jsme vlastně napsali formální vektorovou rovnici. Při jejím rozepsání do souřadnic pak vzniknou běžné gradienty skalárních funkcí E_x , E_y a E_z.

2) Rotace tělesa je pak dána výsledným vnějším silovým momentem :

Při výpočtu momentů působících sil dobře využijeme nezávislosti rovnic mechaniky na (inerciální) soustavě souřadnic a zvolíme její počátek v místě jednoho náboje (např. $-q$), pak je jeho průvodič nulový a průvodič druhého náboje je roven vektoru vzdálenosti nábojů :

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0 + \vec{l} \times \vec{F}_2$$

Vyjádříme opět sílu pomocí intenzity a přesuneme náboj ve vektorovém součinu :

$$\vec{M} = \vec{l} \times q \cdot \vec{E}(\vec{r}_2) = q \cdot \vec{l} \times \vec{E}_2 = \vec{p} \times \vec{E}_2$$

Uvážíme-li ovšem, že intenzita v místě druhého náboje je prakticky stejná jako v kterémkoliv místě nekonečně malého dipólu, tj. :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$$

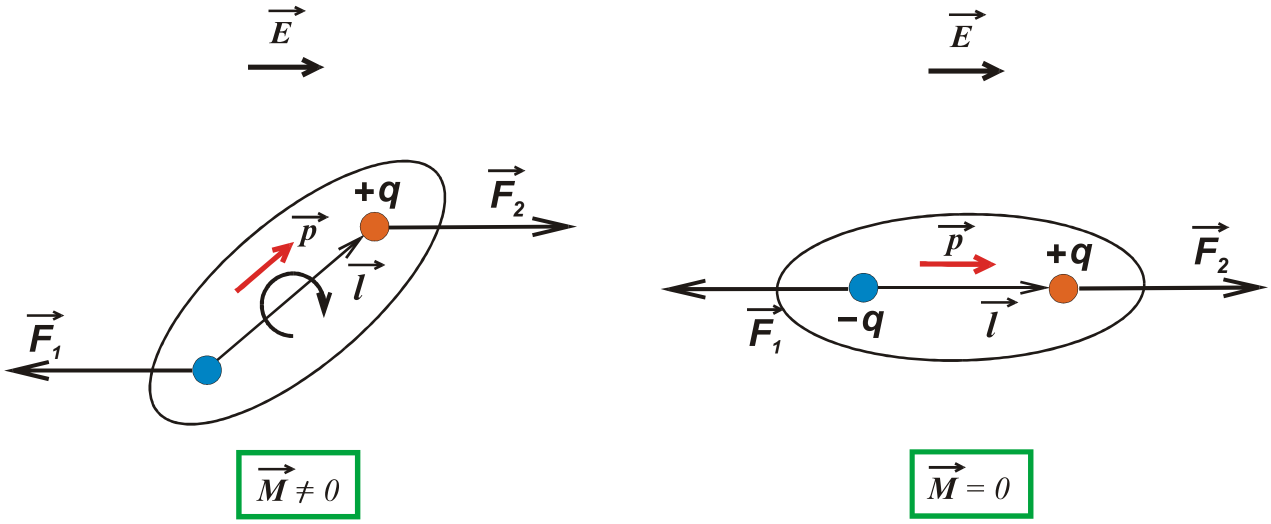
Pak i pro výsledný silový moment vzniká jednoduchý vztah :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$ ***silový moment působící na dipól***

Je vidět, že i když síla na dipól může být někdy nulová - pro homogenní pole (tj. $\vec{E} = konst.$), které má nulový gradient), moment síly je ale vždy různý od nuly, pokud je i pole nenulové (a dipölový moment není náhodou rovnoběžný s vektorem intenzity).

Tento silový moment se pak snaží uvést těleso – dipól - do rotačního pohybu. Dipól je ovšem ve struktuře látky vázán nějakými silami, které neumožní stálý rotační pohyb, ale pouze malé (jednorázové) pootočení dipólu (úměrné zřejmě momentu síly a tím i intenzitě pole), maximálně do směru rovnoběžného s intenzitou $(\vec{p} \,||\, \vec{E})$, kdy silový moment zcela vymizí (viz obr.) :

…



Existjící dipóly v látce, kterou vložíme do vnějšího elektrického pole, se tedy všechny natáčejí do jednoho jediného směru, do směru intenzity pole, a to tím více, čím je pole silnější (nastává . „orientace dipólů“ a proto se s intenzitou pole zvětšuje součet všech jejich dipólových momentů – je to tzv. ***orientační polarizace*** dielektrika – viz kapitolu“Elektrické pole v látce“).

(konec otázky) (K.Rusňák, 11/05)