Další vlastnosti konzervativního. pole

Z minulé kapitoly již víme, že :

- silové pole nazýváme konzervativní, když se vykonaná práce „neztrácí“, ale je „zakonzervována“ v poloze náboje a mohu ji dostat zpět (a nezávisí na tvaru dráhy)
- pak existuje potenciální energie (a potenciál)

Platí to i opačně (zkuste jako D.cv.) :

- když existuje potenciální energie (a potenciál) - pak pole je konzervativní

Celkem tedy : ***existence potenciálu je ekvivalentní konzervativnosti el. pole***

Nyní ale ještě odhalíme *další důležité vztahy* , které budou rovněž ekvivalentní konzervativnosti pole:
Nejprve použijme vztah pro rozdíl potenciálů získaný koncem minulé kapitoly:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; \varphi_2-\varphi_1 \;=\; \varphi(\vec{r}_2)-\varphi(\vec{r}_1)$$

Pravá strana vypadá jako výsledek určitého integrálu z přírůstku funkce φ mezi místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$, tedy :

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi$$

Z rovnosti stejných integrálů pak plyne rovnost integrovaných funkcí :

$$\boxed{d\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{r}}$$ ***diferenciální přírůstek potenciálu***

Vidíme, že tento přírůstek potenciálu se realizuje na diferenciální dráze, tj. při diferenciální změně polohy bodového náboje.
Uvažme dále, že potenciál je funkce místa, tj. funkce tří prostorových proměnných :

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z)$$

a vyjádřeme diferenciální přírůstek potenciálu na levé straně rovnice známým matematickým výrazem :

$$d\varphi \;=\; \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot dz \;=\; grad\,\varphi\cdot d\vec{r}$$

Porovnáním s pravou stranou předchozí rovnice dostaneme ***další ekvivalentní vztah*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi}$$ ***vztah intenzity a potenciálu el. pole (diferenciální)***

Tato rovnost vyjadřuje jednoznačný vztah vektorové intenzity pole a skalárního potenciálu.
Silové elektrické pole, definované *vektorovou veličinou* - intenzitou (jako silou na jednotkový náboj) je tedy možno daleko jednodušeji popisovat *pouze skalární funkcí* – potenciálem.
(A v případě potřeby lze použitím uvedené rovnice kdykoliv přejít k intenzitě pole.)

Povšimněte si ještě, co také plyne z vlastností derivací v poslední rovnici : pro dané elektrické pole, tj. pro *jedinou elektrickou intenzitu* existuje *nekonečně mnoho možných potenciálů* , které se navzájem mohou lišit o libovolnou konstantu (její derivace je nulová). To je ovšem v souladu se obecným vztahem pro potenciál bodového náboje (potenciální energii, viz dříve), který obsahuje výchozí polohu jako parametr – tim se vnáší do hodnoty funkce potenciál této výchozí polohy - to je ona konstanta.

Zopakujme si dále pro úplnost, co známe z matematiky o operátoru gradient :
Nejprve definice :

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

To lze formálně zapsat :

$$grad\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla\varphi$$

V tomto vztahu jsme definovali matematický formální vektor – operátor nabla:

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

operátor nabla

A nakonec ještě smysl operátoru gradient :

$grad\,\varphi$ určuje směr největšího růstu funkce φ – tj. kolmice k jejím ekvipotenciálním plochám

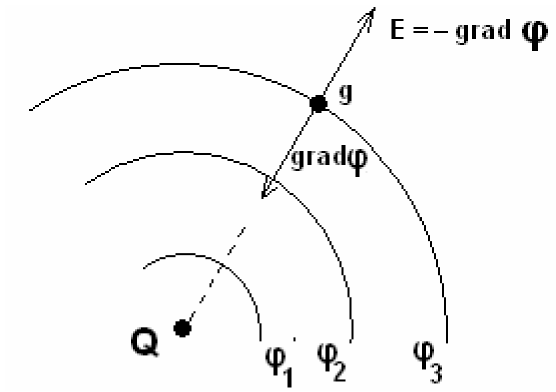
Například ekvipotenciální plocha pro bodový náboj má rovnici :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r} = konst.$$

Jejím řešením je rovnice kulové plochy :

$$r = konst.$$

Kolmice k těmto plochám směřují do středu, do centrálního náboje.



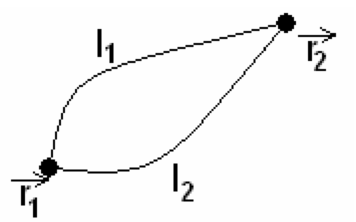
Dále se vraťme k základní vlastnosti elektrostatického pole – že práce vnější síly mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nezávisí na dráze, tj.:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = konst.$$

Po vydělení rovnice $(-q)$ pak nezávisí na dráze ani integrál

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = konst$$

Jestliže tedy zvolíme mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ dvě různé křivky (dráhy) l_1 a l_2, bude:



$$\int_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1(l_2)}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

V integrálu na pravé straně přehodíme meze (tím změní znaménko) a převedeme ho na levou stranu (opět změní znaménko) :

$$\int\limits_{\vec{r}_1(l_1)}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{\vec{r}_2(l_2)}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Součet integrálů na levé straně je dohromady integrál po uzavřené křivce $l = l_1 + l_2$:

$$\oint\limits_{l} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Křivky l_1 a l_2 jsou libovolné , proto také výsledná křivka l je libovolná a vztah platí pro jakoukoliv uzavřenou křivku (nepíšeme tedy žádné její označení) – je to ***<u>další ekvivalentní vztah</u>*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

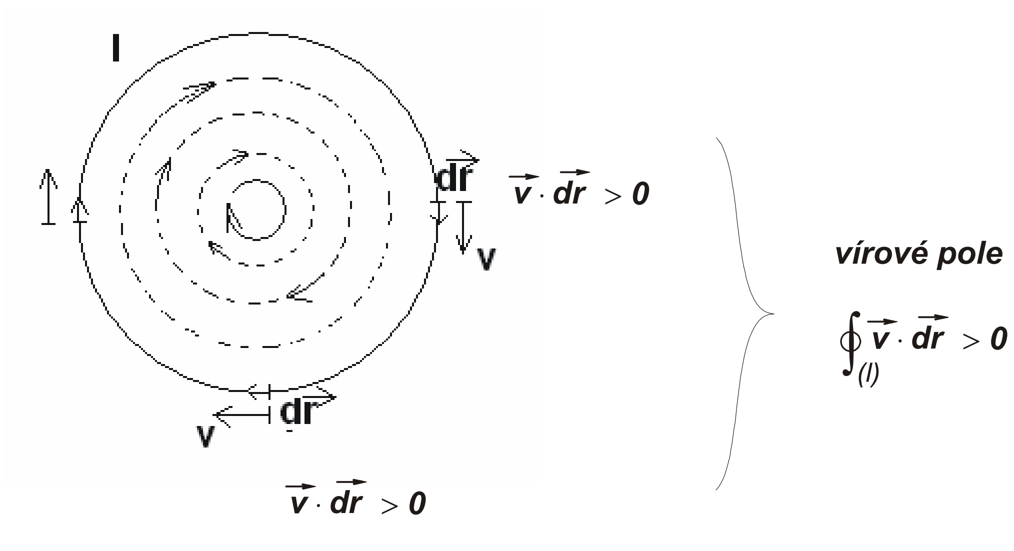
$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0}$$ ***<u>nevírovost el. pole</u>***

Pojem nevírovosti pochází z <u>hydrodynamiky</u> , kde se v <u>poli rychlosti</u> $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ často zkoumá hodnota integrálu, tzv. ***<u>cirkulace vektoru rychlosti</u>*** po uzavřené křivce l :

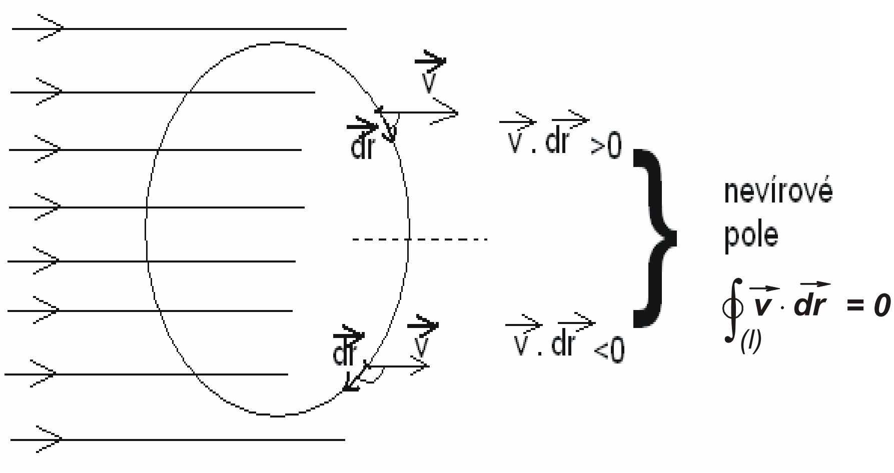
$$\oint\limits_{(l)} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

Význam tohoto integrálu vyplyne z následujících dvou příkladů :

1) Jestliže v nějakém místě kapaliny existuje vír (např. kolem výpusti, jako důsledek Coriolisovy síly), potom zřejmě platí – viz. obr.:



2) Jestliže v kapalině neexistují víry – např. když probíhá laminární proudění, potom je situace zcela jiná :



Pojmy ***cirkulace vektoru***, ***vírové pole*** a **nevírové pole** potom formálně používáme v jakémkoliv vektorovém poli, i v případě, když nepopisuje žádný reálný pohyb hmoty.

Uveďme dále matematickou ***Stokesovu větu*** [stouksovu], která se často používá pro úpravu integrálů typu „cirkulace vektoru" :

Nechť S je spojitá plocha ohraničená spojitou uzavřenou křivkou l .

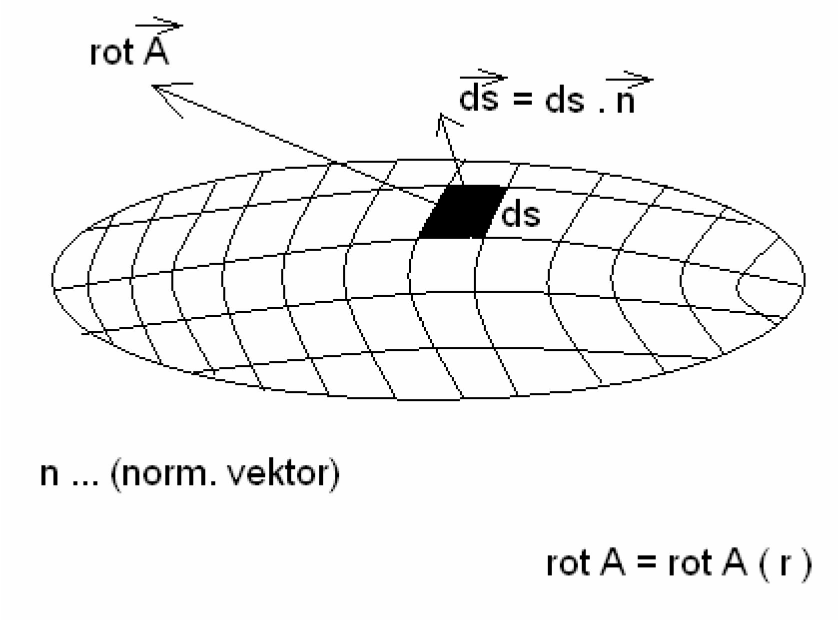
Pak pro libovolnou spojitou vektorovou funkci polohy, tj. :

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \left(A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z) \right)$$

Platí vztah :

$$\boxed{\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\, \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

kde $d\vec{s}$ je orientovaný vektor plochy (viz. obr.) a $rot\, \vec{A}$ je ***matematický operátor rotace vektoru*** $\vec{A}$.



Zopakujme si dále, jako u gradientu, co matematika uvádí o operátoru rotace :

Nejprve jeho definice :

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \;,\; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \;,\; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

To lze formálně zapsat opět pomocí operátoru nabla, který byl již použit u gradientu :

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(A_x, A_y, A_z \right) = \nabla \times \vec{A}$$

Zcela evidentně nejde o triviální operátor, pokusme se dále určit nějaký jeho názorný (fyzikální) smysl :

Napišme Stokesovu větu, za předpokladu splnění jejích podmínek :

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

A představme si, že zmenšujeme velikost ohraničené plochy S , matematicky až v limitě $S \to 0$.

Pak ovšem není potřeba dělit tuto již malou plochu na malé části (a provádět integraci) a pravou stranu můžeme napsat v (přibližném) tvaru (současně vyjádříme vektor plochy pomocí normálového vektoru) :

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{r} \cong rot\,\vec{A} \cdot \vec{S} = rot\,\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot S$$

Vydělením velikostí plochy osamostatníme skalární součin, rovnost platí ovšem exaktně až v limitě :

$$\boxed{rot\,\vec{A} \cdot \vec{n} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}}{S}}$$

Na pravé straně je podíl cirkulace vektoru a velikosti plochy (kolem které cirkulace probíhá), tedy je to cirkulace vektoru připadající na jednotkovou plochu (kolem jednotkové plochy) …. lze také použít názvu ***plošná hustota cirkulace*** .

Skalární součin na levé straně pak vyjadřuje kolmý průmět vektoru $rot\,\vec{A}$ do směru normály k ploše S .

Uvážíme-li, že vektor $rot\,\vec{A}$ je jednoznačně určen svým místem (je to funkce polohy), potom velikost tohoto průmětu závisí jedině na naší volbě plochy S a kolmý průmět vektoru bude tedy maximální a rovný velikosti vektoru v případě plochy kolmé na tento vektor.

Shrňme tyto poznatky o významu operátoru rotace :

- vektor $rot\,\vec{A}$ ***má směr normály k ploše, kolem které je maximální cirkulace vektoru*** $\vec{A}$

- a jeho velikost je pak rovná plošné hustotě cirkulace vektoru $\vec{A}$

Upravme nyní náš vztah nevírovosti el. pole:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Levou stranu upravme ze Stokesovy věty a dostaneme :

$$\iint_S rot\,\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Protože S je libovolná (ohraničená) plocha v prostoru, vyplývá z nulového integrálu také nulovost integrované funkce a dostáváme tak ***další ekvivalentní vztah*** konzervativnosti elektrostatického pole (promyslete jeho zpětnou implikaci) :

$$\boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$ ***nevírovost elektrostatického pole – dif. tvar***

D.cv.:

Po dosazení do tohoto vztahu za el. intenzitu:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi$$

Získáme rovnici :

$$\boxed{rot\,grad\,\varphi = 0}$$

Pokuste se najít řešení této rovnice (podmínky platnosti) !

Závěrem můžeme konstatovat :

Konzervativnost je základní vlastností silového pole – umožňuje uchování vykonané práce ve formě potenciální energie hmotných objektů.

V této kapitole jsme prozkoumali konzervativní elektrostatické pole a poznali jsme, že jeho konzervativnost lze jednoznačně vyjádřit také následujícími ***ekvivalentními vztahy*** :

$$\boxed{el.\ pole\ je\ konzervativní}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{existuje\ potenciál\ \varphi}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\ \varphi}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \ = \ konst}$$ (nezávisí na dráze)

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{rot\ \vec{E} = 0}$$

Ekvivalenci těchto vztahů lze dobře využít při zkoumání jakéhokoliv silového pole – zjistíme-li platnost libovolné uvedené rovnice, pak toto pole je konzervativní (nebo není konzervativní při její neplatnosti).

1.2.06 – str. 6 : oprava limity u rotace