Základní rovnice magnetického pole

V minulé kapitole jsme nalezli dvě nejdůležitější rovnice magnetického pole - první vztah popisuje základní vlastnost pole, jeho „geometrii“ (nezřídlovost, neexistenci magnetických nábojů) - a druhá rovnice, Ampérův zákon, jednoznačně spojuje pole ($\vec{B}$) s jeho zdroji ($\vec{i}$) .

$$\boxed{\begin{array}{ll} div\,\vec{B} = 0 & (1) \\ rot\,\vec{B} = \mu_o \cdot \vec{i} & (2) \end{array}}$$

dvě hlavní rovnice magnetického pole

Podobná situace byla i v elektrostatickém poli - to bylo popsánu rovnicí pro nevírovost a Gaussovým zákonem – a pomocí elektrostatického potenciálu jsme tyto dvě rovnice převedli (nahradili) rovnicí jedinou, tzv. základní rovnicí elektrostatiky, Laplaceovou rovnicí (základní „vtip“ byl v tom, že při zavedení potenciálu byla první rovnice automaticky vždy splněna).

Nyní se pokusíme o provedení analogické transformace i u rovnic magnetického pole : Toto pole sice není konzervativní a nemá tedy „klasický“ potenciál, z matematického hlediska však nic nebrání zavedení nějaké „pomocné veličiny“, která by napomohla „automatickému“ vynulování první rovnice.

Protože pro libovolnou vektorovou spojitou funkci vždy platí :

$$0 = div\,rot\,\vec{A} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \cdots\cdots$$

(Zkuste dopočítat za D.cv., využije se rovnosti smíšených derivací spojitých funkcí.)

Definujeme proto spojitou vektorovou funkci $\vec{A}$ - tzv. vektorový potenciál - tak, aby pro dané magnetické pole ($\vec{B}$) v každém jeho místě platilo :

$$\boxed{\vec{B} = rot\,\vec{A}}$$

definice vektorového potenciálu

Pak je tedy rovnice (1) vždy identicky splněna :

$$div\,\vec{B} = div\,rot\,\vec{A} = 0 \qquad (1)$$

A zbude pouze jediná rovnice (2), kterou budeme dále upravovat. Nejprve si však uvědomíme několik důležitých skutečností :

1) Je zřejmé, že vektorový potenciál není veličina s nějakým fyzikálním významem (jako vykonaná práce, apod.), je to pouze pomocná matematická veličina .

2) Definiční vztah vektorového potenciálu je vlastně parciální diferenciální rovnicí pro zadanou veličinu $\vec{B}$ a hledanou neznámou veličinu $\vec{A}$ a jako vždy u diferenciálních rovnic neexistuje pouze jediné řešení, tj. řešení dané rovnice není jednoznačné . Abychom nezůstali pouze u obecného odkazu na teorii diferenciálních rovnice, provedeme důkaz tohoto tvrzení a bude to „důkaz příkladem" :

Nechť nějaká funkce $\vec{A}$ je vektorovým potenciálem daného magnetického pole $\vec{B}$, tj. je splněna rovnice :

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

Potom je vektorovým potenciálem také následující nová funkce (ve které $\psi(\vec{r})$ je libovolná spojitá skalární funkce) :

$$\vec{A}' = \vec{A} + grad\ \psi$$

Neboť i pro tuto funkci je splněna definiční rovnice vektorového potenciálu daného magnetického pole :

$$rot\ A' = rot\left(\vec{A} + grad\ \psi\right) = rot\ \vec{A} + rot\ grad\ \psi = rot\ \vec{A} = \vec{B}$$

(rotace gradientu je pro spojité funkce vždy nulová)

Vidíme, že pro dané, jediné, magnetické pole existuje nekonečně mnoho vektorových potenciálů, které splňují definiční rovnici. Tyto potenciály se od sebe liší samozřejmě svými funkčními hodnotami, liší se ale také například hodnotou své divergence :

$$div\ \vec{A}' = div\ \vec{A} + div\ grad\ \psi = div\ \vec{A} + \Delta\psi$$

Protože funkce ψ byla naprosto libovolná, může mít $\Delta\psi$ také libovolnou hodnotu a stejně tak bude libovolná – jakákoliv – hodnota i celé pravé strany rovnice.

Pro dané magnetické pole si tedy můžeme vybrat vektorový potenciál - aby samozřejmě splňoval definiční rovnici - a navíc pro něj můžeme požadovat libovolnou hodnotu jeho divergence – standardně se volí nulová hodnota :

$$\boxed{div\ \vec{A} = 0}$$

dodatečná podmínka na vektorový potenciál

(Vybrali jsme za vektorový potenciál jednu určitou funkci, nemusíme již tedy psát čárku, která formálně odlišovala různé možné potenciály)

Tento výběr je jistě matematicky v pořádku, jeho smysl však uvidíme až o několik řádek níže.

Věnujme se nyní konečně úpravám jediné zbylé rovnici (2) :

$$rot\ \vec{B} = \mu_o \cdot \vec{i}$$

Dosadíme do ní za magnetickou indukci definiční vztah pro vektorový potenciál :

$$rot\ rot\ \vec{A} = \mu_o \cdot \vec{i}$$

Operátor dvojité rotaci upravíme pomocí známého matematického vztahu :

$$rot\ rot\ \vec{A} = grad\ div\ \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

Po dosazení tedy bude :

$$grad\ div\ \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_o \cdot \vec{i}$$

A právě nyní můžeme efektně odstranit první člen levé strany rovnice – požitím dodatečné podmínky nulovosti divergence vektorového potenciálu a dostaneme (na pohled) jednoduchý výsledek :

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_o \cdot \vec{i}}$$

<u>základní rovnice magnetického pole</u> (vektorový tvar)

Tedy po zavedení vektorového potenciálu postačí k popisu magnetického pole také pouze <u>jediná</u> rovnice, jako u pole elektrostatického.

Ale pozor, je to rovnice <u>vektorová</u> , tj. <u>tři</u> „obyčejné“ skalární rovnice pro tři souřadnice vektorů :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta A_x &= -\mu_o \cdot i_x \\ \Delta A_y &= -\mu_o \cdot i_y \\ \Delta A_z &= -\mu_o \cdot i_z \end{aligned}}$$

<u>základní rovnice magnetického pole</u>

Je více než sympatické, že každá z těchto tří rovnic má formálně matematicky zcela shodný tvar se základní rovnicí elektrostatiky, s Poissonovou rovnicí :

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

Formální matematické shoda znamená, že na obou stranách rovnic se provádějí naprosto stejné matematické operace – na levé straně je Laplaceův operátor (tj. součet všech druhých parciálních derivací podle prostorových souřadnic), na pravé straně je pak funkce vynásobená konstantou.

Písmena v rovnicích – tj. fyzikální veličiny – jsou ovšem zcela jiné :

veličině φ odpovídá A_x (nebo A_y , A_z), funkci ρ odpovídá i_x (nebo i_y , i_z) a konstantě $\frac{1}{\varepsilon_o}$ odpovídá μ_o .

Této shody rovnic využijeme velmi účelně - matematicky stejné rovnice musí mít i matematicky stejné řešení. Jestliže tedy známe řešení Poissonovy rovnice :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \iiint\limits_V \frac{\rho \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Potom naše tři matematicky stejné rovnice musí mít řešení :

$$\boxed{\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \iiint\limits_V \frac{i_x \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \iiint\limits_V \frac{i_y \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ A_z(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \iiint\limits_V \frac{i_z \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}}$$

řešení základní rovnice magnetického pole

Což můžeme vyjádřit vektorově :

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \iiint\limits_V \frac{\vec{i} \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

řešení základní rovnice magnetického pole (vektorový tvar)

Jsou-li tedy zadány zdroje pole - proudy (rozložení proudové hustoty $\vec{i}$), lze podle této rovnice vypočítat vektorový potenciál a pak stanovit magnetickou indukci pomocí definiční rovnice potenciálu :

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}$$

S vektorovým potenciálem jako (matematickou) analogií skalárního elektrostatického potenciálu jsme tedy získali účinný výpočtový prostředek pro stanovení magnetického pole v případě, kdy by použití jiné metody (například Biotova-Savartova zákona) narazilo na nějaké úskalí a také – jak uvidíme v další kapitole – bude pomocí vektorového potenciálu objevena nová fyzikální veličina a další matematické souvislosti magnetického a elektrického pole.

(konec kapitoly) **(K.Rusňák, 01/06)**