Elektrické pole v nevodivém prostředí

V minulé kapitole jsme již poznali vodivé prostředí (např. kovové těleso), které obsahuje volně pohyblivé náboje – tzv. volné náboje . Jeho vlastnosti byly dosti jednoduché : V takovém tělese je vždy nulové elektrické pole a všechna jeho místa mají stejný potenciál , který je úměrný celkovému náboji tělesa.

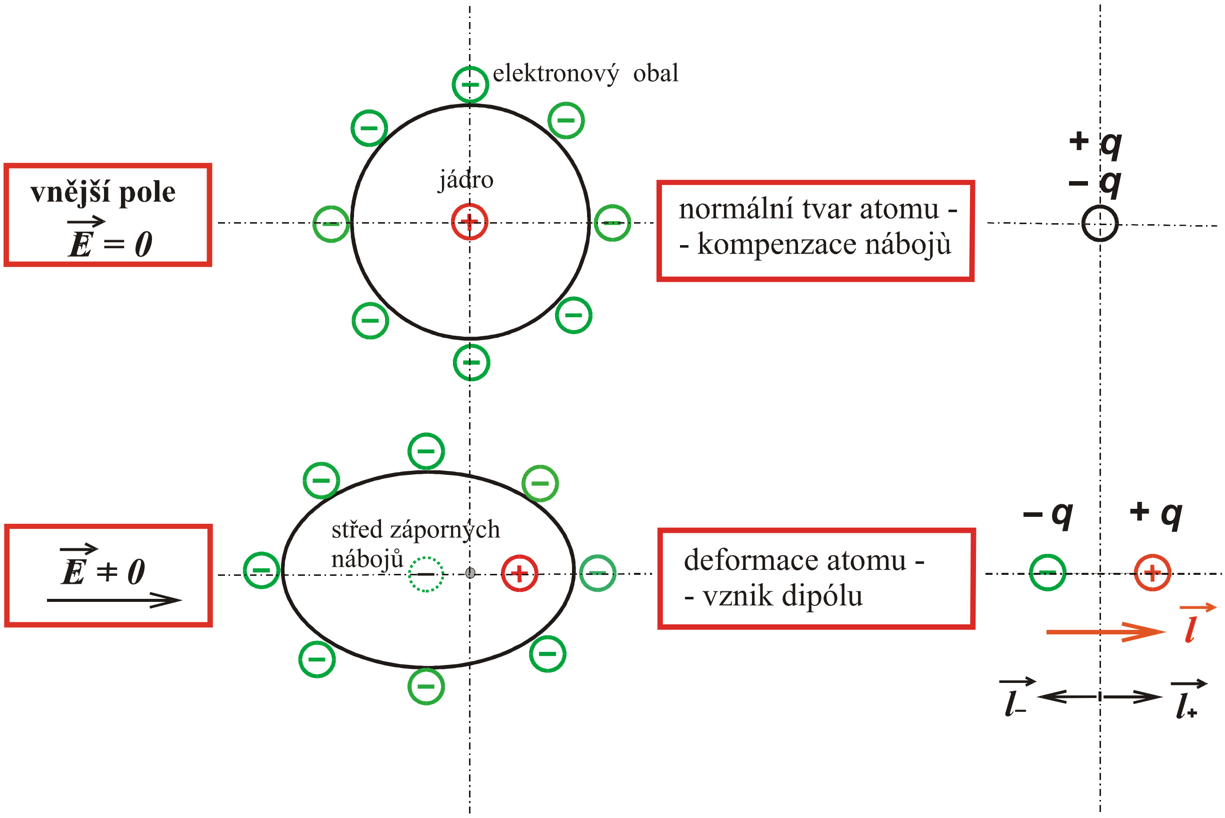
Nyní budeme zkoumat nevodivé prostředí – ***dielektrikum*** - kde sice také existují náboje (kladné, záporné), ale jsou ke svým místům vázány relativně velkými silami – tzv. ***vázané náboje*** .

(Základní nabité částice hmoty – elektrony a protony – jsou vázány v atomech, atomy v molekulách a molekuly v krystalické mřížce pevné látky.)

Jestliže vložíme dielektrikum do vnějšího elektrického pole, pak se tyto náboje nedají do pohybu (jako by to udělaly volné náboje), ale ze svých míst se pouze nepatrně posunou .

Na následujícím obrázku je ukázáno chování základní částice hmoty – **atomu** - který se skládá z kladného jádra a záporného elektronového obalu :

a) V základním stavu bez vnějších vlivů (pole) je elektronový obal dosti symetrický, takže jeho „těžiště“ , kde si můžeme představit celkový záporný náboj (jako v těžiště tělesa si představujeme celkovou hmotu tělesa), leží na stejném místě jako kladné jádro atomu – působení kladných a záporných nábojů se „kompenzuje“ - navenek se tedy atom jeví jako neutrální.
b) Ve vnějším elektrickém poli se kladné jádro posouvá ve směru intenzity a záporný elektronový obal se deformuje ve směru opačném. Kladný a záporný náboj atomu se tedy prostorově od sebe vzdalují, atom se „polarizuje“, vidíme, že vlastně ***vzniká elektrický dipól*** **.**



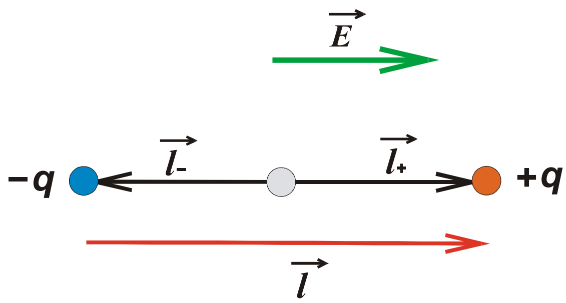
Protože každá látka je složena z obrovského množství atomů (jejich počet lze stanovit pomocí Avogadrova čísla $N \approx 6 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$) - v objemu dielektriku tedy vzniká velké množství elektrických dipólů – je to tzv. jev ***atomové polarizace*** dielektrika.

Jestliže posuny kladného a záporného náboje z původní polohy vyjádříme pomocí vektorů $\vec{l}_+$ a $\vec{l}_-$, můžeme dobře stanovit vzdálenost nábojů vzniklého dipólu (viz obr.) :

$$\vec{l} \ = \vec{l}_+ - \vec{l}_-$$

A také jeho dipólový moment:

$$\vec{p} \ = \ q \cdot \vec{l} \ = \ q \cdot (\vec{l}_+ - \vec{l}_-)$$

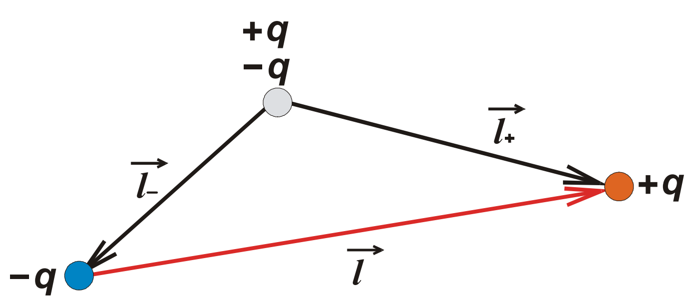


Podle našeho obrázku se zdá, že vektory posunů, vzdálenosti nábojů a dipólového momentu jsou rovnoběžné s intenzitou elektrického pole :

$\boxed{\vec{l}_+ \uparrow\uparrow \vec{E}}$ $\boxed{\vec{l}_- \uparrow\downarrow \vec{E}}$ $\boxed{\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{E}}$ $\boxed{\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{E}}$

To je ovšem speciální případ tzv. ***izotropního dielektrika*** , které má stejné vlastnosti (vazební síly nábojů) ve všech směrech .

Obecně je ovšem nutno předpokládat různé směry posunu nábojů (viz obr.).



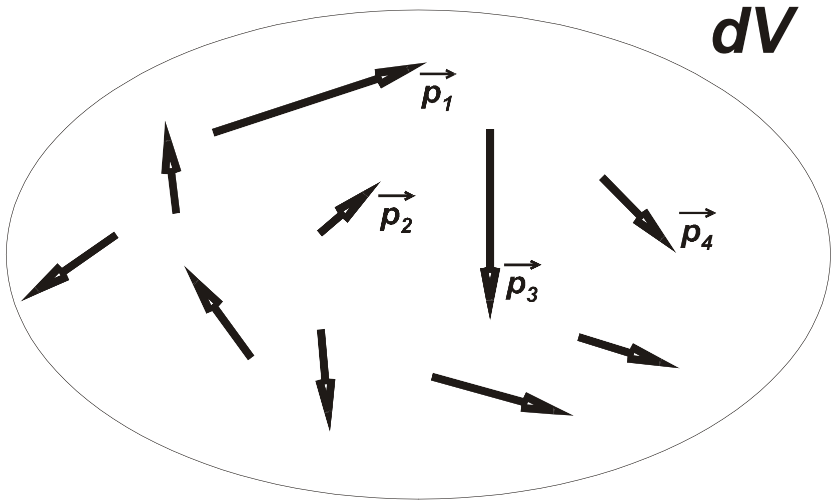
Je pak jistě sympatické, že i v tomto obecném případě zůstávají předchozí rovnice v platnosti :

$$\vec{l} \;=\; \vec{l}_{+} - \vec{l}_{-}$$

$$\vec{p} \;=\; q \cdot \vec{l} \;=\; q \cdot (\vec{l}_{+} - \vec{l}_{-})$$

Jev (atomové) polarizace dielektrika ve vnějším elektrickém poli tedy znamená, že v dielektriku vznikají elektrické dipóly - v nějakém objemu dV nechť vznikne N dipólů s dipólovými momenty (viz obr.) :

$$\vec{p}_1 \;=\; q_1 \cdot \vec{l}_1$$
$$\vec{p}_2 \;=\; q_2 \cdot \vec{l}_2$$
$$\vec{p}_3 \;=\; q_3 \cdot \vec{l}_3$$
$$\vdots$$
$$\vec{p}_N \;=\; q_N \cdot \vec{l}_N$$



Jejich součet pak nazveme ***celkový elektrický dipólový moment*** v objemu dV :

$$d\vec{p} \;=\; \vec{p}_1 \;+\; \vec{p}_2 \;+\; \vec{p}_3 \;+\; \cdots \;+\; \vec{p}_N \;=\; \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \;=\; \sum_{k} q_k \cdot \vec{l}_k$$

A definujeme novou fyzikální veličinu :

$$\boxed{\vec{P} \;=\; \frac{d\vec{p}}{dV}}$$ ***polarizace dielektrika*** (vektor)

Slovně : polarizace dielektrika je celkový dipólový moment v jednotce objemu, tedy ***(objemová) hustota*** (celkového) dipólového momentu v daném místě dielektrika.

Ve zvláštním (ale častém) případě ***homogenního dielektrika*** , které má stejné vlastnosti (zde stejné dipóly) v různých místech , bude :

$$\vec{p}_1 \;=\; \vec{p}_2 \;=\; \ldots \; \vec{p}_N \;=\; \vec{p} \;= q \cdot \vec{l}$$

Pak vznikne pro celkový dipólový moment jednoduchý vztah :

$$d\vec{p} \;=\; \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \;=\; N \cdot \vec{p} \;=\; N \cdot q \cdot \vec{l} \;=\; dQ^{*} \cdot \vec{l}$$

ve kterém jsme označili jako <u>celkový vázaný kladný náboj</u> v objemu dV :

$$dQ^* = N \cdot q$$

A dosadíme do vztahu pro polarizaci :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{dQ^* \cdot \vec{l}}{dV}$$

Jestliže ještě označíme :

$$\boxed{\rho^* = \frac{dQ^*}{dV}}$$

(objemová) hustota kladného vázaného náboje

Pak pro polarizaci v homogenním dielektriku platí :

$$\boxed{\vec{P} = \rho^* \cdot \vec{l}}$$

polarizace homogenního dielektrika

Vektor polarizace je tedy jednoduše rovnoběžný s vektorem vzdálenosti nábojů dipólu :

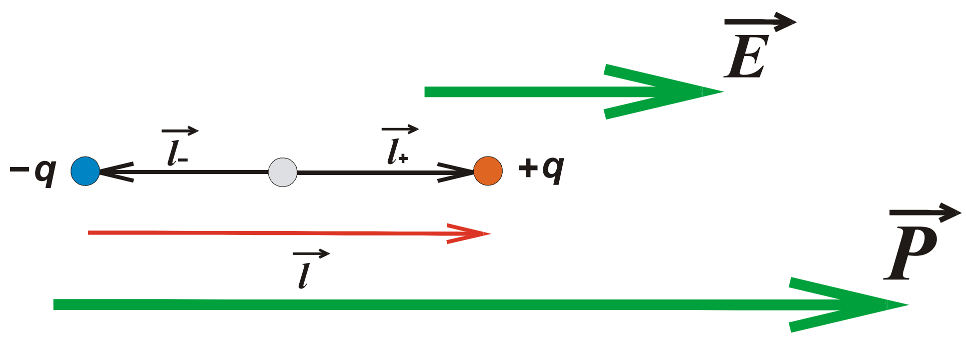
$$\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{l}$$

Vzpomeňte, že v případě <u>izotropního</u> dielektrika byl tento vektor vzdálenosti ještě rovnoběžný s vektorem elektrické intenzity :

$$\vec{l} \uparrow\uparrow \vec{E}$$

Tedy v ***homogenním a izotropním*** dielektriku bude polarizace rovnoběžná s intenzitou pole

$$\boxed{\vec{P} \uparrow\uparrow \vec{E}}$$



Uvažte, že rovnoběžnost dvou vektorů vlastně znamená jejich přímou úměru (linearita), v homogenním a izotropním dielektriku je tedy polarizace úměrná intenzitě elektrického pole :

$$\boxed{\vec{P} = konst. \cdot \vec{E}}$$

lineární dielektrikum

Definujeme konstantu úměry vztahem :

$$\boxed{\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_o \cdot \vec{E}}$$

lineární dielektrikum

Kde konstanta κ se nazývá ***elektrická susceptibilita*** prostředí. Její hodnota závisí jedině na vlastnostech dielektrika (na jeho struktuře, druhu základních částic, vazebních silách ….). Výhodu toho, že do konstanty úměry byla „vsunuta“ permitivita vakua, poznáme až při zavedení elektrické indukce.

Uvědomme si nyní, že elektrická intenzita $\vec{E}$ v minulé rovnici popisuje elektrické pole v místě dipólů - tj. uvnitř látky … a toto pole uvnitř dielektrika není totožné s vnějším elektrickým polem, do kterého jsme dielektrikum vložili, neboť podle principu superpozice se toto vnější elektrické pole skládá s vlastním polem od vzniklých elektrických dipólů a obě pole dohromady vytvářejí výsledné pole uvnitř látky :

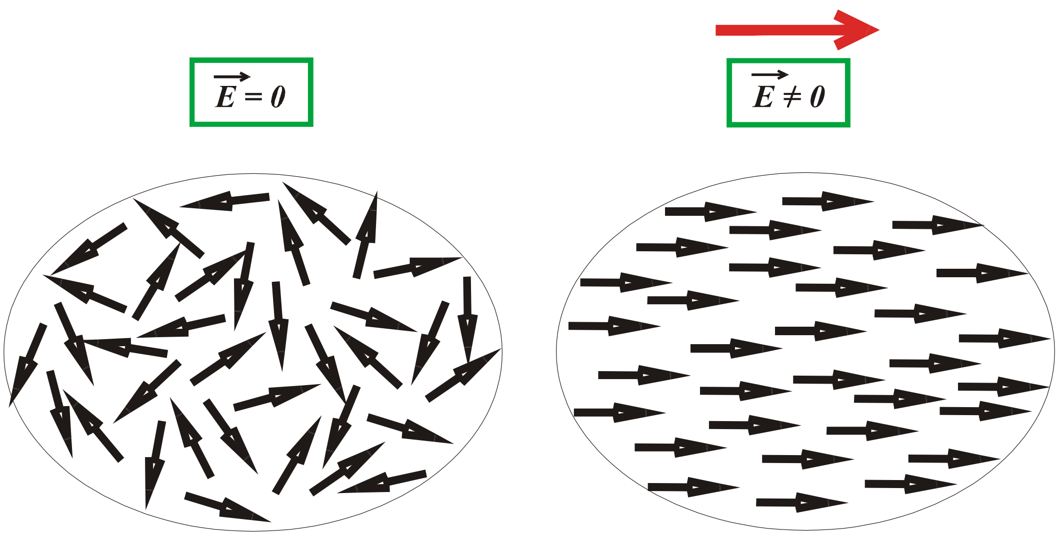
$$\vec{E} = \vec{E}_{vněněj} + \vec{E}_{vlastní}$$

Poznámka : Při polarizaci nemusí vždy vznikat elektrické dipóly, v některých látkách již dipóly existují, ale bez vnějšího pole je jejich vliv nulový, neboť v důsledku **náhodné orientace** je jejich celkový součet nulový (viz obr.) :

$$d\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_N = 0$$

Samozřejmě je pak nulový také vektor polarizace :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = 0$$



Teprve při vložení látky do vnějšího elektrického pole vznikne silový moment (úměrný poli, viz. „Zobecnění Coulombova zákona“), který začne otáčet dipóly do směru vektoru intenzity – nemůže ovšem způsobit nějakou výraznou rotaci dipólů, neboť musí překonávat existující vazbové síly dipólů - proto dojde jen k malému natočení dipólů do směru pole - tzv. ***orientační polarizace*** látky - takže v tomto směru vzniká nenulový výsledný dipólový moment (a nenulový vektor polarizace) - a s rostoucím polem se obě tyto veličiny (stejně jako silový moment) samozřejmě zvětšují.

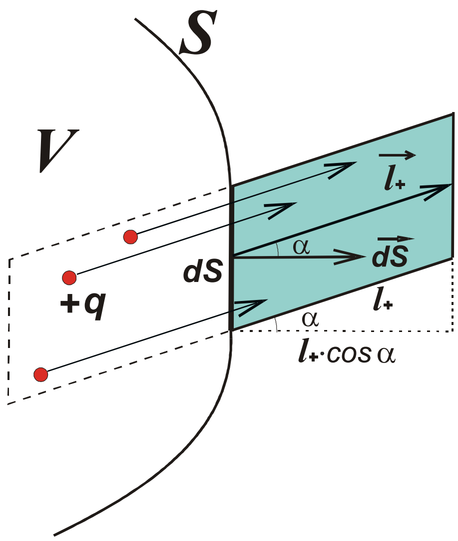
Podrobnější výpočet by ukázal, že vektor polarizace u homogenní a izotropní látky je opět úměrný intenzitě (výsledného) el. pole :

$$\vec{P} = konst. \cdot \vec{E}$$

(Druhá část obrázku tedy ukazuje nereálný stav maximálně polarizované látky, v extrémně silném poli.)

Je tedy jasné, že elektrické dipóly ovlivňují, spoluvytvářejí výsledné elektrické pole v dielektriku. Pro kvantitativní popis jejich působení se zavádí nová fyzikální veličina – vektor ***elektrické indukce***: následujícím postupem :

Zvolme v dielektriku spojitou uzavřenou plochu S. Protože víme, že při procesu polarizace v elektrickém poli dochází v dielektriku k posunu vázaných nábojů, položíme si otázku, jak veliký vázaný náboj přitom projde (proteče) přes tuto plochu (viz obr.) :



Uvažme nejprve, že kladné náboje se při polarizaci posunou o vektor $\vec{l}_+$ (je to vlastně jakýsi „jednorázový objemový tok“) a všechny, které při tomto posunu projdou ploškou dS, vyplní objem o velikosti (na obrázku zvýrazněný) :

$$dS \cdot l_+ \cdot \cos\alpha = \vec{l}_+ \cdot d\vec{S}$$

Vynásobením hustotou kladného vázaného náboje ρ^* získáme celkový náboj v tomto objemu - a to je také veškerý ***kladný vázaný náboj*** prošlý ploškou dS při polarizaci dielektrika :

$$\boxed{\rho^* \cdot \vec{l}_+ \cdot d\vec{S}}$$

Stejná úvaha musí platit pro záporné náboje : jejich vektory posunutí jsou $\vec{l}_-$ a hustotu mají přesně opačnou než kladné náboje, tj. $-\rho^*$, potom tedy ***záporný vázaný náboj*** prošlý ploškou dS při polarizaci bude analogicky :

$$\boxed{-\rho^* \cdot \vec{l}_- \cdot d\vec{S}}$$

A prošlý ***celkový vázaný náboj*** získáme jako součet obou těchto vztahů :

$$\rho^* \cdot \vec{l}_+ \cdot d\vec{S} \; - \rho^* \cdot \vec{l}_- \cdot d\vec{S} \; = \; \rho^* \cdot (\vec{l}_+ \; - \; \vec{l}_-) \cdot d\vec{S} \; = \; \rho^* \cdot \vec{l} \cdot d\vec{S}$$

Uvažujme homogenní dielektrikum, pro jehož vektor polarizace - jak víme - platí :

$$\vec{P} = \rho^* \cdot \vec{l}$$

Pak pro celkový vázaný náboj prošlý při polarizaci dielektrika přes diferenciální plošku dS dostáváme jednoduchý výraz :

$$\boxed{\vec{P} \cdot d\vec{S}}$$

A náboj prošlý přes celou uzavřenou plochu S získáme integrací :

$$\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Uzavřenost plochy bude mít význam při závěrečné úvaze : Tento náboj (předpokládáme celkově kladný a orientace vektorů $d\vec{S}$ podle obrázku) projde přes plochu S z jejího vnitřku ven , pochází tedy z vnitřního objemu V.

Protože před vložením do elektrického pole byla látka celkově neutrální (kladné i záporné náboje byly před vznikem dipólů v každém atomu přesně vykompenzovány) , znamená to , v objemu V při (po) polarizaci „vznikne“ , nebo „se objeví “ nevykompenzovaný náboj opačného znaménka :

$$\boxed{Q_p \; = \; - \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}}$$

polarizační náboj

Význam : Je to celkový vázaný náboj, který se při polarizaci „objeví“ uvnitř libovolné uzavřené plochy.

V obecnosti můžeme ještě předpokládat, že uvnitř plochy S (v objemu V) bude také nějaký „obyčejný“ **volný náboj** Q (dielektrikum obecně není dokonalé, nebo je do něj volný náboj úmyslně zaveden).

Pak ***celkový náboj*** uvnitř plochy S bude součtem obou těchto nábojů :

$$Q + Q_P$$

A musí platit Gaussův zákon:

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\cdot(Q + Q_p)$$

Dosaďme za polarizační náboj a rovnici vynásobme permitivitou vakua :

$$\varepsilon_o \cdot \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q + -\oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

Integrál z pravé strany převedeme nalevo :

$$\varepsilon_o \cdot \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = Q$$

Stejné integrály je ovšem možno sečíst :

$$\oint\!\!\!\oint_S (\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = Q$$

Vzniklý výraz v závorce pak definuje vektor nové fyzikální veličiny elektrické indukce :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}}$$ ***elektrická indukce*** *(vektor)*

Dostaneme tedy:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q}$$ ***Gaussův zákon v dielektriku*** (pro elektrickou indukci)

Je ihned zřejmá výhoda zavedení nové fyzikální veličiny elektrické indukce : v Gaussově zákonu zmizí polarizační náboj Q_p (jehož stanovení je obecně velmi obtížné, neboť závisí na mikroskopických vlastnostech zkoumané látky) a zůstane – jako dříve – pouze volný náboj Q . Ten je možno v nejobecnějším případě spojitě rozloženého náboje vyjádřit pomocí jeho hustoty ρ :

$$Q = \iiint_V \rho\, dV$$

Po dosazení do Gaussova zákona dostaneme :

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho\, dV$$

Levou stranu upravíme pomocí Gaussovy věty matematiky :

$$\iiint_V div\, \vec{D}\cdot dV = \iiint_V \rho\, dV$$

A porovnáním obou stran dostaneme :

$$\boxed{div\,\vec{D} = \rho}$$

Gaussův zákon v dielektriku (pro elektrickou indukci) (dif.tvar)

Vraťme se nyní k vektoru elektrické indukce, jak byl definován :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\,\vec{E} + \vec{P}$$

Za vektor polarizace dosaďme dříve odvozený vztah pro **lineární** (homogenní a izotropní) dielektrikum :

$$\vec{P} = \kappa \cdot \varepsilon_o \cdot \vec{E}$$

Nyní dobře chápeme důvod, proč byla k elektrické susceptibilitě připojena permitivita vakua - lze totiž provést jednoduché vytknutí :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\,\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_o\,\vec{E} + \kappa \cdot \varepsilon_o \cdot \vec{E} = \varepsilon_o \cdot (1 + \kappa) \cdot \vec{E}$$

A můžeme definovat materiálové konstanty :

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \kappa}$$

relativní permitivita látky

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r}$$

permitivita látky

Dostáváme tak vztah známý již ze střední školy :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$$

vztah elektrické indukce a intenzity

Tento vztah můžeme dosadit do Gaussova zákona:

$$\oiint_S \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

A vznikne tak jeho další použitelný tvar - ve hmotném prostředí, pro (výslednou) elektrickou intenzitu :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}}$$

Gaussův zákon v dielektriku (pro elektrickou intenzitu)

a nebo v diferenciálním tvaru:

$$\boxed{div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Gaussův zákon v dielektriku (dif.tvar, pro elektrickou intenzitu)

Na závěr zodpovíme ještě prvotní otázku, jaké je tedy vlastně výsledné elektrické pole v dielektriku - menší, nebo větší než původní vnější pole ve vakuu ?

Kdyby zdroje pole - náboje Q - byly ve vakuu, pak by pro intenzitu $\vec{E}_o$ vzniklého pole platilo podle Gaussova zákona :

$$\oiint_S \vec{E}_o \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

A kdyby stejné náboje Q byly ve hmotném prostředí, pak by elektrická intenzita $\vec{E}$ pole v látce musela splňovat vztah ::

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Vidíme, že pravá strana Gaussova zákona je nyní ε_r - krát menší než byla ve vakuu, tedy pro zachování rovnosti musí taková být i strana levá :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \vec{E}_o}$$

Slovně : v dielektriku je elektrické pole ***ε_r* - krát menší** , než by bylo ve vakuu (od stejných nábojů).

Intenzita je ale v podstatě síla, proto i Coulombův zákon musí být redukován ve stejném poměru :

$$\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o$$

Protože součin obou permitivit je obecná permitivita prostředí, dostáváme tak :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Coulombův zákon v dielektriku

(konec kapitoly)