<u>Elektrické pole ve vakuu</u>

Přesněji řečeno, budeme se věnovat elektrostatickému poli, tj. ***<u>silovému poli</u>*** vyvolanému existencí klidových nábojů. (Z mechaniky ovšem víme, že pojmy klidu a pohybu jsou relativní, závisejí na volbě souřadné soustavy.)

Základní fyzikální veličinou je ***<u>elektrický náboj</u>*** (jednotka 1 Coulomb), který má zejména tyto důležité vlastnosti:

1) Neexistuje „sám o sobě“, ale je vždy spojen s materiálním (hmotným) objektem. Nejmenší takové objekty jsou tzv. ***<u>mikročástice</u>***, elektrický náboj je jednou z jejich základních vlastností.
2) Je „nezničitelný“ (platí ***<u>zákon zachování</u>*** náboje).
3) Je násobkem elementárního náboje e=1,602.10^{-19} C (tzv. ***<u>kvantování</u>*** náboje)
4) Nemění se při transformacích vztažné soustavy souřadnic (***<u>invariantnost</u>*** náboje)
5) Účinky více nábojů se sčítají (princip ***<u>superpozice</u>***)
6) Silové účinky elektrického náboje popisuje:

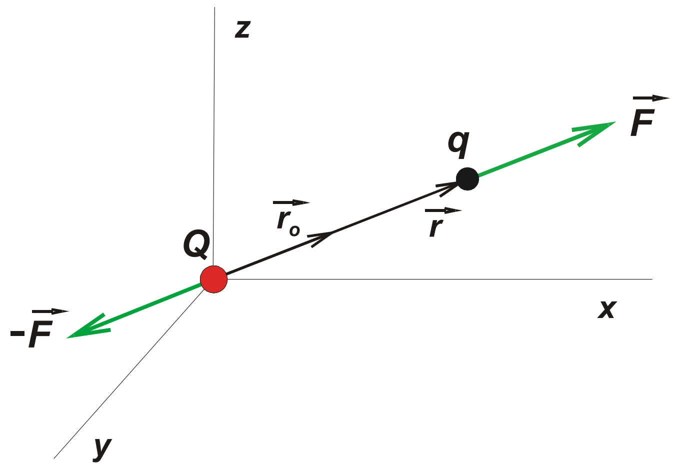
<u>Coulombův zákon</u> (1785)

Bodový (centrální) náboj velikosti Q, umístěný ve vakuu v počátku soustavy souřadnic, působí na druhý bodový (zkušební) náboj velikosti q, který je v místě $\vec{r}$, silou :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

kde ε_o je univerzální konstanta ***<u>permitivita vakua</u>*** a $\vec{r}_o$ je ***<u>jednotkový vektor</u>*** průvodiče :

$$\varepsilon_o = 8{,}854.10^{-12}\, F/m \qquad \vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}$$

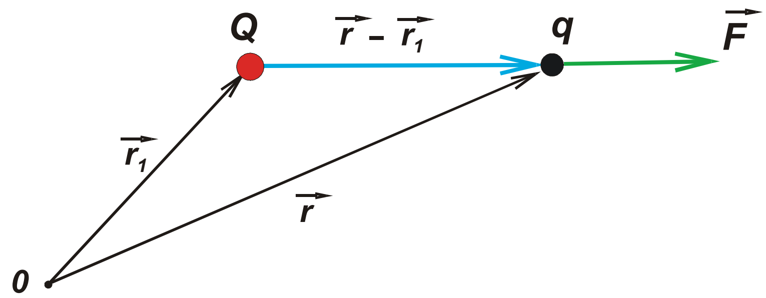


Po dosazení jednotkového vektoru dostaneme jiný tvar Coulombova zákona :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^3} \cdot \vec{r}}$$

Jestliže by centrální náboj Q nebyl v počátku souřadnic, ale např. v místě $\vec{r}_1$, pak by vztah pro sílu měl zřejmě tvar (nyní se dobře hodí poslední rovnice) (viz obr.) :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}$$



Platí samozřejmě zákon akce a reakce - náboj q působí na náboj Q silou stejně velikou, ale opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$.

Vidíme také, že Coulombův zákon je formálně (matematicky) shodný s gravitačním Newtonovým zákonem, obě síly – elektrostatická i gravitační - směřují vždy do jednoho bodu – ***<u>silového centra</u>*** a v obou případech také používáme pojem „silové pole“. Říkáme tedy, že náboj Q vytváří ve svém (nekonečném) okolí ***<u>elektrostatické pole</u>***, které je, stejně jako gravitační pole, ***<u>centrálním</u>*** silovým polem.

Pro jeho jednoznačný popis definujeme vektorovou veličinu :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$ ***<u>intenzita elektrického pole</u>*** [N/C = J/m.C = V/m]

<u>Slovní vyjádření :</u> *Intenzita elektrického pole udává (číselně) sílu působící v tomto poli na jednotkový zkušební náboj.*

Dosazením z Coulombova zákona dostaneme intenzitu el.pole, které vytváří bodový náboj Q umístěný v počátku souřadnic :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q.q}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

A v případě obecné polohy náboje Q v místě $\vec{r}_1$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)}$$

intenzita el. pole bodového náboje Q

Dále prozkoumejme, zda je elektrostatické pole konzervativní .

Pro zásadní důležitost této vlastnosti u jakéhokoliv silového pole zopakujeme potřebné výpočty a úvahy stejným způsobem a stejně podrobně, jako minulý semestr u pole gravitačního :

Vypočítejme tedy práci potřebnou k (velmi pomalému) přenesení bodového náboje q (v elektrickém poli náboje Q, který je v počátku souřadnic), po nějaké dráze (křivce) s z počátečního bodu $\vec{r}_1$ do koncového bodu $\vec{r}_2$.

Protože toto silové pole působí na zkušební náboj (těleso) silou $\vec{F}$, my musíme působit na těleso (vnější) silou stejně velikou a opačně orientovanou , tj. $-\vec{F}$, abychom sílu pole překonali (přesněji vzato, musíme působit ještě malou přídavnou silou navíc, pro uvedení tělesa do pohybu, kterou lze ale zřejmě, při požadavku velmi pomalého posunu, v limitě zanedbat).

Základní vztah pro práci vykonanou v silovém poli při pohybu náboje (tělesa) na dráze s (práci vykonanou námi, tj. vnější silou vzhledem k danému poli) tedy je :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

práce vnější síly v silovém poli *(obecně)*

Je zřejmé, že stejný integrál, ale bez záporného znaménka, by vyjadřoval ***práci silového pole*** .

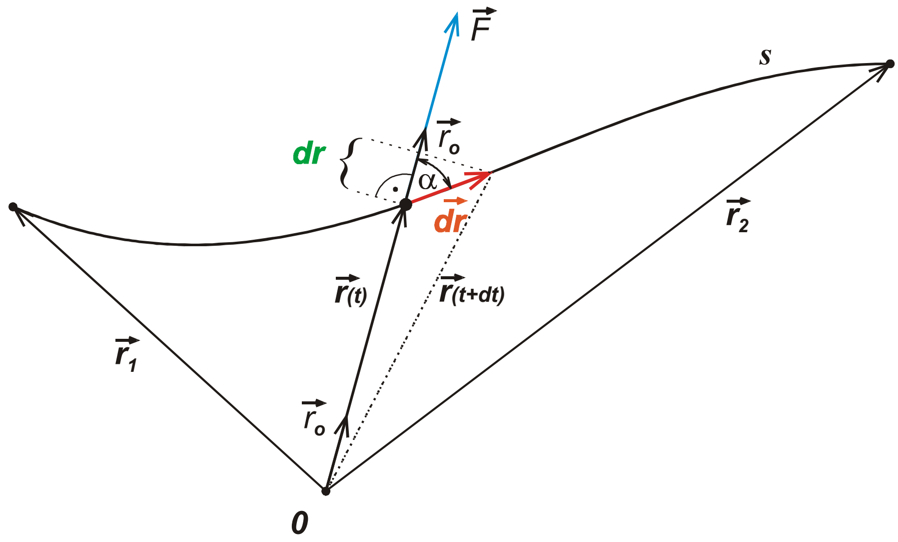
Nyní dosadíme konkrétně za elektrostatickou sílu z Coulombova zákona a vytkneme konstanty před integrál :

$$A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{r}_o\right) \cdot d\vec{r} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{r}_o \cdot d\vec{r}$$

Situace při výpočtu práce je znázorněna na obrázku – a je naprosto stejná jako byla u gravitačního pole.

Upravíme dále skalární součin v integrálu, přitom využijeme známé velikosti jednotkového vektoru:

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = |\vec{r}_o| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



Z obrázku je zřejmé, že tento skalární součin je kolmým průmětem diferenciálu průvodiče $d\vec{r}$ do směru průvodiče $\vec{r}$ (do směru jeho jednotkového vektoru) a že je tedy vlastně roven diferenciálu (přírůstku) velikosti průvodiče dr :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = \left| d\vec{r} \right| \cdot \cos\alpha = dr \qquad \text{(Je tedy } dr \neq |\,d\vec{r}\,| \text{ , i když } r = |\,\vec{r}\,| \text{)}$$

Tím se výrazně zjednoduší výpočet vykonané práce, neboť již vzniká známý integrál :

$$A = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -\frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \left[-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right] = \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o \cdot r_2} - \frac{Q \cdot q}{4\pi\varepsilon_o \cdot r_1}$$

Vidíme, že – jako u gravitačního pole – vykonaná práce nezávisí vůbec na dráze (na jejím tvaru), ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy.

Z této závislosti potom také plyne, že při zpětném pohybu náboje q (tělesa) z koncového bodu do počátečního bodu (námi) vykonanou práci „dostaneme zpět“ , tj. bude vykonána práce opačného znaménka. (to znamená, že práci koná opačná síla - síla elektrostatického pole a my tuto práci můžeme „využívat“) :

$$A' = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -A$$

Původně vykonaná práce A je tedy jakoby uschována, zakonzervována v koncovém bodu dráhy $\vec{r}_2$ a těleso (silové pole) má v tomto místě schopnost vykonat práci , stejně velikou jako naše původní práce :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Tato schopnost náboje (tělesa) vykonat práci , spojená s jeho (koncovou) polohou , se nazývá ***potenciální energie*** tělesa a její velikost se definuje jako velikost vykonané práce (vykonané silovým polem při přesunu do polohy počáteční a nebo také vykonané námi - vnější silou - při původním pohybu z počátečního do koncového bodu).
Silové pole s takovou význačnou vlastností, která umožňuje zachovávání, zakonzervování vykonané práce, se pak nazývá ***konzervativní*** silové pole.

Obě centrální silová pole - elektrostatické i gravitační – jsou tedy konzervativní.

Protože vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body, počátečním a koncovým, je potenciální energie ***jednoznačnou funkcí místa*** $\vec{r}_2$ (tento koncový bod původně zvolené dráhy je ovšem jako proměnná ve funkci zcela libovolným bodem v prostoru, píšeme ho tedy obecně dále bez indexu) a samozřejmě také funkcí místa $\vec{r}_1$ (zde je namístě ponechání indexu, neboť tento bod je sice také obecně zcela libovolný, ale při řešení daného problému se předem zvolí a ve funkci dále vystupuje jako konstanta, matematicky to je vlastně ***parametr*** funkce).

Bodový náboj q má tedy v daném místě $\vec{r}$ vzhledem k místu $\vec{r}_1$ potenciální energii :

$$\boxed{W_p(\vec{r},\vec{r}_1) = A = \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o r} - \frac{Q\,q}{4\pi\varepsilon_o r_1}}$$

elektrostatická potenciální energie (obecný tvar)

Slovní vyjádření : *je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje* q *(tělesa) z daného místa* $\vec{r}$ *do zvoleného výchozího místa* $\vec{r}_1$ *a je to také práce , kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje opačným směrem, z výchozího místa do daného místa.*

V teoretických výpočtech se často – stejně jako u gravitačního pole - pro potenciální energii volí výchozí místo v nekonečnu , tj.:

$$\boxed{r_1 \to \infty}$$

V této limitě je potom druhý člen ve vztahu pro potenciální energii nulový - zbavíme se tak závislosti na počátečním stavu náboje q (tělesa) (na jeho počátečním místě) a dostáváme velmi jednoduchý tvar :

$$\boxed{W_p(\vec{r}) \;=\; \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

elektrostatická potenciální energie (speciální tvar)

Stanovme opět význam : *je to práce, kterou vykoná elektrostatické pole při pohybu náboje q (tělesa) z daného místa $\vec{r}$ do nekonečna a je to také práce, kterou my musíme nejprve vykonat při přesunu náboje z nekonečna do daného místa.*

S využitím posledního vztahu můžeme nyní snadno zapsat původní vykonanou práci (vnější silou) při přesunu náboje q mezi dvěma místy :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

Práce potřebná pro přemístění náboje q mezi dvěma místy v silovém poli je tedy rovna ***rozdílu potenciálních energií*** mezi těmito místy. (Formálně stejný vztah platí i při použití $W_p(\vec{r},\vec{r}_1)$ tj., při jakékoliv volbě výchozího místa $\vec{r}_1$, zkuste sami dokázat)

Nyní definujeme fyzikální veličinu elektrostatický potenciál :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) \;=\; \frac{W_p(\vec{r})}{q}}$$

elektrostatický potenciál [J / C] = [V]

Slovní vyjádření : *Je to potenciální energie (zkušebního) jednotkového náboje, tedy práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo.*

Stejně jako potenciální energie je i potenciál samozřejmě ***jednoznačnou funkcí*** místa. Dosaďme ještě za W_p z její definice jako vykonané práce :

$$\varphi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{q}\cdot\int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\infty}^{\vec{r}} -\frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

A dostáváme tak zásadní (integrální) vztah mezi dvěma nejdůležitějšími veličinami elektrostatického pole, dokonale odpovídající výše uvedenému slovnímu vyjádření potenciálu (práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo), neboť ve výrazu pro práci vystupuje nyní přímo elektrická intenzita, tedy síla (působící na jednotkový náboj) :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}}$$

vyjádření potenciálu jako práce intenzity pole

A nakonec dosaďme za potenciální energii W_p její konkrétní tvar pro bodové náboje:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{q}\cdot\frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}}$$

potenciál bodového náboje

Poznámka 1.: Tento vztah platí pro náboj Q v počátku soustavy souřadnic. Jak bychom ho upravili pro náboj Q v jiném místě ?

(Viz odstavec „Zobecnění Coulombova zákona – D.cv.)

Poznámka 2. : namísto $W_p(\vec{r})$ lze samozřejmě použít $W_p(\vec{r},\vec{r}_1)$

A nyní upravíme naposled získaný vztah (viz předchozí stránka) pro práci A vykonanou při přemístění náboje q z místa $\vec{r}_1$ do místa $\vec{r}_2$, tj. :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1)$$

Do této rovnice dosadíme z definice potenciálu :

$$W_p(\vec{r}) = q\cdot\varphi(\vec{r})$$

A obdržíme :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = q\cdot\varphi(\vec{r}_2) - q\cdot\varphi(\vec{r}_1) = q\cdot[\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)] = q\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Použijme pouze první integrál a poslední výraz a vytvoříme tak vztah :

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = q\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Rovnici vydělíme nábojem a ještě využijeme definici intenzity. Vznikne tak velmi užitečný vztah pro rozdíl potenciálů :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Tento rozdíl potenciálů je vlastně ***přírůstkem potenciálu*** mezi místy 1 a 2 (rozdíl hodnot funkce v koncovém a počátečním bodě) a vidíme, že je roven práci vnější síly při přesunu jednotkového náboje mezi těmito místy.

Ukázalo se, že rozdíl potenciálů je - zejména v praktické elektrotechnice - velmi důležitou veličinou a získal i zvláštní název ***napětí*** .

Přesněji řečeno : fyzikální veličina *elektrické napětí mezi místy 1 a 2* se definuje jako ***úbytek potenciálu*** mezi těmito místy :

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

elektrické napětí mezi místy 1 a 2

Slovní vyjádření : *Elektrické napětí mezi místy 1 a 2 je rovno práci, kterou vykoná el. pole při přesunu jednotkového náboje z místa 1 do místa 2.*

Pomocí této fyzikální veličiny je pak možno nejjednodušším možným způsobem vyjádřit práci potřebnou pro přemístění náboje q z $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = q \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E} \cdot d\vec{r} = q \cdot U_{21}$$

Tedy :

$$\boxed{A = q \cdot U_{21}}$$

práce potřebná pro přemístění náboje q mezi místy 1 a 2

Jak vidíme, tato práce je samozřejmě q-krát větší než práce potřebná pro přemístění jednotkového náboje (což je napětí) mezi těmito místy.

(konec otázky) **(K.Rusňák 11/05)**